

# Mathématiques hors les murs !!!

*Le DÉFI, si vous l'acceptez, est de découvrir une pyramide en franchissant les murs de différentes architectures et énigmes*

## Éléments de CORRECTION

### 1. Une pyramide limousine

a) Déterminez toutes les pyramides de hauteur trois ne contenant que des nombres à un chiffre, ces chiffres étant deux à deux distincts.

Sur la deuxième rangée les nombres sont au moins égaux à  $3 = 1 + 2$  et par la convention ils vont en croissant. Le nombre au sommet peut être 9, la deuxième rangée est alors (3, 6) ou (4, 5).

Il y a deux possibilités pour la base dans le premier cas, (1, 2, 4) et (2, 1, 5), mais une seule dans le second cas, (1, 3, 2), puisque (3, 1, 4) n'est pas possible (il y aurait deux 4).

Le nombre au sommet peut aussi être 8, la deuxième rangée est alors (3, 5) et la base (2, 1, 4) car (1, 2, 3) donnerait deux 3.

Le nombre au sommet ne peut pas être 7 car la deuxième rangée serait alors (3, 4) et aucune base ne convient.

Il y a donc 4 pyramides de bases (1, 2, 4), (2, 1, 5), (1, 3, 2) et (2, 1, 4).

b) Combien y a-t-il de pyramides de hauteur trois contenant les nombres 19, 23 et 87 (numéros des départements de l'Académie de Limoges) au sommet et aux extrémités de la base de la pyramide ?

Le nombre au sommet est plus grand que les nombres de la base donc c'est 87.

Notons  $x$  le nombre au milieu de la base qui s'écrit donc (19,  $x$ , 23). Sur la deuxième ligne il y a alors  $19 + x$  et  $23 + x$  et le nombre au sommet est donc égal à  $2x + 42 = 87$ . C'est impossible puisqu'on en déduirait  $x = 22,5$  qui n'est pas un entier : il n'existe aucune pyramide qui respecte les conditions demandées.

c) Déterminez toutes les pyramides de hauteur trois contenant les nombres 19, 23 et 87.

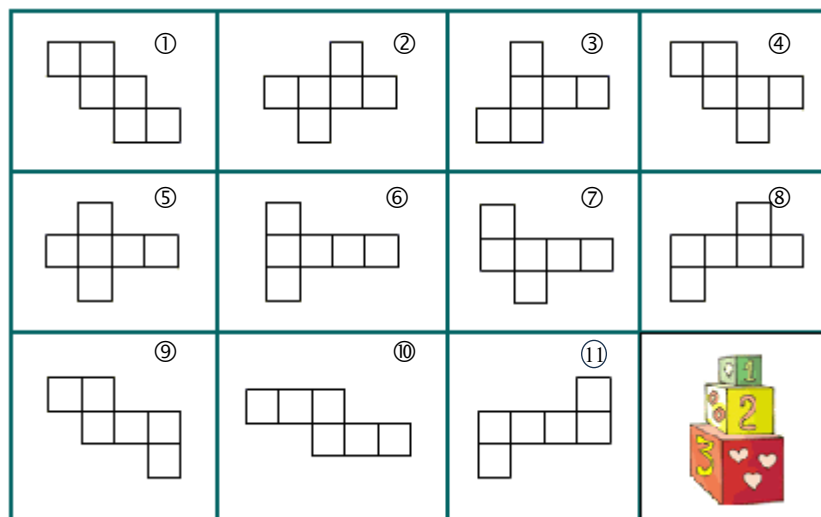
Une recherche systématique montre qu'il existe au total 15 pyramides contenant les nombres 19, 23 et 87 :

152	216	148	87	87	87	87	129
42 110	106 110	42 106	42 45	42 45	23 64	23 64	42 87
19 23 87	19 87 23	23 19 87	19 23 22	23 19 26	19 4 60	4 19 45	19 23 64
129	178	170	114	110	129	110	
42 87	87 91	83 87	23 91	23 87	23 106	23 87	
23 19 68	19 68 23	19 64 23	19 4 87	19 4 83	4 19 87	4 19 68	

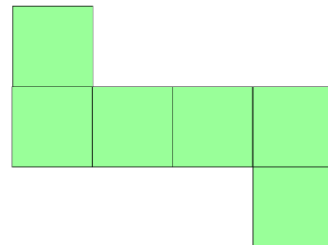
### 2. Une architecture de CUBES

#### a) Préparation du cube « énigme »

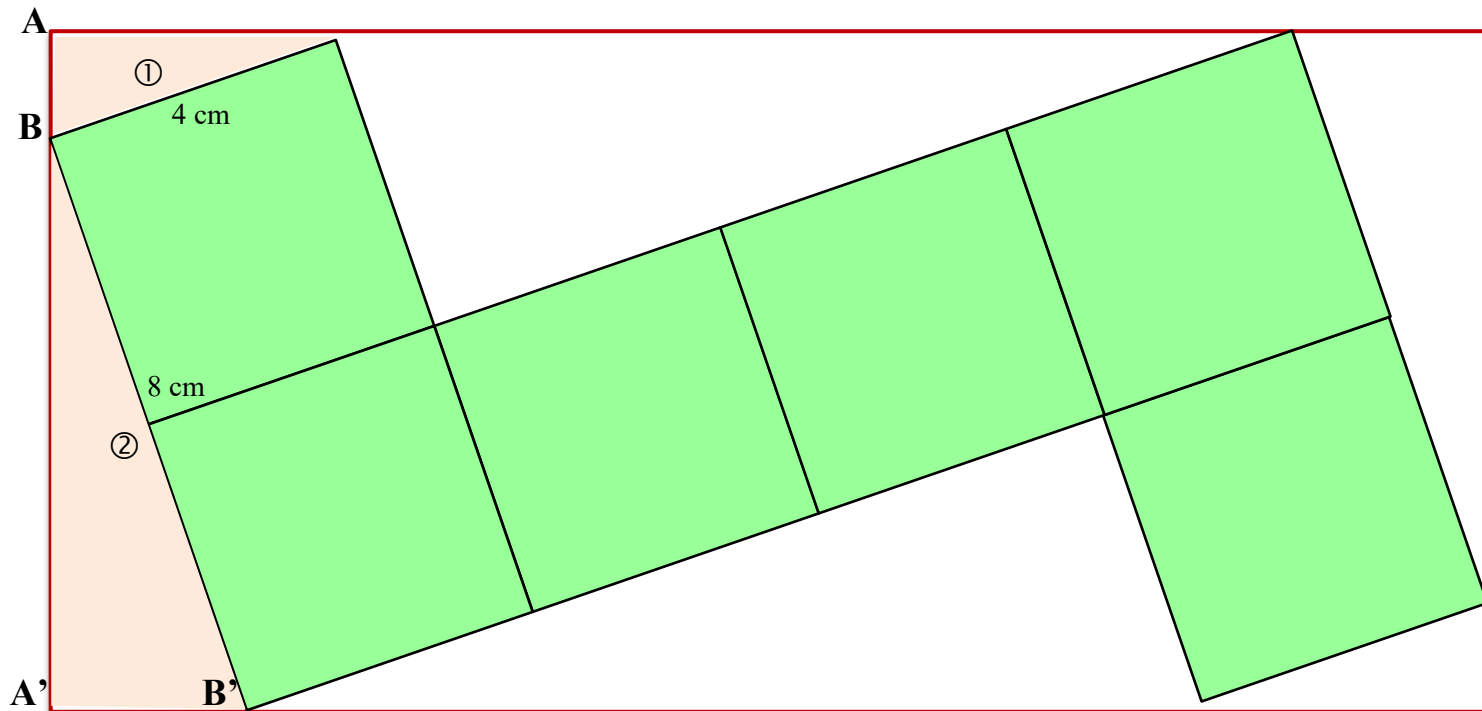
Le patron d'un cube est composé de 6 carrés. Il en existe 11 patrons possibles :



Pour insérer le patron dans le rectangle proposé, il faut choisir le patron le plus long sans dépasser la longueur de 19 cm : On ne peut choisir qu'une bande de 4 carrés de longueur  $4 \times 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$  et non 5 carrés de longueur  $5 \times 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm} > 19 \text{ cm}$ . Ensuite il faudrait placer les 2 autres carrés de part et d'autre de la bande avec un éloignement maximum. Ceci permet d'incliner le patron entrant dans le grand rectangle de largeur 9 cm.



Procédure par ESSAIS : avec l'utilisation de la grille de carrés

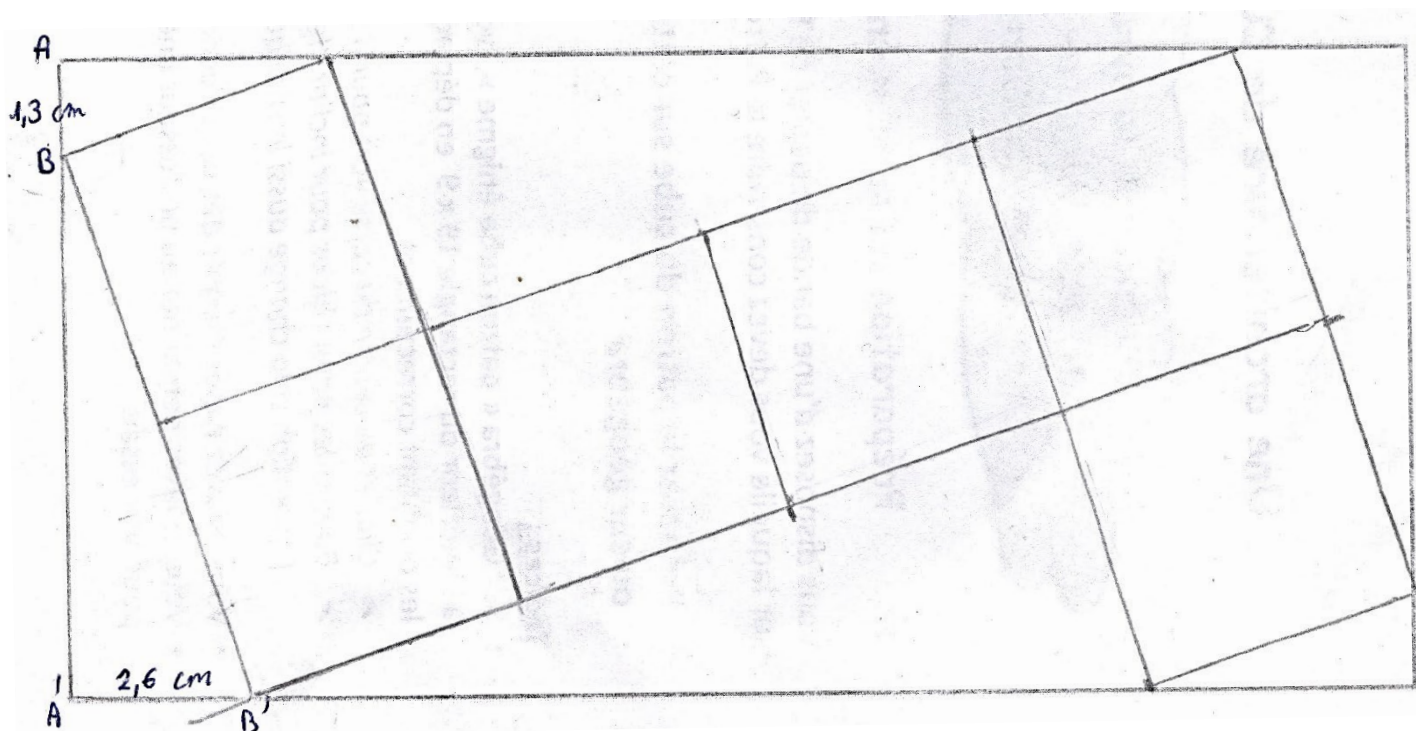


Procédure experte avec constructions géométriques :

On remarque que les triangles ① et ② sont semblables : ① est un triangle rectangle d'hypoténuse 4 cm et ② est un triangle rectangle d'hypoténuse 8 cm. Les côtés de ② sont le double deux à deux des côtés de ①.

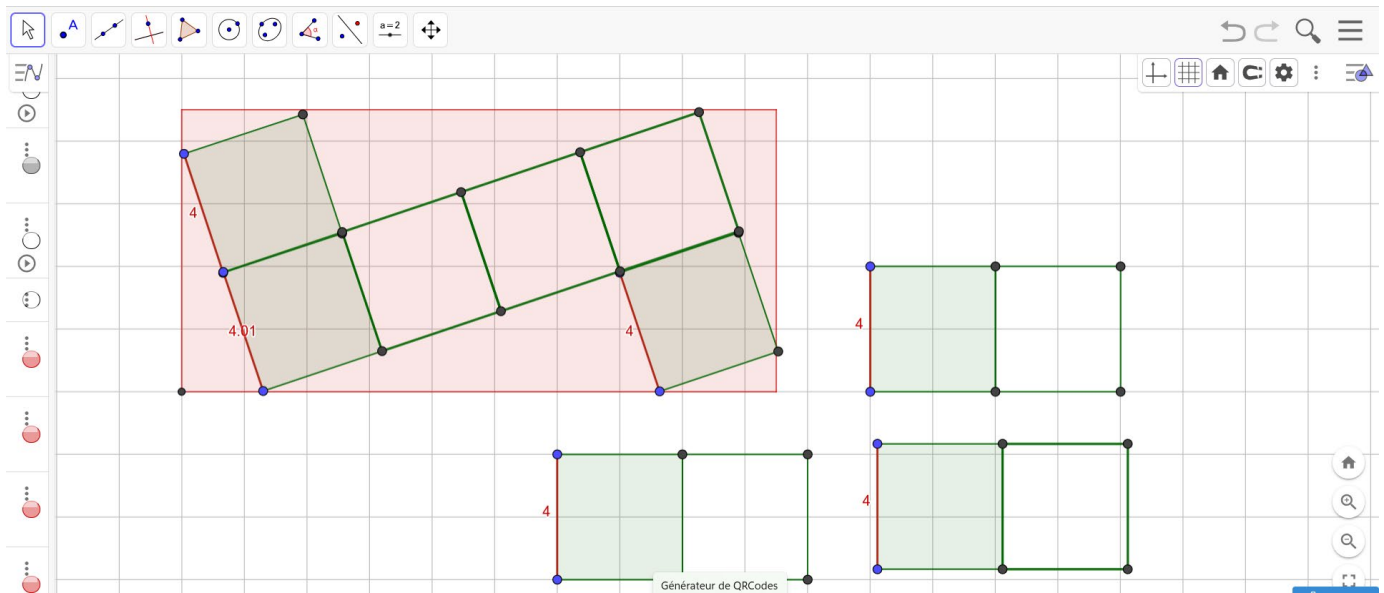
On peut tracer  $AB = 1,3 \text{ cm}$  et tracer l'hypoténuse ① à 4 cm et celle  $[A'B']$  à 8 cm  $A'B' = 1,3 \times 2 = 2,6 \text{ cm}$

Ces premiers points permettent de construire le patron inscrit dans le rectangle :



## Avec GEOGEBRA

On utilise le bloc de 4 carrés alignés et de 2 carrés isolés. En inclinant les blocs et en ajustant le côté à 4 cm, on construit le patron à l'intérieur du rectangle rouge.:



### b) Le grand CUBE, écrin du petit

Le grand cube est composé de 13 petits cubes par côtés  
Plein, le grand cube contient  $13 \times 13 \times 13 = 13^3 = 2197$  cubes

En observant les faces rouge et verte, on note qu'il y a 3 plans où 2 rangées bleues (vidées) se croisent : le plan jaune (en haut), le plan central et le plan blanc (en bas).

Une paire de 2 rangées compte  $13 \times 2 - 1 = 25$  cubes (on élève un cube au croisement des 2 rangées)

**Pour les 3 paires de rangées, cela fait  $3 \times 25 = 75$  cubes**

Il y a aussi 2 plans intermédiaires où 4 rangées se croisent :  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$

Par plan, 2 rangées horizontales à 13 et 2 rangées verticales à 11 cubes

$2 \times 13 + 2 \times 11 = 48$  cubes

**Pour les 2 plans intermédiaires  $48 \times 2 = 96$  cubes**

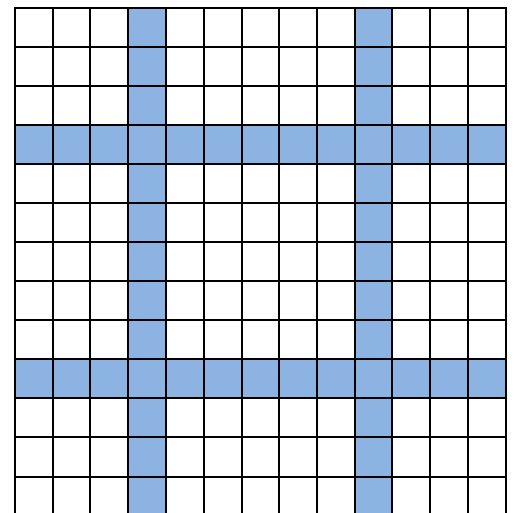
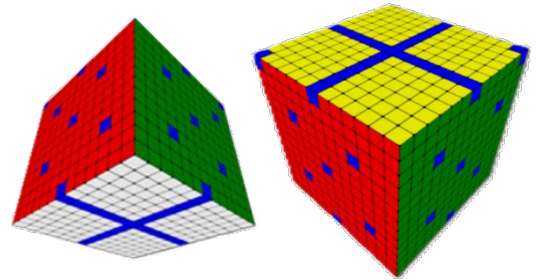
Il faudra aussi enlever les 2 cubes aux 2 sommets de la face jaune

**On enlève les cubes des rangées et des sommets au grand cube plein :**

**$2197 - 75 - 96 - 2 = 2024$  cubes**

ATTENTION, il faut maintenant rajouter le cube « énigme » au centre

**Cela fait donc  $2024 + 1 = 2025$  cubes**



### 3. Les cubes font-ils un carré ?

On sait que la base de la pyramide est de côté 1,80 m

**Peut-on recouvrir totalement le sol de la pyramide ?**

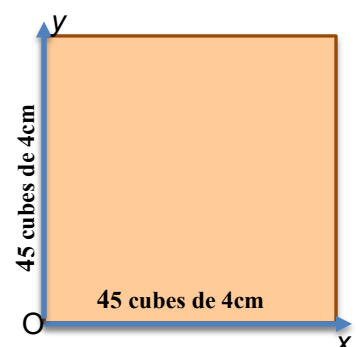
Le grand cube est constitué de 2025 petits cubes. On cherche à les répartir sur un carré d'un même nombre de cubes sur chaque côté. On cherche donc la racine carrée de 2025 :

$$\sqrt{2025} = 45$$

Ainsi  $2025 = 45 \times 45$ . Le carré sera formé de 45 cubes de chaque côté.

Les cubes sont de côté 4 cm donc chaque côté du carré mesure  $45 \times 4 = 180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$

**C'est juste la dimension des côtés du sol de la pyramide donc OUI on peut recouvrir totalement le sol avec les petits cubes.**



#### 4. Enigmes du cube central

On vous demande de disposer le petit cube « énigme » au centre du sol de la pyramide.

a) Précisez à quelle position placer le petit cube « énigme » (en nombres de cubes repérés en x et en y)

Pour placer un cube au milieu d'un côté contenant 45 cubes, on enlève 1 cube des 45, soit 44 cubes. C'est le cube que l'on placera au centre. On sépare en 2 les 44 cubes : soit  $44/2 = 22$  cubes de part et d'autre du cube central.

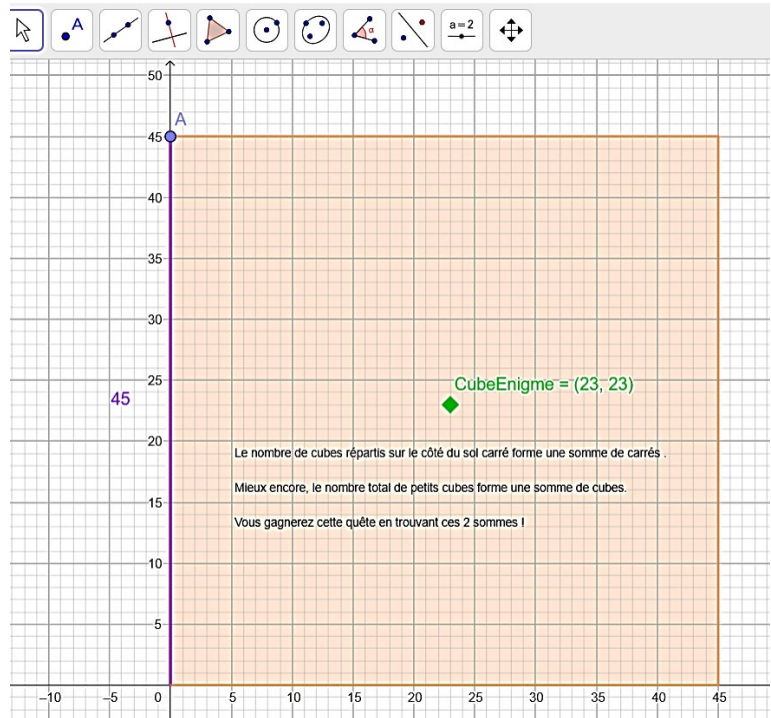
Ainsi le cube central est en 23<sup>ème</sup> position en x comme en y

Sur GEOGEBRA,

On ajuste le côté du sol à 45 cubes en mettant le point A à l'ordonnée 45

On déplace ensuite le petit carré vert pour l'amener aux coordonnées ( 23 ; 23 ).

Le message apparaît !



b) En bonne position, le petit cube « énigme » s'ouvre pour donner un ultime défi

*« Le nombre de cubes répartis sur le côté du sol carré forme une somme de carrés. Mieux encore, le nombre total de petits cubes forme une somme de cubes*

*Vous gagnerez cette quête en trouvant ces 2 sommes ! »*

Somme de carrés formant 45, côté du sol : ( en nombre de cubes alignés)

$$2^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 16 + 25 = 45 \quad \text{mais aussi} \quad 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$$

Somme de cubes formant 2025 , nombre de petits cubes :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729 = 2025$$