Des Maths et des Foules en Mouvement

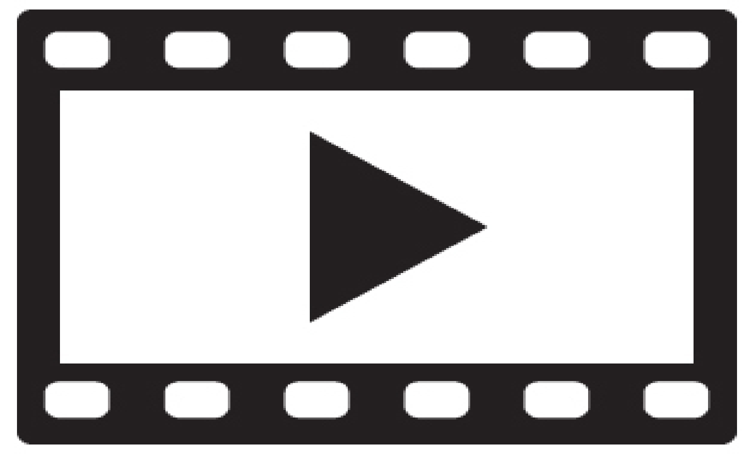
Noureddine Igbida

Institut de recherche XLIM, UMR-CNRS 6172
Université de Limoges, 87060 Limoges
France

Journée IREM-Lycées-Xlim, Juin 2022

Aims and scope

- Modélisation :
  - Macroscopique : modèle discret
  - Microscopique : modèle continue
- Phénomène de congestion/décongestion
- Résultats types : numérique



Généralités

Foule [1] :

- Ensemble d'individus, animaux ...
- Pas de chevauchement (contrainte de borne maximale sur la densité de la foule, congestion)
- Pas de comportement chaotique, incohérent, disparate ni confus ...

Mouvement :

- Lieu connu
- Atteindre un objectif connu
- Obéir à une(des) consigne(s) instinctifs(ves), volontaire(s) ou calculé(s)
- Éviter des obstacles
- Capacité de déterminer/décider instantanément une trajectoire optimale (ou pas !)

Maths :

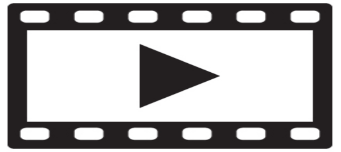
- Analyse : applications à plusieurs variables, calcul des variations (dérivées, dérivées partielles, optimisation, EDP)
- Modélisation : connaissances en physiques (mécanique du fluide, mécanique du solide, équations du mouvement ....), opérateur différentielles (gradient, divergence)
- Calcul scientifique : algorithmique, programmation (Matlab, Scilab, Python, ...)

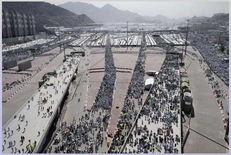
- Des équations mathématiques

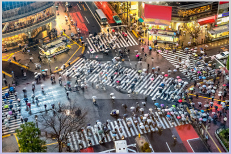
1. Wikipedia : La foule est un rassemblement de personnes dans un même lieu

Déplacement de foule/individus

- Atteindre un objectif
- Obéir à une(des) consigne(s)
- Éviter des obstacles

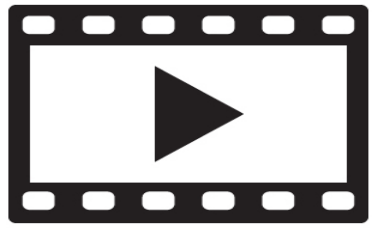


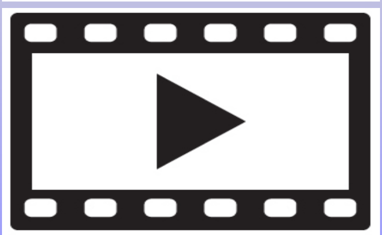




Modélisation microscopique : modèles discrets

- Modèles à l'échelle des individus
- Mouvement global à partir de celui de chaque individu
- Un individu $\Longleftrightarrow$ une particule $\Longleftrightarrow$ un disque ou un carré (dans le plan)
- Autant d'équations (de mouvement) que de particules





Cf. thèse 2008 J. Venel (B. Maury)

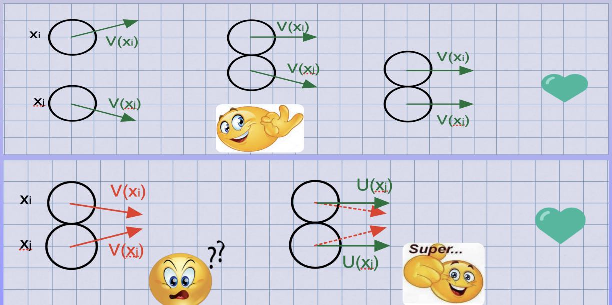
Modèles discrets : principes de base

- Équation du mouvement d'une particule $x = x(t) \in \mathcal{R}^2$:

$$\frac{dx}{dt} = V \quad \text{où } V \text{ est la vitesse de la particule.}$$

- V prend en compte
  - les objectifs
  - la(es) consigne(s)
  - Les obstacles
  - **La proximité des autres individus/particules**
  - Autres facteurs particuliers ....
- **Scénario à la B. Maury et al.** (thèse 2008 J. Venel, thèse 2011 A. Roudneff)

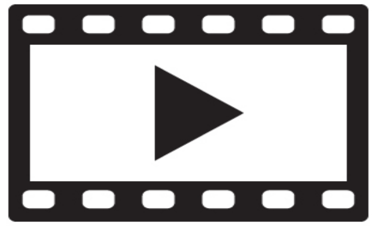
$$\frac{dx_i}{dt} = U[x_i], \quad U[x_i] = P_{K(x)}\left[V(x_i)\right], \quad i = 1, \dots .N.$$

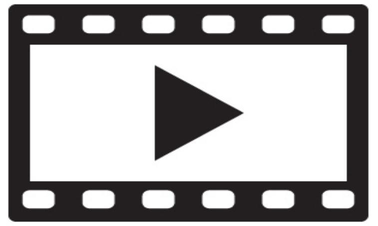


Modèles discrets : systèmes de particules en interaction ou automates cellulaires

Différents scénarios pourrait êtres envisagés en s'inspirant des stratégies suivants :

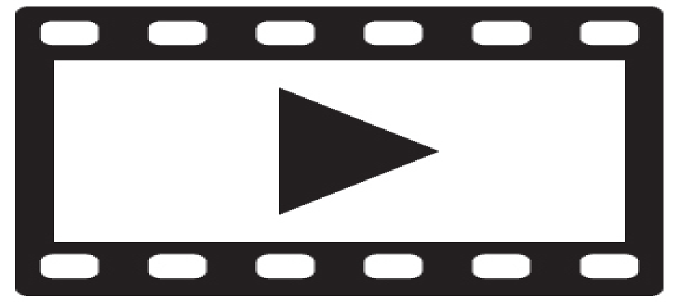
1. Modèles à base des règles du vol en groupe des oiseaux (flocking bird) [2] : séparation, alignement ou cohésion
2. Modèles des forces sociales [3] : accélération, répulsion ou attraction

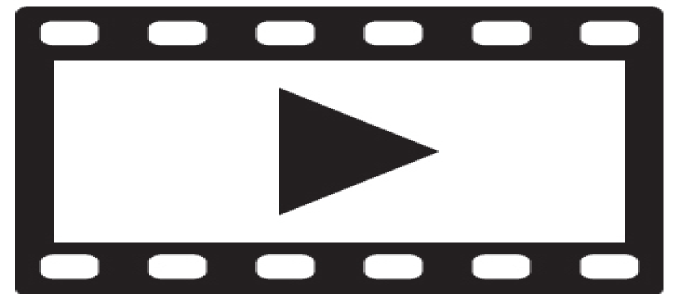




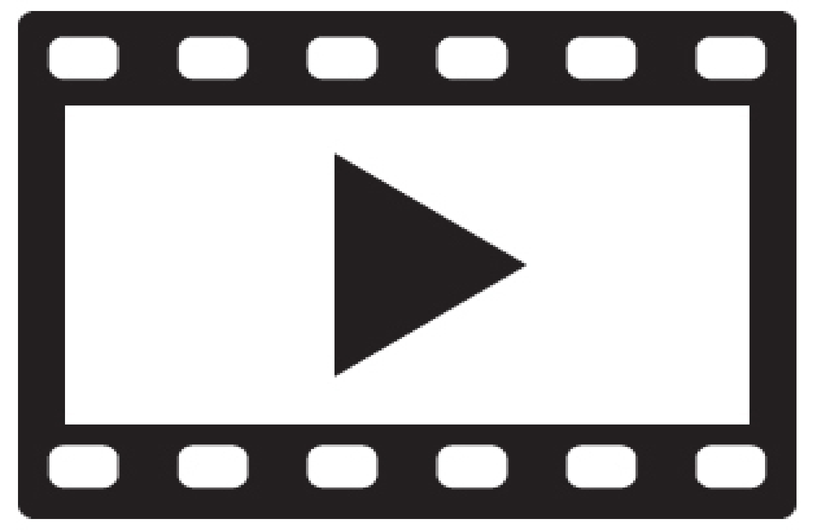
Cf. YouTube : starling murmuration dec 2020 & Boids algorithm birds flocking

Modélisation macroscopique : assimilation fluide





Modélisation macroscopique : assimilation fluide



REMARK *L'idée remonte aux début des années* 1970, *lorsque le physicien australien Leroy Henderson qui a proposé d'assimiler le mouvement d'une foule à celui d'une*

Modélisation macroscopique : Équation de continuité/conservation

- Modèle à l'échelle de la foule
- Homogénéisation $\Longleftrightarrow$ des équations globales $\Longleftrightarrow$ mouvement global de la foule
- Une foule $\Longleftrightarrow$ une densité de population :
  - $\rho\ :\ (t,x) \in [0,\infty) \times \mathcal{R}^2 \to \rho(t,x)$.
  - ρ : une quantité d'individu par unité de surface
  - Pas de chevauchement $\Longleftrightarrow$ un individu par position $\Longleftrightarrow$ $0 \leq \rho(t,x) \leq 1$
- Une(des) équations sur ρ $\Longleftrightarrow$ EDP(s)
- **Équation de continuité :**

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \mathrm{div}(\Phi) = 0$$

où

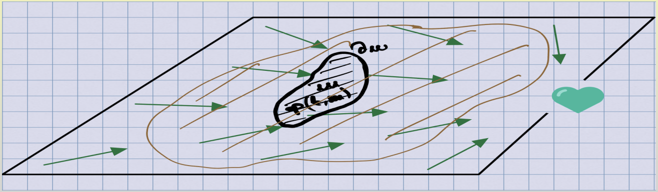
- Φ flux[4] de population
- $\Phi = \rho\ V$ et V est la vitesse de déplacement

En effet, pour tout $\omega \subset \mathcal{R}^2$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\omega \rho(s,x)\,dx}_{q(t,w)} = \int_{\partial\omega} \underbrace{\rho V \cdot \nu}_{\text{flux surfacique}} \, dS.$$

4. un flux est un ensemble d'éléments (informations / données, énergie, matière...) évoluant dans un sens commun. Il peut donc s'entendre comme un déplacement de quelque nature qu'il soit, caractérisé par une origine, une destination et un trajet.

Modélisation macroscopique : Équation de continuité/conservation/transport



Équation de transport

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \mathrm{div}(\Phi) = 0$$

- Φ flux de population
- $\Phi = \rho\, V$ et V est la vitesse de déplacement

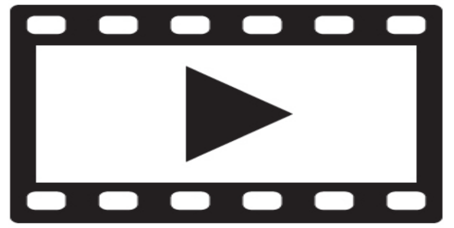
En effet, pour tout $\omega \subset \mathcal{R}^2$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\omega} \rho(s,x)\, dx}_{q(t,w)} = \int_{\partial\omega} \underbrace{\rho V \cdot \nu}_{\text{flux surfacique}} \; dS.$$

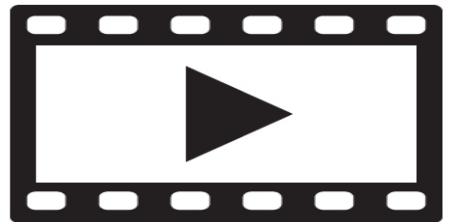
<u>REMARK</u>

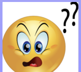
- *$div(\Phi) > 0 \Longrightarrow$ flux expansif (majoritairement sortant autour du point)*
- *$div(\Phi) < 0 \Longrightarrow$ flux compressif (majoritairement entrant autour du point)*
- *$div(\Phi) = 0 \Longrightarrow$ flux entrant et sortant autour de ce point se compensent (par exemple champ constant ou champ tourbillonnant).*

Modélisation macroscopique : congestion



- Équation de transport linéaire $\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \mathrm{div}(\rho\, V) = 0$ et $\rho(0,x) = \rho_0(x)$
  - V est calculé à partir des géodésique (le plus cours chemin vers la sortie !)
  - V est calculé à l'aide de l'équation dite **Eikonal** $\|\nabla\varphi\| = 1$ (thèse H. Ennaji, Limoges 2017-20)
- Résolution numérique (Cf. thèse G. Jradi, Limoges 2018-22, et H. Ennaji Limoges 2017-20)





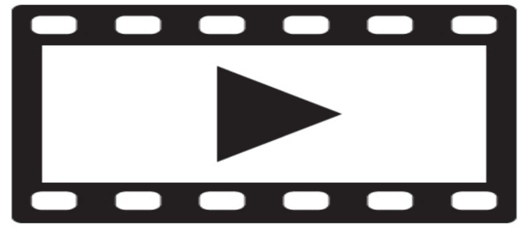
Modélisation macroscopique : "dé-congestion"

- Rendre V admissible ! ! !
- Modèle trafic routier :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \mathrm{div}(\rho(1-\rho)V) = 0$$

- **Modèle de Hugues** (les années 2002 - meilleurs prise en compte d ela congestion) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \mathrm{div}(\rho(1-\rho)V) = 0 \\ V = \nabla\varphi/\|\nabla\varphi\| \\ \|\nabla\varphi\| = 1/(1-\rho) \end{cases}$$



(Cf. thèse G. Jradi, Limoges 2018-22)

Dé-congestion : modèle prédiction-correction

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \mathrm{div}(\rho(V+W)) = 0 \\ \\ W \llcorner [\rho = 1] \end{cases}$$

- Soit $T > 0$
- $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ une discrétisation de $[0, T]$
- **Prédiction :** sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+\frac{1}{2}}]$ on transporte la population

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(V\rho) = 0 \\ \qquad\qquad \rho(t_k) = \rho^{k-1}. \end{cases} \implies \quad \rho^{k+\frac{1}{2}} \text{ sur } [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}[$$

- **Correction :** si $\rho^{k+\frac{1}{2}}$ n'est pas admissible, on corrige moyennant une EDP (problème d'optimisation)

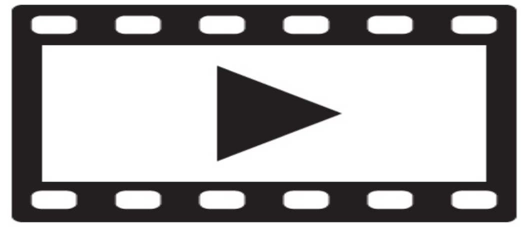
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \mathrm{div}(\rho W) = 0 \\ \\ W \llcorner [\rho = 1] \ldots \end{cases} \implies \quad \rho^{k+1} \text{ sur } [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[$$

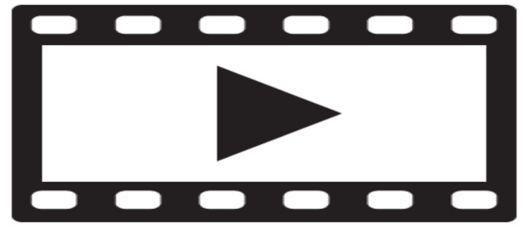
...

- Ce qui donne pour la densité la densité :

$$\rho_\tau(t) = \begin{cases} \rho_\tau^{k+1/2}, & \text{pour } t \in [t_k, t_{k+1/2}[\\ \rho_\tau^{k+1}, & \text{pour } t \in [t_{k+1/2}, t_{k+1}[\end{cases}$$

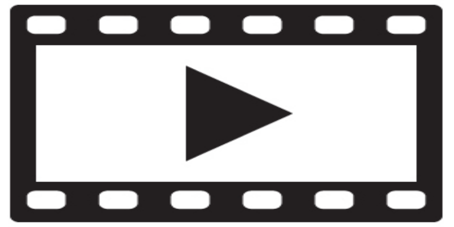
Résultat numérique : modèle prédiction-correction

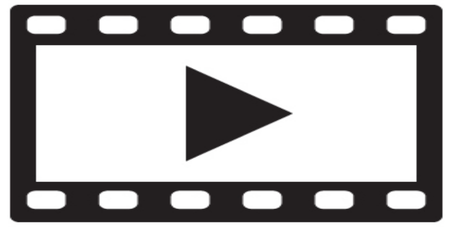




(Cf. thèse G. Jradi, Limoges 2018-22)

Résultat numérique : modèle prédiction-correction





(Cf. thèse G. Jradi, Limoges 2018-22)





Merci pour votre attention

"Le vrai voyageur ne sait pas où il va"
"The real traveler does not know where he is going."
Marcel Proust, 1871-1922, French writer.