# L’ALGÈBRE : UN OUTIL POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES

Sylvain Vermette
Université du Québec à Trois-Rivières

# Plan de l’exposé

- Introduction
  - Problème présenté au niveau primaire (6-12 ans)
- L’enseignement de l’algèbre: un scénario traditionnel
- L’algèbre en contexte de résolution de problèmes
- Le passage de l’arithmétique à l’algèbre
- Résolution et analyse de problèmes
- Période de questions

# La somme de deux nombres est 120 et leur différence est 26. Quels sont ces nombres?

- En secondaire 2 (13-14 ans)

On utilise qu'une seule variable dans la mise en équation puisque l'on raisonne sur la relation existante entre le premier et le second nombre. Par exemple:

Soit x représentant la valeur du grand nombre, alors :

$x + (x – 26) = 120$

$2x = 146$

$x = 73$

ou x représentant la valeur du petit nombre, on obtient :

$x + (x + 26) = 120$

$2x = 94$

$x = 47$

# La somme de deux nombres est 120 et leur différence est 26. Quels sont ces nombres?

- En secondaire 4 (15-16 ans)

On crée un système d'équations et on résout ensuite par comparaison, substitution ou par réduction. Cette dernière méthode serait probablement celle privilégiée dans ce cas-ci. Par exemple, si x correspond à la valeur du grand nombre et y à la valeur du petit nombre, on obtient:

1) $x + y = 120$

2) $x – y = 26$

Donc, $2x = 146$

$x = 73$

Par substitution,

$y = 47$

# La somme de deux nombres est 120 et leur différence est 26. Quels sont ces nombres?

UQTR
Université du Québec à Trois-Rivières

- Au primaire (6-12 ans)

Approche arithmétique par essais et erreurs en raisonnant sur les variations.

« Oui mais la somme des deux nombres + leur différence donne 2 fois le grand nombre »

(somme + écart) = 2 fois le grand nombre

(somme + écart) / 2 = le grand nombre

somme/2 + écart/2 = le grand nombre

# L’enseignement de l’algèbre

- L’algèbre représente un domaine important de l’apprentissage des mathématiques au niveau secondaire. (12-17 ans)
- Traditionnellement, l’enseignement de l’algèbre pouvait être caractérisé ainsi:
  - initiation au langage et vocabulaire algébriques;
  - accent mis dès le départ sur les manipulations algébriques;
  - on doit « maîtriser » l’outil si on veut l’utiliser;
  - une fois les outils introduits, les élèves pouvaient amorcer la résolution d’équations;
  - en dernier lieu, la résolution de problèmes était abordée, celle-ci étant souvent considérée comme un lieu d’application des techniques de résolution développées préalablement.

# L’enseignement de l’algèbre

- Ce scénario soulève de nombreuses difficultés chez les élèves:
  - Peu de signification accordée par les élèves au symbolisme et aux conventions d’écriture, dont ils perçoivent nullement la pertinence;
  - les élèves ne semblent pas davantage outillés, malgré l’accent mis sur le développement de techniques de manipulation et la résolution, pour résoudre des équations ou des problèmes;
  - Un engagement non-réfléchi dans la résolution engendrant de multiples erreurs.

# L’enseignement de l’algèbre

- Ces résultats questionnent les scénarios traditionnels d’introduction à l’algèbre et soulèvent la question des interventions pertinentes à mettre en place lors de ses débuts.
- Quelles situations sont susceptibles de contribuer au développement de raisonnements algébriques chez les élèves et à se construire un sens à l’algèbre?

# L’enseignement de l’algèbre

- Le programme d’études actuel se situe en rupture avec le scénario précédemment décrit.
  - On cherche à favoriser chez l’élève dès la deuxième secondaire l’accroissement de l’habileté à utiliser l’algèbre pour résoudre des problèmes et donc, l’apprentissage ne devrait pas être dominé par la manipulation d’expressions algébriques.
  - On cherche à faire en sorte que les élèves voient la pertinence de l’algèbre, qu’ils accordent un sens au symbolisme algébrique.
  - Les manipulations algébriques découlent du besoin de l’élève de résoudre des équations algébriques qu’il a souvent lui-même conçues.

# L’algèbre en contexte de résolution de problèmes

- L’algèbre doit apparaître comme un nouvel outil efficace permettant de résoudre des problèmes qu’il serait aussi possible de résoudre par l’arithmétique.

- Dans ce contexte, il convient donc de présenter aux élèves des problèmes où l’algèbre devient un moyen de résolution plus efficace que l’arithmétique et ce, afin que ceux-ci puissent apprécier l’importance et l’utilité d’apprendre ce nouvel outil.

# Le passage de l'arithmétque à l'algèbre (Marchand et Bednarz, 2000)



La transition à l'algèbre met en évidence des changements conceptuels importants.

- Résolution arithmétique
  - Les procédures s'organisent généralement autour des données connues du problème, et en essayant de créer des liens entre celles-ci de manière à pouvoir opérer sur du connu.
  - Les quantités inconnues apparaissent en fin de parcours.
- Résolution algébrique
  - Dès le départ on accepte de mobiliser la ou les quantités inconnues, par l'intermédiaire ou non d'un substitut symbolique, opérant alors sur l'inconnue comme si celle-ci était connue.

# Résolution de problèmes

Problème 1

Trois raquettes de tennis et 4 raquettes de badminton coûtent 184$. Quel est le prix d’une raquette de badminton si celle-ci coûte 3$ de moins qu’une raquette de tennis ?

## Problème 1

Une approche algébrique

- Si x représente le prix d'une raquette de tennis, alors :
  - $3x + 4(x - 3) = 184\$$
  - $3x + 4x - 12 = 184\$$
  - $7x = 196$, donc $x = 28$
  - Ce qui nous permet de déduire que le prix d'une raquette de badminton est de 25$, soit 3$ de moins que le prix d'une raquette de tennis.
- Si x représente le prix d'une raquette de badminton, alors :
  - $3(x + 3) + 4x = 184\$$
  - $3x + 9 + 4x = 184\$$
  - $7x = 175$, donc $x = 25$
  - Le prix d'une raquette de badminton est de 25$.

# Problème 1

<u>Une approche arithmétique</u>

- Imaginons substituer une raquette de tennis par une raquette de badminton en raisonnant l'impact sur la valeur totale des articles :
  - 3 fois le prix d'une raquette de tennis + 4 fois le prix d'une raquette de badminton = 184$
  - 2 fois le prix d'une raquette de tennis + 5 fois le prix d'une raquette de badminton = 184 - 3$
  - 1 fois le prix d'une raquette de tennis + 6 fois le prix d'une raquette de badminton = 181 – 3$
  - 0 fois le prix d'une raquette de tennis + 7 fois le prix d'une raquette de badminton = 178 – 3$

# Problème 1

Une approche arithmétique

- Pour conserver l'égalité, à chaque substitution d'une raquette de tennis au profit d'une raquette de badminton, il faut réduire la valeur totale des articles de 3$, car une raquette de tennis vaut 3$ de plus qu'une raquette de badminton. En poursuivant ainsi, on arrive à :
  - 7 fois le prix d'une raquette de badminton = 184$ - (3 x 3$) = 175$
  - Le prix d'une raquette de badminton = 175/7 = 25$

Problème 2

Une troupe de danse donne son spectacle annuel ce soir. Tous les billets ont été vendus à l'avance et le concierge doit maintenant organiser la salle. S'il place 8 chaises par rangée, 3 spectateurs n'auront pas de chaises. S'il met 9 chaises par rangée, il restera 27 chaises disponibles. Combien de personnes attend-on à ce spectacle ?

# Problème 2

<u>Une approche algébrique</u>

- Si x représente le nombre de rangées, alors :
  - $8x + 3 = 9x - 27$
  - $30 = x$
  - Donc, par substitution, on déduit que 243 personnes sont attendues à ce spectacle.
- Des difficultés possibles:
  - Ce n'est pas un problème de partage inéquitable…on n'a pas le total! Traduire la situation à l'aide d'une équation peut causer des difficultés, notamment au niveau de l'égalité qui doit être respectée.
  - La relation existante entre le nombre de chaises, le nombre de rangées et le nombre de personnes. D'ailleurs, on doit trouver le nombre de rangées pour être en mesure de trouver le nombre de personnes.

# Problème 2



## Une approche arithmétique

- En plaçant une personne de plus par rangée, nous avons besoin de trois rangées pour placer les 3 spectateurs qui n’avaient pas de place et il reste encore 27 chaises disponibles soit une chaise pour chacune des 27 rangées restantes.
- Il y a donc 30 rangées, 3 rangées complètes et 27 autres avec une chaise disponible.
- Ainsi, à 9 spectateurs par rangée, il y aurait 270 spectateurs si la salle était complète, mais puisqu’il y a 27 chaises disponibles, il y aura 243 personnes à ce spectacle.

Problème 3

Des enfants qui participent à un camp de jour décident de se partager un certain nombre de macarons afin de les vendre pour financer une activité. Ils calculent qu'en partageant la boîte de macarons entre les participants de façon égale, chaque enfant recevrait 7 macarons et il en resterait 5 dans la boîte. Cependant, au moment de faire le partage, trois autres enfants se sont ajoutés au groupe. Chacun d'entre eux avait deux macarons en leur possession. Il y avait maintenant suffisamment de macarons pour que chacun en ait 6 à vendre. Combien de participants et de macarons y a-t-il après l'arrivée des trois retardataires ?

## Problème 3

<u>Une approche algébrique</u>

- Soit x représentant le nombre de personnes au départ, alors :
  - $7x + 5 = 6(x + 3) - 6$
  - $7x + 5 = 6x + 12$
  - $x = 7$
- ou x représentant le nombre de personnes à la fin, on obtient :
  - $7(x - 3) + 5 = 6x - 6$
  - $7x - 16 = 6x - 6$
  - $x = 10$

Par substitution, on obtient qu'il y avait 54 macarons au départ et donc, il y avait 60 macarons suite à l'arrivée des trois retardataires.

# Problème 3

- Des difficultés possibles:
  - Encore une fois, ce n’est pas un problème de partage inéquitable…on n’a pas le total! Le problème met en jeu des transformations et donc, traduire la situation à l’aide d’une équation peut causer des difficultés, notamment au niveau de l’égalité qui doit être respectée.
  - La nature des relations (liens multiplicatifs et additifs).
  - Déroulement temporel.
  - Le nombre de personnes et de macarons est variable.

## Problème 3

Université du Québec à Trois-Rivières

Une approche arithmétique

- Il manque 7 macarons pour que chacun des trois retardataires en ait six. Donc, ceci signifie qu’il y avait 7 personnes au départ…chacun d’eux donnant un macaron aux retardataires de sorte que tout le monde ait 6 macarons.
- À la fin, il y avait donc 10 personnes et 60 macarons.

# Des questions?

Merci!

sylvain.vermette@uqtr.ca

# Référence


- Marchand, P. et Bednarz, N. (2000). Développement de l’algèbre dans un contexte de résolution de problème. Bulletin AMQ, 40(4), 15-25.