

UQTR



Université du Québec
à Trois-Rivières

La nature des situations d'enseignement utilisées par de futurs enseignants de mathématiques pour contextualiser et expliquer la division de fractions

Sylvain Vermette
Université du Québec à Trois-Rivières

Plan de l'exposé

- Contexte
- Difficultés conceptuelles dans l'apprentissage de la division de fractions
- Défis de l'enseignement de la division de fractions
- Questionnement
- Méthode de collecte de données et participants
- Analyse des résultats
- Discussion et période de questions

Contexte

- Le domaine des nombres rationnels est traditionnellement difficile pour les élèves du secondaire au Québec (12-17 ans)
 - Les difficultés rencontrées par les élèves lors des apprentissages reliés aux opérations sur la notion de fraction sont régulièrement soulignées dans des recherches.
 - Bien que la plupart des élèves finissent par apprendre les algorithmes spécifiques aux différentes opérations qui leur sont enseignés, il n'en demeure pas moins que leur compréhension conceptuelle reste dans bien des cas déficiente.

Contexte

- Dans ce contexte, faire des mathématiques se limite souvent à une gestion de procédures mémorisées.
 - Ex: Les opérations sur les fractions selon le site internet [allô prof](#) (organisme d'aide aux devoirs qui offre gratuitement ses services à tous les élèves du primaire et du secondaire du Québec).

Contexte

Alain veut trouver combien de verres de $\frac{3}{4}$ de litre il peut remplir avec 4 litres.
Voici sa démarche :

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 4$$

Alain conclut qu'il peut remplir $5\frac{1}{4}$ verres.

L'enseignant intervient :

« C'est faux! La réponse est $5\frac{1}{3}$ verres. Il faut faire :

$4 \div \frac{3}{4} = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ et donc, $5\frac{1}{3}$ verres »

Deux sens sont propres à la division:

- Le sens *partage*
 - Dans ce type de problème, on partage une quantité également entre un nombre connu de groupement. Ici, c'est la valeur d'un groupement qui est recherchée.
- Le sens *groupement*
 - Contrairement au sens précédent, ce n'est plus la valeur d'un groupement qui est recherchée, mais plutôt le nombre de groupements d'une valeur donnée.

Difficultés conceptuelles dans l'apprentissage de la division de fractions



Tirosh (2000) a regroupé les principales difficultés relatives à la division de fractions en trois grandes catégories:

- 1^{ère} catégorie
 - Erreurs qui découlent d'une utilisation erronée de l'algorithme de calcul
 - Ces difficultés incluent, par exemple, l'inversion du dividende au lieu du diviseur ou l'inversion du dividende et du diviseur avant de procéder à la multiplication des numérateurs ensemble et des dénominateurs ensemble.
 - On explique généralement ces difficultés comme résultant de la mémorisation de l'algorithme.

Difficultés conceptuelles dans l'apprentissage de la division de fractions

■ 2^e catégorie

- Erreurs qui résultent d'intuitions propres à la division
 - Passage des opérations sur les nombres naturels aux opérations sur les fractions et interprétation de la division en utilisant principalement un modèle « primitif » faisant intervenir le sens partage
 - Ce modèle impose en quelque sorte trois contraintes du fonctionnement typique de l'opération de division avec les nombres naturels : (a) le diviseur doit être un nombre entier, (b) le diviseur doit être inférieur au dividende et (c) le quotient doit également être moindre que le dividende.
 - La prédominance de ce modèle limite la capacité des élèves et des futurs enseignants à conceptualiser et à répondre correctement à des problèmes de division impliquant des fractions.

Difficultés conceptuelles dans l'apprentissage de la division de fractions

- 3^e catégorie
 - Erreurs qui découlent à la fois d'une compréhension limitée du concept de fractions et de la connaissance inadéquate liée aux propriétés des opérations
 - Par exemple, les élèves peuvent penser que la division est commutative et, par conséquent, croire que $1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ puisque $1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$.

Défis de l'enseignement de la division de fractions

- Il est reconnu que l'enseignement du sens de la division de fractions constitue un défi de taille pour les enseignants et leurs formateurs en enseignement des mathématiques. (Lessard, 2011)
- Ce défi soulève de telles difficultés d'enseignement qu'il devient possible de croire que de nombreux enseignants puissent se « replier » sur un enseignement systématique de l'algorithme et sur le repérage de mots clés en contexte de résolution de problèmes écrits.

Questionnement

- Dans le but de faire ressortir les caractéristiques de situations proposées par de futurs enseignants québécois pour enseigner la division de fractions, une étude a été faite auprès de quatre étudiants en deuxième année de formation au programme du baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire de l'Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR)

Méthode de collecte de données et participants



- Au Québec, l'obtention du brevet en enseignement des mathématiques au secondaire nécessite une formation universitaire de quatre ans.
- À l'UQTR, le premier cours de didactique concerne le domaine de l'arithmétique.
- Dans le cadre de ce cours de didactique, chaque étudiant se voit attribuer un concept de façon aléatoire.
 - Les étudiants ont d'abord deux semaines pour élaborer une leçon portant sur le concept en question.
 - Ensuite, dans le cadre d'une présentation orale, les étudiants simulent un cours qu'ils auraient l'occasion de donner au secondaire. Au cours de cet exercice, les étudiants doivent présenter le concept, comme s'ils étaient en présence d'élèves du secondaire.

Méthode de collecte de données et participants

- Après que les différents sens de la fraction aient été abordés à travers des contextes de comparaison, d'addition, de soustraction et de multiplication de fractions, un étudiant par cohorte (4) s'est vu associer le concept de division de fractions pour l'enseignement à des élèves de première secondaire (12-13 ans).
- La seule consigne donnée à ces quatre étudiants était que les situations proposées devaient favoriser le développement d'une bonne compréhension du concept chez les élèves en leur permettant de l'utiliser et de le transposer dans le cadre de situations signifiantes pour eux.

Méthode de collecte de données et participants

- Les sens partage et groupement de la division avaient été abordés préalablement avec des nombres naturels.
- Aucune consigne n'a été donnée explicitement pour le travail quant à la contextualisation des différents sens de l'opération et aux nombres mis de l'avant, bien qu'une attention soit généralement portée à ces enjeux didactiques dans le cadre du cours.

Analyse des résultats

- Les résultats montrent que les quatre étudiants sont allés au-delà d'un enseignement axé uniquement sur les procédures de calculs au profit du développement d'une signification conceptuelle.
- Ces derniers ont tous mis de l'avant des situations de fractionnement impliquant le sens « partie d'un tout » de la fraction et ce, dans le but de donner sens au concept en question et de faire découvrir que diviser revient à multiplier par l'inverse.
- Pour trois étudiants, les situations de fractionnement se sont limitées à deux cas particuliers.

- 1^{er} cas : le dividende est une fraction et le diviseur un nombre entier (ex: $8/9 \div 4$).
 - Ici, la division sens partage est mise de l'avant.
 - Ex: Un étudiant aimerait partager équitablement le $8/9$ de sa pizza entre 4 de ses amis. Quelle portion de la pizza chaque ami recevra-t-il?
 - Les trois étudiants se sont limités à des exemples où le numérateur de la fraction est un multiple du diviseur.

- 2^e le cas: le dividende est un nombre entier et le diviseur une fraction (ex: $18 \div 1/3$).
 - Ici, la division sans regroupement est mise de l'avant.
 - Ex: Un coureur veut parcourir une distance totale de 18 km. Sachant qu'il aimerait parcourir $1/3$ de km chaque jour, en combien de journées y parviendra-t-il ?
- Deux étudiants se limitent à des problèmes où le numérateur de la fraction est 1.

- Cela dit, est-il possible de donner du sens à une division de fractions pour des cas plus complexes?
- Dans ce qui suit, deux problèmes mis de l'avant par le quatrième étudiant pour chacun des sens de la division sont présentés.
 - Tout comme pour les exemples proposés par les trois premiers étudiants, les situations mises de l'avant par le quatrième étudiant s'inscrivent dans des situations de fractionnement où le sens « partie d'un tout » de la fraction est mis en valeur.
 - Les situations mises de l'avant illustrent le résultat de l'algorithme et démontrent qu'il est possible d'aller au-delà des cas représentés précédemment afin de donner du sens à une division de fractions.

La sens partage de la division

UQTR



Université du Québec
à Trois-Rivières

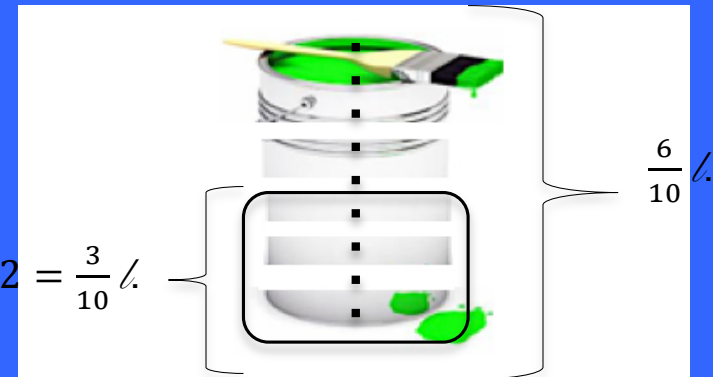
Problème

On souhaite repeindre $\frac{2}{3}$ de la surface d'un mur intérieur avec un restant de pot de peinture contenant $\frac{3}{5}$ litre. Si on répartit de façon égale la peinture disponible, de combien de litres de peinture aurait-on eu besoin si on avait plutôt voulu repeindre le mur en entier?

Comme il s'avère difficile de répartir équitablement $\frac{3}{5}$ litre de peinture sur $\frac{2}{3}$ de mur, compte tenu que les numérateurs ne se divisent pas de façon entière, il faut alors trouver une fraction équivalente à $\frac{3}{5}$ dont le numérateur serait un multiple de 2 comme $\frac{6}{10}$.



$$\frac{3}{5} \text{ L} \div 2 = \frac{3}{10} \text{ L}$$



Répartir uniformément $\frac{3}{5}$ litre de peinture sur $\frac{2}{3}$ de mur revient donc à répartir $\frac{6}{10}$ litre de peinture sur $\frac{2}{3}$ de mur. Nous pouvons donc déduire que chaque tiers de mur sera recouvert par $\frac{3}{10}$ litre de peinture.

$\frac{2}{3}$ de la surface du mur recouverte



Comment donner sens au quotient obtenu soit d'illustrer la multiplication par l'inverse $3/5 \div 2/3 = 3/5 \times 3/2 = 9/10$?

- Un tiers du mur requiert $3/10$ litre de peinture
- Rappelons que dans le sens partage de la division c'est la valeur d'un groupement qui est recherché
- Dans ce cas-ci, peindre toute la surface du mur soit une surface 3 fois plus grande nécessiterait alors $3 \times 3/10$ litre = $9/10$ litre de peinture.

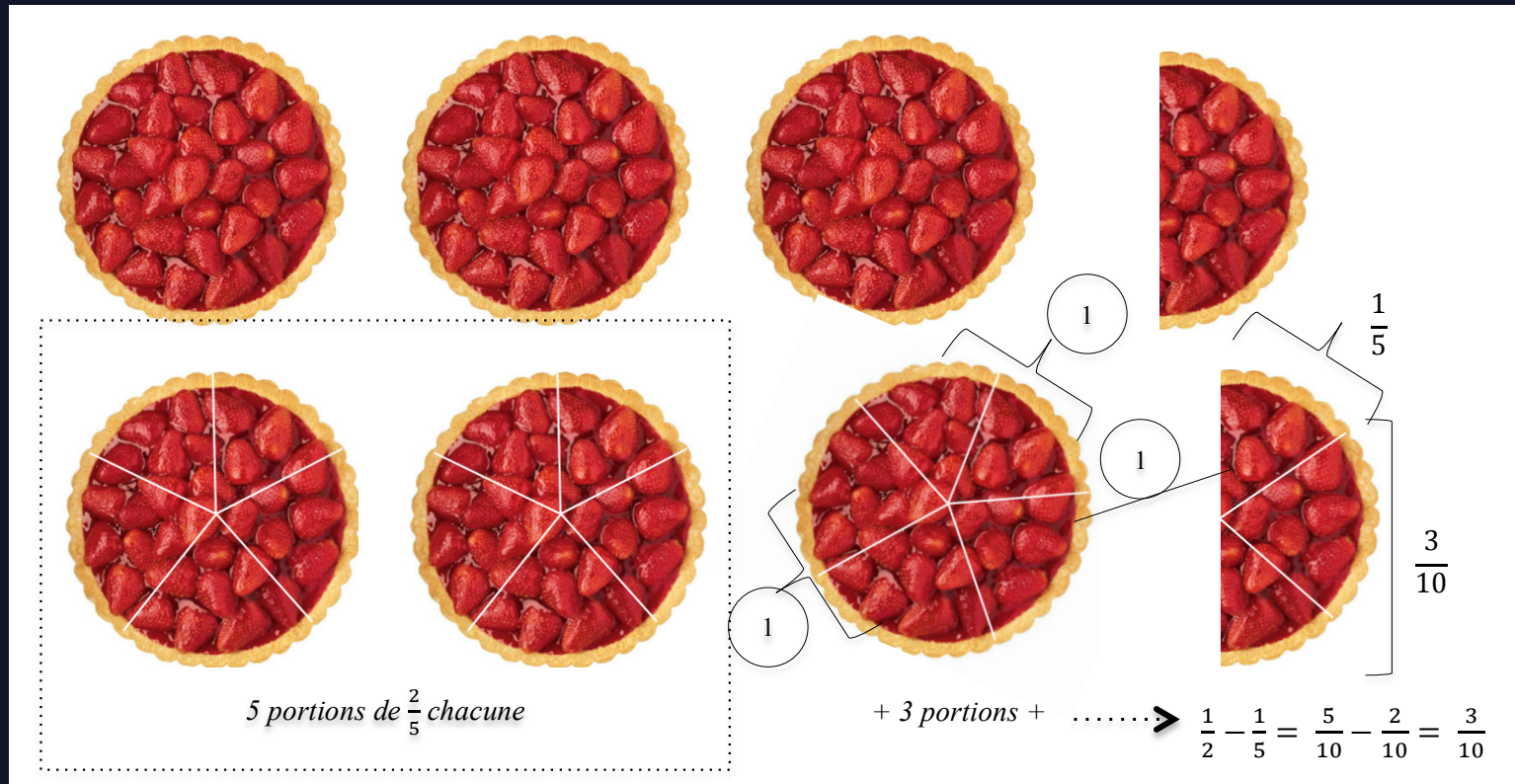
Le sens groupement de la division

Problème

Julie veut savoir le nombre de portions de $\frac{2}{5}$ de tarte que l'on peut créer à partir de $3 \frac{1}{2}$ tartes ?

*À noter que l'écriture $3 \frac{1}{2}$ correspond à une notation utilisée au Québec afin de désigner un nombre fractionnaire soit une expression numérique formée d'un nombre naturel appelé la partie entière et d'une fraction inférieure à 1 appelée la partie fractionnaire. Le nombre fractionnaire équivaut ici à $3 + \frac{1}{2}$.

Nous souhaitons faire des regroupements de $\frac{2}{5}$ de tarte, alors divisons chaque tarte en 5 pointes congrues. Nous avons 3 tartes et demie :



- Avec les 2 premières tartes, il est possible de créer 5 portions de $\frac{2}{5}$ de tarte chacune.
- Trois autres portions sont également créées avec la 3^e tarte et un morceau de grosseur $\frac{1}{5}$ provenant de la demi-tarte.
- Il reste alors $\frac{3}{10}$ de tarte, mais il faut $\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{10}$ de tarte pour former une portion.
 - Ayant 3 dixièmes/4 dixièmes, on a l'équivalent de $\frac{3}{4}$ d'une portion supplémentaire. Donc, $3 \frac{1}{2} \div \frac{2}{5} = 8 \frac{3}{4}$.

Conclusion

- Les résultats montrent que les situations proposées par trois des futurs enseignants de mathématiques que nous avons observés sont très riches, alors qu'elles dépassent toutes un simple enseignement de l'algorithme et qu'elles témoignent d'un désir de contextualiser la division des fractions.
 - Par contre, ces situations semblent comporter certaines limitations conceptuelles, compte tenu de l'étendue du concept en jeu.
- Le quatrième étudiant expose une conceptualisation plus riche de la division de fractions.
 - Les situations qu'il a proposées se sont avérées plus diversifiées que celles de ses collègues, notamment par une utilisation moins restrictive des fractions aux différentes positions de la division.

Conclusion

- Étant bien conscients du défi que représente l'enseignement de la division de fractions pour les enseignants, nous pensons qu'il est primordial de continuer à réfléchir à des pistes pour enrichir l'expérience d'apprentissage du concept de division de fractions qui sera offerte aux élèves afin de contribuer au développement d'une conceptualisation plus riche de cette opération.

Des questions...

UQTR



Université du Québec
à Trois-Rivières

Merci!

sylvain.vermette@uqtr.ca

- Lessard, G. (2011). Acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage dans la conception et la gestion de situations-problèmes impliquant des nombres rationnels (Thèse de doctorat). Université de Montréal, Montréal.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.