Journée académique « Enseignement des mathématiques en Limousin »

Jeudi 12 janvier 2022 Faculté des Sciences & Techniques à Limoges

Une ingénierie visant la formulation d'une définition de la limite d'une suite en Terminale.

Renaud Chorlay

INSPE de l'académie de Paris – Laboratoire de Didactique André Revuz

Sylvie Alory & Vincent Josse (Lycée La Fontaine, 75016 Paris)

Plan de l'exposé

I. Les paramètres

- a. Les programmes
- b. Des difficultés nombreuses, bien documentées et stables
- c. 40 ans d'ingénieries et d'expériences
- d. Nos choix

II. Aperçus des données de terrains

- a. Survol de l'ingénierie
- b. Aperçu des données recueillies
- c. Quelle(s) trace(s) 6 mois plus tard?

Ouverture : l'histoire des mathématiques, ressource pour la réflexion didactique ?

Les programmes en vigueur au moment de l'expérience (2016-17 et 2017-18) Terminale S

La notion de limite de suite fait l'objet d'une étude approfondie. On prépare ainsi la présentation des limites de fonctions.

Limite finie ou infinie d'une suite.

 \diamond Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.

Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ».

Limites et comparaison.	 Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; u_n tend vers +∞ quand n tend vers +∞; alors v_n tend vers +∞ quand n tend vers vers +∞. 	 On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l. Le théorème dit « des gendarmes » est admis.
Suite majorée, minorée, bornée.	Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.	Ce théorème est admis. Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole . Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues.

Les programmes actuels – Spécialité Mathématiques en Terminale

La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant notamment sur la vision géométrique et sur l'écriture décimale. On explicite ensuite les définitions mais la maîtrise complète du formalisme n'est pas un attendu.

Lors de l'étude d'une suite, on distingue les aspects globaux des aspects asymptotiques. Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

Contenus

- La suite (u_n) tend vers +∞ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (qⁿ) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers +∞.
- Limite de (qⁿ), après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers +∞ d'une suite minorée par une suite divergeant vers +∞.
- Limite en +∞ et en -∞ de la fonction exponentielle.

Des difficultés nombreuses, bien documentées, stables

Pour les suites convergentes (vers un réel L)

$$\forall \, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exists \, n_M \in \mathbb{N} \quad \forall \, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_M \implies L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

- De modèles primitifs qui peuvent faire obstacle à la compréhension de la définition :
 - o Modèles dynamiques / temporels / causaux non reflétés par la définition
 - o Modèles *x-first* non-congruents à la définition *y-first*
- Les difficultés usuelles sur les quantificateurs enchâssés et sur l'implication
- Des croyances erronées :
 - o Réduction monotone grossière
 - o Réduction monotone de la distance à la limite
 - o Limite non-atteinte (valeur seuil, valeur interdite)

Des difficultés nombreuses, bien documentées, stables

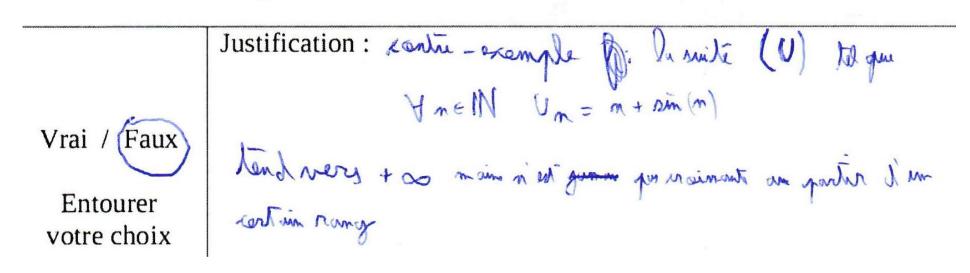
Pour les suites tendant vers $+\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_M \implies u_n \geq M$$

Quelques copies de L1 sciences (Université de Paris, janvier 2018)

Copie n°1:

n°2 Si une suite tend vers plus l'infini, alors elle est croissante (au moins à partir d'un certain rang)



n°3 Si une suite est strictement croissante, alors elle ten	nd vers $+\infty$
---	-------------------

Vrai / Faux

Vrai / Faux $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Entourer votre choix $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{$

n°4 Si $\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_A} > A$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

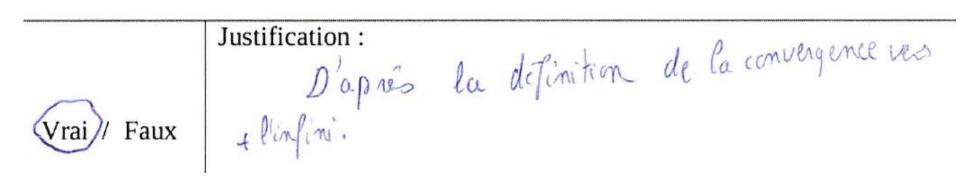
Justification: New que la définition d'une suit que l'infinitéen d'une suit de l'infinitéen d'une suit d'une suit de l'infinitéen d'une suit d'une suit d'une suit d'une s

n°5 Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors la suite ne comprend qu'un nombre fini (peut-être nul) de termes négatifs.

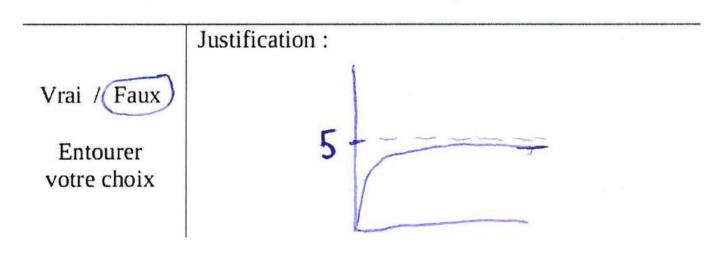
	Justification: par définition lim Un=100 nignifir que
Vrai / Faux	A & ON KN MAN MAN ON ENA A
Entourer votre choix	En si en chaisi o gomme vulum de A en a: EnceIN YneIN n > no => Uno >0
	danc il asciste un nantre frim de terme negatif de agail on ian a partir d'un no le fimi tout la sandpre sant positif
	terms

Copie n°2

n°2 Si une suite tend vers plus l'infini, alors elle est croissante (au moins à partir d'un certain rang)



n°3 Si une suite est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$



n°4 Si ∀ A ∈	\mathbb{R} $\exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_A} > A$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Vra) / Faux	Justification: D'après lethériens la définition des croissance comparer.
n°5 Si $\lim_{n\to\infty}$ nul) de ter	$u_n = +\infty$ alors la suite ne comprend qu'un nombre fini (peut-être mes négatifs.

Justification:

D'apries la définert de la continuité.

Vrai / Faux

Pour les suites tendant vers $+\infty$:

Quelques copies de M1 MEEF maths (février 2018)

Copie n°1:

Vrai / Faux ? Justifiez !

Affirmation A : Si une suite est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$.

Affirmation B: Si une suite tend vers +∞, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.

Affirmation C:

$$\forall\, \mathsf{A} \,\in\, \mathbb{R} \quad \exists\,\, n_{\mathsf{A}} \,\in\, \mathbb{N} \quad u_{n_{\mathsf{A}}} \geq \mathsf{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n \,\to\, +\infty} u_n \,=\, +\infty$$

Affirmation of Vaci,

Pour les suites tendant vers $+\infty$:

Quelques copies de L1 sciences (M1 MEEF maths, février 2018) Copie n°2:

Vrai / Faux ? Justifiez !

Affirmation A : Si une suite est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$.

Affirmation B: Si une suite tend vers +∞, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.

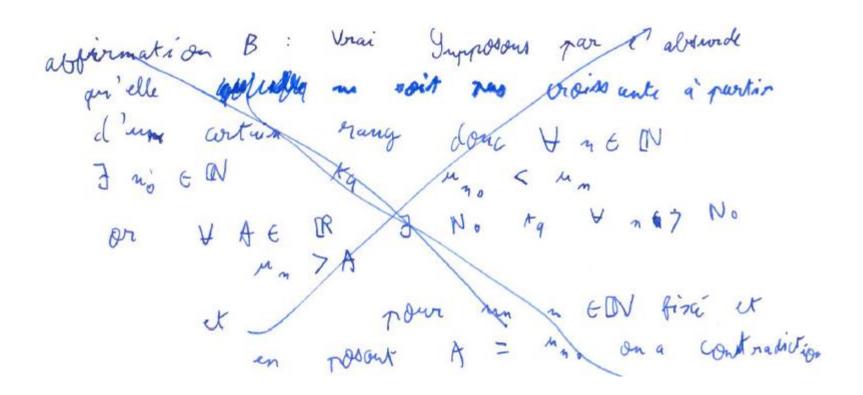
Affirmation C:

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_A \in \mathbb{N} \quad u_{n_A} \ge A \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Pour les suites tendant vers $+\infty$:

Quelques copies de L1 sciences (M1 MEEF maths, février 2018) Copie n°3:

Affirmation B : Si une suite tend vers +∞ , alors elle est croissante à partir d'un certain rang.



Affirmation B Fange: where exemple

un = n + \frac{(-1)^n}{n}

qui n'est pas strictement ordissants

mais glout la limite est + so

Affirmation C:

$$\forall \, \mathbf{A} \in \mathbb{R} \quad \exists \, n_{\mathbf{A}} \in \mathbb{N} \quad u_{n_{\mathbf{A}}} \geq \mathbf{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Affirmation C Faux: Countre escemple

$$u_{M} = (-1)^{M} M$$
 qui w'a pas de limite et

pourtant pour tout A E[R

 $u_{Z} = (-1)^{M} M$ ($u_{Z} = (-1)^{M} M$) = 2 E(A)

 $u_{Z} = (-1)^{M} M$ ($u_{Z} = (-1)^{M} M$) = 2 E(A)

Des difficultés nombreuses, bien documentées, stables

Pour les suites tendant vers $+\infty$

Une proximité conceptuelle trompeuse entre 3 notions :

- (1) Tendre vers $+\infty$
- (2) Ne pas être majorée
- (3) Être croissante (strictement / au sens large, toujours / à partir d'un certain rang)

40 ans d'ingénieries et d'expériences

Dispositifs « expérimentaux » :

- Cottrill & Dubinsky : limite de fonction en 1 point. Semestre expérimental, L1.
- Swinyard : limite de fonction en $+\infty$ et en 1 point. 2 étudiants, 10 séances d'1h30.
- P. Job : suites convergentes. Double objectif : formulation de définition / modification du rapport aux définitions. Niveau Terminale.
- Przenioslo (projet): suites convergentes, niveau Terminale.
- Thomas Lecorre: Niveau Terminale.

Dispositifs en « conditions ordinaires » :

- Robert : suites convergentes. Niveau Term./ L1
- Bloch : suite convergente et suite tendant vers +∞ (flocon de von Koch). Niveau lycée.
- Roh& Lee: suites convergentes. Niveau L1

Nos choix d'ingénierie

Objectifs:

- Faire émerger le besoin d'une définition
- Faire formuler et valider une définition correcte (situation de formulation et de décision)
- Situation « réelle » et (potentiellement) reproductible : 2h en classe entière, dans le cadre du programme.

Objectif ET moyen : prendre conscience des liens précis entre 3 notions distinctes

- (1) Tendre vers $+\infty$
- (2) Ne pas être majorée
- (3) Être croissante (strictement / au sens large, toujours / à partir d'un certain rang)

Sur le plan théorique, en didactique :

F.U.G. et levier méta - tri - proof-generated definition - différenciation conceptuelle

Des choix s'inscrivant dans les programmes actuels

Les buts essentiels du programme de la classe terminale sont de donner aux élèves une bonne intuition des notions fondamentales : convergence, limites, dérivées, intégrales et une solide pratique des calculs afférents.

(...) Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, car il sait qu'il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.

Des choix s'inscrivant dans les programmes actuels

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales à travers notamment la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs ... L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul).

Remarque : les programmes ne mentionnent pas explicitement les situations de construction de définitions parmi les situations d'argumentation.

Plan de l'exposé

I. Les paramètres

- a. Les programmes
- b. Des difficultés nombreuses, bien documentées et stables
- c. 40 ans d'ingénieries et d'expériences
- d. Nos choix

II. Aperçu des données de terrains

- a. Survol de l'ingénierie
- b. Aperçu des données recueillies
- c. Quelle(s) trace(s) 6 mois plus tard?

Ouverture : l'histoire des mathématiques, ressource pour la réflexion didactique ?

Survol de l'ingénierie : les pré-requis

Sur les suites :

- En appui sur le travail de Première : Familiarité avec la notion de "tendre vers" pour une suite ; outils de conjecture graphiques ou calculatoires.
- Chapitre de Terminale sur les suites (sans limites) déjà fait.

Logique:

- ∀ et ∃ isolés
- Quantificateurs enchâssés rencontrés dans :
 - Suite majorée, suite minorée
 - o Suite non majorée : $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad u_{n_M} \geq M$
- Conditions nécessaires / conditions suffisantes

Contexte : (1) expérience de séances "ouvertes" ou "recherche", (2) dans le chapitre de géométrie, attention portée à l'importance des définitions.

Survol de l'ingénierie

o Phase 1 (45 min):

Distribution d'un « herbier » de suites aux propriétés diverses. Tâche de tri (sans justifications) : tend ou pas vers $+\infty$?

Travail en binômes, puis débat en classe entière

Objectifs de la phase 1 :

- Faire reconnaître la nécessité (au moins : l'utilité) d'une définition (au moins : d'une convention explicite) pour lever l'incertitude sur les suites ayant « plusieurs limites »
- Expliciter un « cahier des charges » quant à la définition-à-venir, en termes de propriétés attendues ; en particulier les liens entre les propriétés (1) (2) et (3)
- Fournir un milieu comprenant des exemples et des non-exemples de suites tendant vers +∞, permettant d'invalider des candidats-définitions en phase 3

o Phase 2 (10 min, en binômes) : Demande de rédaction de candidats-définitions

Vue d'ensemble de l'ingénierie

Phase 3 (55 min, cours dialogué) : Validation / invalidation collective de candidats-définitions proposés par les élèves en phase 2

- O Si une définition correcte émerge et est validée par le groupe : institutionnalisation.
- O Sinon: focus imposé par l'enseignant sur la définition formelle de « non majorée » (qui entretient un lien important avec la définition-cherchée : c'est une condition nécessaire, et qui engage un point de vue y-first), que l'on va chercher à renforcer (pour obtenir une condition nécessaire et suffisante). Il y a donc redéfinition de la tâche (par précision) et imposition d'un registre de travail (formel, quantifié), à partir d'une notion choisie comme pivot : « non majoré », i.e. $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad u_{n_M} \geq A$

Relance de la phase : production / évaluation de candidats définitions

- Si une définition correcte émerge et est validée par le groupe : institutionnalisation.
- Sinon : définition donnée par l'enseignant.

Parmi les suites définies ci-dessous, quelles sont celles dont vous diriez qu'elles tendent vers $+\infty$?

Pour tout entier naturel *n*, on pose :

Total total entire Hattares
$$n$$
, on pose :
$$a_n = \frac{n}{100} - 1000 \qquad b_n = 10000 - 1000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n \qquad c_n = \sqrt{\sqrt{n}}$$

$$d_n = (-1)^n \times n \qquad e_n = 10 \times (-1)^n + n \qquad f_n = \left((-1)^n + 1\right) \times n$$

$$g_n = \left((-1)^n + 2\right) \times n \qquad h_n = 1000n - \frac{n^2}{1000} \qquad i_n = \left|\frac{1000}{\cos(n)}\right|$$

Rangez ces suites dans le tableau suivant ; lorsque vous rangez une suite dans la colonne du milieu, notez la raison pour laquelle vous le faites.

Je pense que la suite tend vers +∞	Je ne sais pas	Je pense que la suite ne tend pas vers +∞

Parmi les suites définies ci-dessous, quelles sont celles dont vous diriez qu'elles tendent vers +∞?

Pour tout entier naturel n, on pose ·

$$a_n = \frac{n}{100} - 1000$$

$$d_n = (-1)^n \times n$$

$$g_n = \left((-1)^n + 2 \right) \times n$$

$$b_n = 10000 - 1000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

$$e_n = 10 \times (-1)^n + n$$

$$h_n = 1000n - \frac{n^2}{1000}$$

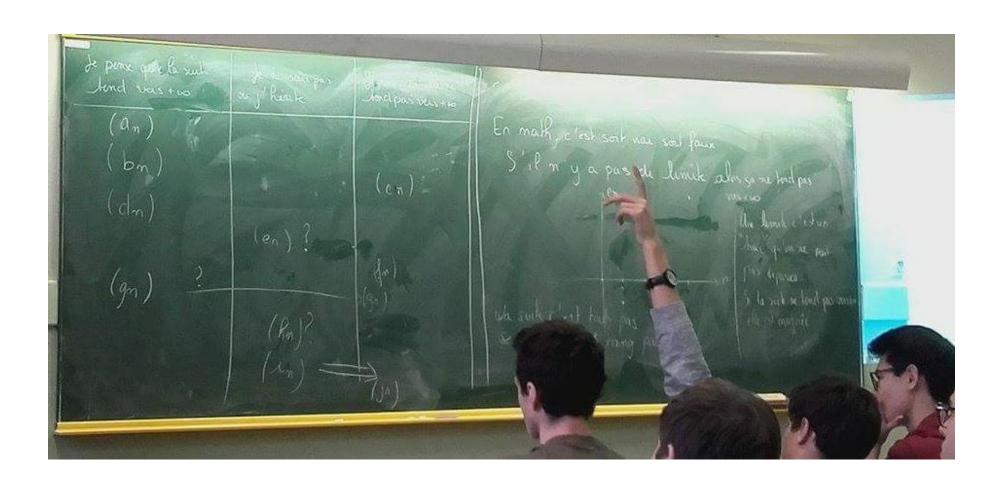
$$c_n = \sqrt{\sqrt{n}}$$

$$f_n = \left((-1)^n + 1 \right) \times n$$

$$i_n = \frac{1000}{\cos(n)}$$

Rangez ces suites dans le tableau suivant ; lorsque vous rangez une suite dans la colonne du milieu, notez la raison pour laquelle vous le faites.

Je pense que la suite tend vers +∞	Je ne sais pas	Je pense que la suite ne tend pas vers +∞



Bilan sommaire:

- Bon engagement des élèves dans les tâches (recherche en binôme, débat dans la classe)
- Dissensus robuste sur le cas des suites à « plusieurs limites »
- Formulation par les élèves du besoin d'une définition pour lever l'incertitude ?
 - → résultats incertains :
 - + reconnaissance d'une lacune dans les connaissances de la classe quant à la notion de limite infinie, et du besoin d'un critère de tri
 - demande de définition, ou demande de convention, ou demande de précision de la questions (« Quelles suites tendent *seulement* vers $+\infty$? »).

Transition avec la phase 2

Nouvel élément inséré dans le milieu :

« Les mathématiciens ont choisi une définition garantissant l'unicité de la limite. Donc la définition cherchée doit être telle que

$$d_n = (-1)^n \times n \quad ou \quad f_n = \left((-1)^n + 1 \right) \times n$$

soient des non-exemples de suites tendant vers $+\infty$.

Par contre,
$$e_n = 10 \times (-1)^n + n$$
 et $g_n = ((-1)^n + 2) \times n$ sont des exemples. »

Pour qu'une suite tende vers + 00, il faut que Vn EN, Un). U. La suite (un) tend vers + 00 si, et seulement si pour hout enties naturel no. VI. EIN unes > un et (un) non majorte La suite (um) tend ven too si quand in tend ventos - un quand elle n'est pas majorée. unite way tout was + +: mike nock on se rappe dat de plus is jamais a althurate. Une suite (Un) qui tend vers too est une suite dont les termes (5) sont croissants de mounière à ce qu'on ne puisse déterminer le dernier terme de cette suite

Ens. : alors, on y va ... (...) on fait des maths. On se concentre à nouveau. Alors Angèle, qu'est-ce que tu penses de la première proposition « pour qu'une suite tende vers $+\infty$ il faut que pour tout n, u(n+1) soit supérieur à u(n) »

Angèle : j'pense que c'est faux parce qu'une suite elle peut être décroissante puis croissante.

Ens. : (...) Est-ce qu'il y en a d'autres qui ont d'autres arguments — il faudrait peut-être noter les arguments, pour évacuer les définitions qui ne vous plaisent pas - ... Mattias

Mattias : si on regarde b_n , on peut voir que la suite elle est croissante, et elle tend vers 10000

Ens. : oui, si on prend les suites qui sont dans l'herbier, elles peuvent servir de ... de quoi ?

Mattias : d'exemple

Ens.: contre-exemple.

Ens. : d'accord, OK. Alors, du coup, la 3, qu'est-ce que vous en pensez ? là je peux effacer ça ... Alors, la 3 c'est : « la suite tend vers +oo quand elle n'est pas majorée ». Rémi ?

Rémi : ça a l'air pas mal parce que ... c'est une condition nécessaire et suffisante.

Ens. : alors, d'abord, est-ce que la phrase c'est une condition nécessaire et suffisante qui est écrite ? ... c'est pas très clair ; le « quand » en mathématiques ... qui est l'auteur de cette phrase ... c'est Rémi ! Rémi, ce « quand » qu'est-ce que tu voulais dire ?

Rémi : je voulais dire « si »

Ens. : alors, tu voulais dire – du coup on va l'écrire : « si u(n) n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$ ». Alors, maintenant qu'elle est écrite de façon à ce qu'on comprenne tout ... quelle est la condition suffisante ; du coup qu'est-ce que vous en pensez ? Isabelle

Isabelle : on a vu dans le cas d'une suite que ça faisait [geste décrivant $(-1)^n \times n$] ... d'un côté ça tend vers l'infini, de l'autre aussi vers -00

Ens. : c'était d_n je crois, dans la liste

Isabelle : elle était pas majorée mais elle tendait pas forcément vers +00, parce qu'elle était pas non plus minorée.

Ens. : alors, il faudrait qu'elle soit minorée pour tendre vers $+\infty$

Isabelle : je pense

Monster barring (Lakatos)

Phase 3 : quelques épisodes significatifs

Ens. : Alors, du coup, il y a un groupe retardataire qui propose une autre définition ; on va l'appeler 6. Alors, il y a écrit ça sur la feuille [copie au tableau] Alors ... Paul, qu'est-ce que vous en pensez de la proposition 6 : « quel que soit ... (tout le monde arrive à l'écrire la phrase, comme l'on écrite Maxendre et Georges ?) pour tout M appartenant à \mathbf{R} il existe n appartenant à \mathbf{N} tel que u_n est plus grand, strictement, que \mathbf{M} »

[Écrit au tableau :]
$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > M$$

Ens. : Alors, qu'est-ce que ça veut dire ça pour la suite ? ... que la suite n'est pas majorée. D'accord, Maxendre et Georges ? On avait dit que c'était ... qu'on allait le retenir parce que c'était une condition ... [les élèves : nécessaire] nécessaire, mais pas suffisante, d'accord ? Donc ça c'est en fait « u(n) non majorée ». Est-ce que l'idée que ce ne soit pas majoré c'est une idée importante pour dire que ça tend vers $+\infty$? Est-ce qu'on le garde ? ... on a dit que, si c'est pas une condition suffisante, ça veut dire qu'il faut quoi ? ... il en faut une autre, il faut qu'on en rajoute une autre, d'accord ?

[Un élève re-propose d'ajouter "et minorée", explicitement pour éliminer $(-1)^n \times n$]

Phase 3 : quelques épisodes significatifs

Ens. : Et comme dit Andréa, il ne faut pas ... qu'elle repasse en dessous. Il faut qu'on l'oblige à faire quoi ?

Elève 1: à rester au-dessus.

Ens. : à rester au-dessus. Donc qu'est-ce qu'il faut changer dans cette phrase ?

Elève 2 : monotone ?

Elève 3: strictement croissante

Ens.: non, on a dit que la monotonie, ce n'était pas une condition pour notre définition. Comment est-ce que vous pouvez le traduire : « il faut qu'elle reste au-dessus » ? Allez, je suis sûr que tout le monde peut le faire. ... Maxime ?

Maxime : u(n+1) supérieur à M

Ens. : alors attend, écris-moi une phrase complète s'il te plaît. [sous la dictée] « pour tout M appartenant à \mathbf{R} , (...) » alors on va l'appeler « n indice M » pour dire qu'il dépend, parce qu'à chaque fois que je choisis un M, c'est pas forcément le même, on est d'accord ? [élève : oui] donc « il existe un indice, un rang ... » [sous la dictée] « u_n supérieur à M, et u_{n_M+1} supérieur à M ».

Phase 3 : quelques épisodes significatifs

Ens.: alors, qu'est-ce que vous en pensez? [silence] ... faites des dessins, faites des dessins... tu voulais l'empêcher de redescendre, hein?

Maxime : mais oui, mais ça veut dire qu'après u(n+1) ça devient u(n) et, le u(n+1) suivant ça sera toujours supérieur...

Ens. : alors, tu es d'accord que comme ça ça va pas, parce que là y'en a qu'un ... est-ce que vous voyez ce que veux faire Maxime ?

Maxime : (...) u(n+x)

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_{n+x} > M$$

Demande de l'enseignante : quantifier les variables nouvellement introduites

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n_M+n} \geq M.$$

Demande de l'enseignante : simplifier

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \ tel \ que \ \forall n > n_M \ u_n > M$$

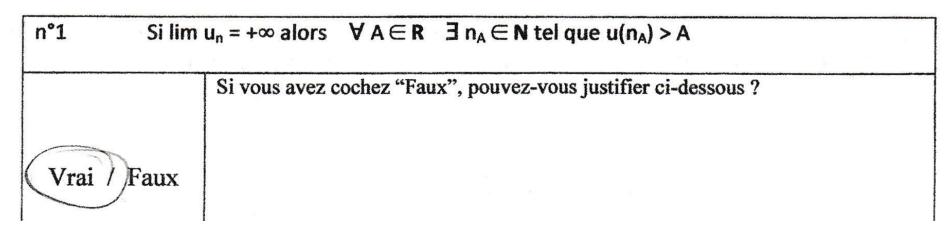
Quelques variantes observées depuis 2017

Novembre 2022

Quelle(s) trace(s) 6 mois plus tard?

Questionnaire de type « Vrai/Faux. Justifier si faux. », mai 2017.

Copie n°1

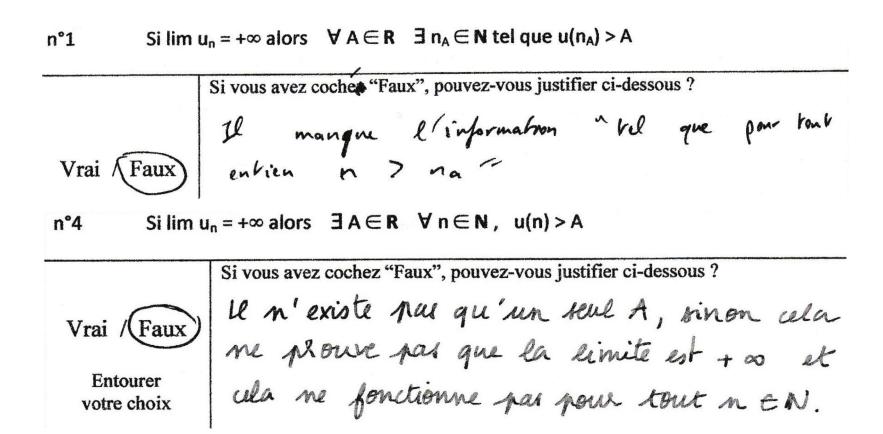


Enoncez ici l'implication réciproque de l'implication n°1	
Pour rappel n°1	Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $u(n_A) > A$
Réciproque: Si VAER FNAEN tel que u(na)>A)	
alors " stavin = +00	
	Si vous avez cochez "Faux", pouvez-vous justifier ci-dessous?
	1 X X X X Id, VAER, 3 nA EM Jul que
Pour la réciproque	At x x x x (A) > A, rosais la suite
Vrai (Faux)	to acille et donc limber + too
Enoncez ici l'implication réciproque de l'implication n°5	
Pour rappel n°5	
Si lim $u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que pour entier n supérieur à n_A $u(n) > A$	
Réciproque: Sit AER, FINAEM tel que Ynzna(nEM),	
u(n) > A, alopes, lying (un) =+00	
Si vous avez cochez "Faux", pouvez-vous justifier ci-dessous?	
	C'est la définition d'une suite qui
Pour la réciproque	
(Vrai) Faux	

Quelle(s) trace(s) 6 mois plus tard?

Questionnaire de type « Vrai/Faux. Justifier si faux. », mai 2017.

Copie n°2 et 3 : élèves de type « correcteur »



Merci pour votre attention

Pour prolonger:

Alory, Chorlay, Josse: Actes CORFEM 2021

Chorlay, R. (2019). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. IJRUME (International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education), 5(3), 267–314.

Annexe 1

- Tendro veus tos, c'est que paux toutes grandes valeurs de m, on dishient un grand résultat, sons profiment que la suite soit crassants.
- · Si Wars < Un, abos Aim Un \$ +00 notes 2 · Yn E IR, Lim Un = +00 · Si n->+00

 Si Un n'est pos majorea, alors Rum Un = +00 n->+00
- (3) Une soute (Un) tend vois + or si et soutement si, VneIN, FielN tel que Un (Un+i
- On rent dire d'une suite qu'elle tend vers + 00 ssi : alle n'est pas majorée et qu'elle est crainante

Pour dute qu'une suite tend vers too, Vn E Nun < un+1. De plus VAER, In EN tel que up>A. (5)

The suite (an) total ver + consi Vn ETN, (an) m'est pas majorie et une autre cordina. O che cordition telle que la suite (an) (telle que) quelquesoit ses variations, si pui dans sor ensemble, sont croissantes et n'admettent qu'err timiterinique, + co.

Pour tout m EIN, une suite tend veus + 00 si et seulement.

Fi elle m'est pas shickement décroissante et et mom mayorisé.

Et sur de très grandes valous, les variations sont régligables.

Soit (um) no une suite tel que sa limite est notée l.

8) # Si \$\frac{1}{2} \times \times

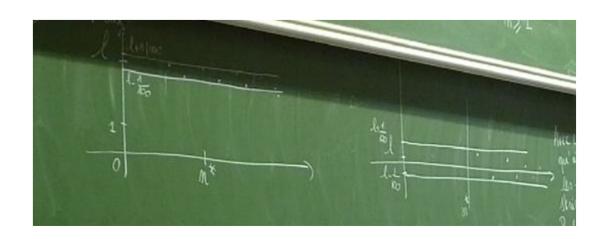
Annexe 2

Ingénierie « Aline Robert » (années 80)

- 1) Considérons les suites de terme général suivant :
 - 1. $u_n = \frac{n^2 25}{2n^2 + 1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).
 - 2. $u_n = \frac{(-1)^n}{20}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).
 - 3. $u_n = \frac{1}{n} \cos n$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).
 - 4. $u_n = \cos n$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 5cm).
 - 5. $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = -1, u_n = 2 \text{ pour tout } n \ge 5.$
 - 6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).
 - 7. $u_n = \cos n \frac{\pi}{6}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).
 - 8. $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).
 - 9. $u_n = n^2 + 1$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 0,5cm).
 - $10.u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ $(n \ge 2)$ (échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).

Après avoir dressé un tableau de valeurs permettant de calculer les 10 premiers éléments de chaque suite, représentez graphiquement chaque suite sur un dessin différent.

- Pouvez-vous classer ces dessins? Expliquez les critères permettant vos classements.
- 3) Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre l et un entier n^* à partir duquel $l \frac{1}{10} \le x_{n^*} \le l + \frac{1}{10}$. Expliquez brièvement votre choix. Même question en remplaçant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{100}$. Mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.
- 4) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier vos réponses par écrit.
 - Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
 - Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.



Ingénierie Roh & Lee (2017)

 ϵ -strip definition A : L is a limit of a sequence when for any ϵ -strip, infinitely many points on the graph of the sequence are inside the ϵ -strip as long as the ϵ -strip is centered at L.

 ϵ -strip definition B : L is a limit of a sequence when for any ϵ -strip, only finitely many points on the graph of the sequence lie outside the ϵ -strip as long as the ϵ -strip is centered at L.

Par exemple, si l'on suppose que la variable æ converge vers zéro, on aura

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right) = M((-1,+1)),$$

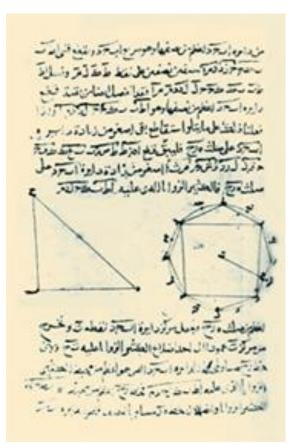
attendu que l'expression $\lim_{x \to \infty} \left(\sin \frac{1}{x} \right) \right)$ admettra une infinité de valeurs comprises entre les valeurs extrêmes -1 et +1.

A.-L. Cauchy, Analyse algébrique, 1821. p.30

Remarque : la notation M((-1,1)) désigne l'ensemble des moyennes pondérées (à coefficients positifs) de -1 et 1, donc tout l'intervalle [-1,1]. Cauchy n'exige donc pas l'unicité de la limite.

La première proposition de la mesure du cercle d'Archimède (3e siècle avant notre ère). Manuscrits grec, arabe et hébreu.

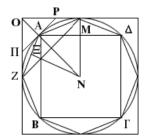






¹ Source : [2] chapitre 7.

PROPOSITION PREMIÈRE. UN cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.





Que $AB\Gamma\Delta$ soit le cercle proposé. Je dis que ce cercle est égal au triangle E.

Que le cercle soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le carré $A\Gamma$, et partageons les arcs en deux parties égales jusqu'à ce que la somme des segments restants soit plus petite que l'excès du cercle sur le pura une figure rectilique qui sera encore plus grande que le triangle (α). Prenons le centre N et menons la

triangle (1, 6); on aura une figure rectiligne qui sera encore plus grande que le triangle (α). Prenons le centre N, et menons la perpendiculaire N Ξ ; la perpendiculaire N Ξ sera plus petite qu'un des côtés de l'angle droit du triangle E. Mais le contour de la figure rectiligne est encore plus petit que l'autre côté de l'angle droit de ce même triangle, puisque le contour de cette figure est plus petit que la circonférence du cercle (1, 1). Donc la figure rectiligne est plus petite que le triangle, ce qui est absurde (β).

Que le cercle soit plus petit que le triangle E, si cela est possible. Circonscrivons un carré à ce cercle, et partageons les arcs en deux parties égales, et par les points de division, menons des tangentes. Puisque l'angle OAP est droit, la droite OP est plus grande que la droite MP, à cause que MP est égal à PA. Donc le triangle PO Π est plus grand que la moitié de la figuré OZAM (γ). Que les segments restants soient tels que PZA et que la somme de ces segments soit moindre que l'excès du triangle E sur le cercle AB Γ Δ . La figure rectiligne sera encore plus petite que le triangle E. Ce qui est absurde, puisque cette figure est plus grande, à cause que NA est égale à la hauteur du triangle, et que le contour de cette figure est plus grand que la base de ce même triangle.

Donc le cercle est égal au triangle E.

Déjà dans les Eléments d'Euclide

Livre X, proposition 1²: Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande est retranchée une grandeur plus grande que sa moitié, puis du reste une grandeur plus grande que sa moitié, et que ceci soit toujours poursuivi, une certaine grandeur restera, laquelle sera plus petite que la plus petite grandeur proposée.

² [1] vol.3, p.87.

G. W. Leibniz (1646-1716)

On s'embarrasse de même dans les Series des Nombres qui vont à l'infini. On conçoit un dernier terme, un nombre infini, ou infiniment petit ; mais tout cela ne sont que des fictions. Tout nombre est fini et assignable, toute ligne l'est de même, et les infinis ou infiniment petits n'y signifient que les grandeurs qu'on peut prendre aussi grandes ou aussi petites que l'on voudra, pour montrer qu'une erreur est moindre que celle qu'on a assignée, c'est à dire qu'il n'y a aucune erreur : ou bien on entend par l'infiniment petit, l'état de l'évanouissement ou du commencement d'une grandeur, conçus à l'imitation des grandeurs déjà formées.

GWL Théodicée, discours préliminaire

"For in place of the infinite or the infinitely small we can take quantities as great or as small as is necessary in order that the error will be less than any given error. In this way we only differ from the style of Archimedes in the expressions, which are more direct in our method and better adapted to the art of discovery", February 1701, Math. Schr. IV, 95–96; transl. in Jesseph (1998).

- J.-L. Lagrange Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toutes considérations d'infiniment petit ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. An 5.
 - 3. Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met x + i, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra f(x-i); et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx + pi + qi^2 + ri^3 + &c.$, dans laquelle les quantités p, q, r, &c., coèfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i.

Il est clair que la forme des fonctions p, q, r, &c. dépendra uniquement de celle de la fonction fx; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i.

4. Cette manière de déduire d'une fonction donnée d'autres fonctions dérivées et dépendant essentiellement de la fonction primitive, est de la plus grande importance dans l'analyse. La formation et le calcul de ces différentes fonctions sont à proprement parler le véritable objet des nouveaux calculs, c'est-à-dire du calcul appelé différentiel, ou fluxionnel. Les premiers géomètres qui ont employé le calcul différentiel, Leibnitz, les Bernoulli, l'Hopital, &c. l'ont fondé sur la considération des quantités infiniment petites de différens ordres, et sur la supposition qu'on peut regarder et traiter comme égales les quantités qui ne diffèrent entre elles que par des quantités infiniment petites à leur égard. Contens d'arriver

par les procédés de ce calcul d'une manière prompte et sûre à des résultats exacts, ils ne se sont point occupés d'en démontrer les principes. Ceux qui les ont suivis, Euler, d'Alembert, &c. ont cherché à suppléer à ce défaut, en faisant voir, par des applications particulières, que les différences qu'on suppose infiniment petites, doivent être absolument nulles; et que leurs rapports, seules quantités qui entrent récliement dans le calcul, ne sont autre chose que les limites des rapports des différences finies, ou indéfinies.

Mais il faut avouer que cette idée, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et sur-tout pour être présentée aux commençans;

(...)

Nous avons vu, dans la Leçon précédente, que la forme du développement peut être différente pour des valeurs particulières de x; mais que, tant que f'(x) ne sera pas infinie, les deux premiers termes de ce développement seront exacts, et que les autres contiendront par conséquent des puissances de i plus hautes que la première, de manière qu'on aura

$$f(x+i) = f(x) + i[f'(x) + V],$$

V étant une fonction de x et i, telle qu'elle devienne nulle lorsque i = 0.

Donc, puisque V devient nul lorsque *i* devient nul, il est clair que, en faisant croître *i* par degrés insensibles depuis zéro, la valeur de V croitra aussi insensiblement depuis zéro, soit en plus ou en moins, jusqu'à un certain point, après quoi elle pourra diminuer; que par conséquent on pourra toujours donner à *i* une valeur telle que la valeur correspondante de V, abstraction faite du signe, soit moindre qu'une quantité donnée, et que pour les valeurs moindres de *i* la valeur de V soit aussi moindre.

Soit D une quantité donnée qu'on pourra prendre aussi petite qu'on voudra ; on pourra donc toujours donner à i une valeur assez petite pour que la valeur de V soit renfermée entre les limites D et - D;