LDAR
LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
ANDRÉ REVUZ

RECHERCHE
EN DIDACTIQUE
DES SCIENCES

Quelles mathématiques à l'université pour surmonter la seconde discontinuité de Klein ? Quelques pistes de cours spécifiques

Nicolas GRENIER-BOLEY
Université de Rouen Normandie
PIA3 100%IDT

31ème colloque CORFEM
4 juin 2025

Université de Paris
CERGY PARIS UNIVERSITÉ
UPEC Connaissance - Action
UNIVERSITÉ PARIS-EST CRÉTEIL VAL DE MARNE
Université de Lille
UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE

100% IDT
INCLUSION,
UN DÉFI,
UN TERRITOIRE

Plan de l'exposé

- Partie 1 : seconde transition de Klein, positionnement général du problème
- Partie 2 : une variété d'efforts de recherche pour tenter de remédier à cette discontinuité
- Partie 3 : un positionnement possible, proposition de quelques pistes pour implémenter des cours (exemple de l'arithmétique)

Partie 1

Seconde transition de Klein, positionnement du problème

Les transitions de Klein (1)

La transition du secondaire à l'université et la transition de l'université au secondaire sont des défis pour les étudiants et les futurs enseignants, mais aussi pour les enseignants universitaires ou les formateurs.

- Chaque transition implique des changements de culture d'enseignement et d'apprentissage et du type de mathématiques concerné. Les défis posés par ces transitions constituent ce que Felix Klein (1872) a appelé une " double discontinuité " ou "double transition".
- La première transition de Klein, ou transition secondaire/supérieur, concerne les problèmes auxquels les étudiants sont confrontés lorsqu'ils entrent à l'université, thème principal de la recherche en didactique des mathématiques de l'enseignement supérieur (Gueudet & Vandebrouck, 2022).

Les transitions de Klein (2)

- Une "seconde discontinuité" advient à la sortie de l’université quand un étudiant qui a étudié les mathématiques universitaires devient enseignant de mathématiques dans le secondaire, d’où l’importance de travailler dans la formation des futurs enseignants les "mathématiques élémentaires d’un point de vue avancé" (elementary mathematics from a higher standpoint) (Klein, 1872)
- Klein a proposé un cours sur les mathématiques de l’enseignement secondaire, vues depuis l’enseignement supérieur qui aborde la seconde transition.
- Les propositions de Klein pour ce cours impliquent que les étudiants ont déjà des connaissances mathématiques assez avancées et savent les "faire fonctionner", c’est-à-dire qu’ils sachent les utiliser de manière flexible et adéquate.

Les transitions de Klein (3)

- En particulier, ces propositions impliquaient qu'ils ne connaissent pas seulement des faits et des techniques, mais qu'ils possèdent des idées adéquates, en réseau et suffisamment avancées pour pouvoir valider et évaluer les résultats de la recherche en mathématiques (de l'époque).

Depuis environ 15 ans, en cohérence avec les objectifs de Klein mais en adaptation avec les étudiants actuels :

- mise en valeur par de nombreux chercheurs de l'importance d'étudier cette seconde discontinuité à différents égards
- développement de recherches consacrées à cette seconde discontinuité sur des domaines et problématiques variés

Quelles raisons pour cette transition ?

- Pendant leur formation initiale, les futurs enseignants ne voient pas de lien entre leurs études universitaires et leur future profession (Cooney & Wiegel, 2003 ; Hefendehl-Hebeker, 2013)
- Les enseignants du secondaire ne perçoivent pas non plus la pertinence de leurs études universitaires pour les différents aspects de l'enseignement en classe (Wasserman et al., 2023), oubliant ou ne reconnaissant pas les mathématiques apprises à l'université (Cooney & Wiegel, 2013 ; Zazkis & Leikin, 2010)
- Malgré les différences entre pays, l'enseignement universitaire semble globalement inadapté pour remédier à cette transition (Hoffmann & Biehler, 2023)
- Elle est liée aux transpositions didactiques !

Transpositions didactiques externe et interne

La transposition didactique (Chevallard, 1985) :

- Les **savoirs savants** en mathématiques, organisés en textes de savoir sont produits par l'institution regroupant les chercheurs en mathématiques.
- Les **savoirs à enseigner** sont définis par le système scolaire et correspondent au sein d'une institution scolaire donnée au texte qui définit au travers du curriculum le savoir qui doit être enseigné à chaque niveau de classe, par domaines ou thématiques.
- Les **savoirs enseignés** correspondent aux contenus effectifs d'enseignement proposés aux élèves par l'enseignant. Enfin, les **savoirs appris** correspondent aux apprentissages des élèves.

→ Comment remédier à cette seconde transition ? Avec quelles approches ?

Partie 2

Une variété d'efforts de recherche pour tenter de remédier à cette discontinuité

Un besoin de recherche (1)

"Klein, Pólya et Freudenthal ont tous trois vu l'intérêt d'aider les enseignants à développer des connaissances mathématiques qui vont au-delà du contenu qu'ils vont enseigner et qui sont plus synoptiques que le cours universitaire typique de mathématiques. [...] Les enseignants ont besoin de connaissances et de compétences mathématiques spécialisées qui leur donneront une large perspective du domaine et les équiperont pour travailler avec les élèves. [...] Par conséquent, la question de savoir ce que signifie "mathématiques élémentaires" et la manière dont on peut adopter une position plus élevée pour les considérer devient problématique lorsqu'on sort des mathématiques et certainement lorsqu'on entre dans la didactique des mathématiques. Comment qualifier ce que signifie "élémentaire" en formation des enseignants ? Les chercheurs sont-ils d'accord ? Comment situer ce "point de vue supérieur" à partir duquel des études en didactique des mathématiques peuvent être menées ?" (Kilpatrick, 2008, pp.15-16)

Un besoin de recherche (2)

"La notion de double discontinuité de Klein entre les mathématiques universitaires et scolaires s'est avérée extrêmement fructueuse et peut être considérée, à la fois sur le plan théorique et pratique, comme constituant le cœur de la formation des enseignants de mathématiques. La question de savoir dans quelle mesure la compréhension des "mathématiques élémentaires d'un point de vue avancé" dans le cadre de la formation des enseignants de mathématiques reste ouverte." (Gueudet et al., 2016, p.15)

Un besoin de recherche (3)

Durant la conférence internationale INDRUM2020, différentes recherches liées à cette seconde discontinuité ont été présentées (Hoffmann & Biehler, 2020 ; Planchon & Hausberger, 2020 ; Winsløw, 2020), identification de problématiques cruciales :

- *finding relevant topics with strong epistemological foundation (e.g. congruence, symmetry, integration, proof)*
- *developing collaborations between university teachers and researchers in didactics of mathematics (some might be both) for implementation and analysis*
- *managing to implement it, depending on the context: department of mathematics versus faculty of education*
- *finding a way of dissemination of research results toward mathematics university teachers.*

(Biehler & Durand-Guerrier, 2020, p. 287)

Différents efforts de recherche

→ Développement de nombreuses recherches, notamment à partir de celle de Winsløw et Grønbæk (2014), avec des traditions particulières en Allemagne (Biehler, Hanke, Hefendehl-Hebeker, Prediger,...) ou aux États-Unis (Fukuwa-Connelly, Mejia-Ramos, Wasserman, Weber,...), proposition de "capstone courses" (cours de synthèse) :

- en algèbre (Prediger, 2013)
- en analyse (Winsløw & Grønbæk, 2014 ; Kondratieva & Winsløw, 2018)
- en lien avec les isométries (Hoffmann, 2021)
- en lien avec le théorème fondamental de l'analyse (Planchon, 2022)
- en lien avec les groupes (Rolland, en cours)

Un numéro de ZDM paru en 2023 (1)

Classification des recherches menées sur cette transition en 4 catégories (Wasserman et al., 2023, p. 729) :

1) **Renforcer les liens entre les contenus de l'enseignement secondaire et supérieur** (dans un sens, ou dans les deux)
   → Exemple : pour les notions d'inverse et d'équivalence, renforcement des liens université/secondaire (Cook et al.)
2) **Mettre en valeur les pratiques enseignantes en mathématiques** pour préparer les futurs enseignants à permettre à leurs élèves d'accéder à des activités mathématiques riches et porteuses de sens
   → Exemple : pratique disciplinaire de la preuve pour aider les futurs enseignants à intégrer le raisonnement et la preuve dans leur enseignement (Buchbinder & McCrone)

Un numéro de ZDM paru en 2023 (2)

3) **Insister sur la manière de structurer des cours universitaires** ou la manière dont les étudiants les vivent afin que les pratiques sous-jacentes puissent inspirer les futurs enseignants pour leur propre pratique

→ Exemple : cours orientés sur la démarche d'investigation pour façonner les perceptions des futurs enseignants à diverses conceptions de la dérivée (importance de la communication, de la recherche et de l'argumentation en classe dans le cadre de leur propre enseignement, selon Apkarian et al.)

4) **Tisser des liens étroits entre idées ou concepts mathématiques et didactiques** au sein de cours universitaires

→ Exemple : analyse de dilemmes en probabilités entre futurs enseignants et mathématiciens (Pinto & Cooper)

Le séminaire FUMME (2021-2022) : création

En réponse aux besoins et enjeux, décision de créer le séminaire FUMME, co-porté par l'IMAG (Durand-Guerrier) et le LDAR (G.-B.) pour traiter deux problèmes concrets liés aux objectifs de Klein :

- mettre en évidence pour les étudiants des liens de différentes natures entre les mathématiques universitaires et les mathématiques scolaires
- permettre aux futurs professeurs l'accès à des outils efficaces pour leur travail didactique quotidien

Le séminaire FUMME (2021-2022) : principes

Ce séminaire suivait trois principes :

- créer un espace pour les chercheurs de tous pays intéressés par les questions sous-jacentes pour exposer, discuter, découvrir, se former
- donner à voir différents contextes nationaux, différentes approches théoriques ou méthodologiques, sur différents domaines ou notions mathématiques
- inviter à la fois des jeunes chercheurs et des chercheurs confirmés à exposer

Une diversité de contextes

- Allemagne (3) : Thomas Bauer et Eva Müller-Hill, Lisa Hefendehl-Hebeker, Max Hoffmann
- Canada (1) : Rina Zazkis
- Corée du Sud (1) : Oh Nam Kwon
- Danemark (1) : Carl Winsløw
- États-Unis (1) : Nick Wasserman
- France (3) : Virginie Deloustal-Jorrand et Zoé Mesnil, Nicolas Grenier-Boley, Gaëtan Planchon
- Hongrie (1) : Katalin Gosztonyi
- Italie (1) : Laura Branchetti
- Mexique (1) : Avenilde Romo

⇒ 155 chercheurs de 34 pays.

⇒ édition d'un numéro spécial RDM (4 volumes), co-édité par Biehler, Durand-Guerrier, Grenier-Boley et Ouvrier-Buffet en 2025-2026.

Partie 3

Un positionnement possible, proposition de quelques pistes pour implémenter des cours (exemple de l'arithmétique)

Quelques constats (en France)

- Peu de traces des mathématiques universitaires dans les pratiques enseignantes, surtout chez les novices : focalisation fréquente sur la technique au détriment du sens
- Complexité des pratiques enseignantes (Robert & Rogalski, 2002) : faire des choix cognitifs en classe et maintenir une atmosphère de travail pour tous les élèves, d'où des compromis sur les tâches proposées
- Travail "local" des enseignants novices : pas de stabilité de leurs pratiques, manque de vision globale

D'où un double enjeu :

- permettre aux futurs enseignants de faire des mathématiques, de faire faire des mathématiques ayant du sens, mais adaptées aux élèves
- développer des pratiques assez robustes pour faire face aux compromis liés aux curricula et à l'expérience de classe

Théorie de l'Activité : bref résumé

- Les activités des élèves en classe sont la source principale de leurs apprentissages : étude des tâches, des déroulements organisés par l'enseignant
- Les apprentissages des élèves sont favorisés par trois conditions :
  - chaque élève est par moment en autonomie dans certaines tâches organisées par l'enseignant
  - chaque élève peut prendre part à un travail collectif par la médiation de l'enseignant
  - chaque élève peut accéder à la conceptualisation à laquelle on associe les apprentissages
- On étudie les pratiques des enseignants, au-travers de plusieurs composantes.

Le relief d'une notion

Pour étudier l'enseignement d'une notion, on établit une référence appelé "relief de la notion" qui est le croisement de trois types d'études entrecroisées :

- une étude des programmes (curriculum)
- une étude des spécificités épistémologiques et mathématiques de la notion, dont les caractères outil/objet (Douady, 1987), les mises en fonctionnement, les registres de représentation (Duval, 2006) et le champ conceptuel (Vergnaud, 1991)
- une étude cognitive des difficultés des élèves/étudiants

Ainsi déterminé, le relief d'une notion est tout à la fois une **référence** pour le chercheur, pour l'enseignant qui souhaite concevoir un scénario.

Double institutionnalisation (1)

Nous rappelons la notion de " double institutionnalisation ", en partie mathématique, en partie didactique (Pézard, 1985).

- Les étudiants travaillent sur le thème mathématique à apprendre, comme le chercheur souhaite qu'ils fassent travailler leurs élèves, avec des activités spécifiques.
- Ensuite, le formateur (ici le chercheur) institutionnalise à la fois :
  - les notions mathématiques en jeu, avec un exposé des connaissances adapté au niveau des étudiants
  - ce qu'il faut retenir de l'enseignement choisi, avec des éclaircissements sur les choix effectués.

L'objectif est que les étudiants identifient les effets de l'enseignement sur leurs propres apprentissages et qu'ils aient la possibilité de les transposer ultérieurement dans leurs propres pratiques pour leurs élèves.

Cela peut conduire les futurs enseignants à prendre conscience des problèmes liés aux mathématiques et à l'enseignement (avec les mots pour les dire et les décrire).

Double institutionnalisation (2)

C'est un des **leviers** que nous proposons : il tire parti du travail des étudiants, organisé (explicitement) sur la base d'hypothèses didactiques sur l'apprentissage, par la mise en évidence des éléments qu'ils ont vécus et qui pourraient être transposés aux élèves.

Principes de cours pour les futurs enseignants

Un double objectif : **enrichir** les connaissances en mathématiques et en didactique. Avec trois hypothèses (à tester et/ou admises) :

- Le dispositif peut favoriser le fait que **les futurs enseignants conservent davantage de traces de l'enseignement universitaire**, sur le savoir enseigné, grâce à la mise en discussion et au partage d'une certaine organisation de ce savoir et de ses mises en fonctionnement, et aussi sur les relations entre le savoir à enseigner et les choix d'enseignement, à expliciter.
- Grâce à la **double institutionnalisation** en particulier, les étudiants auront des moyens de « transférer » à leurs futures séances certains des choix d'enseignement discutés, explicités
- Les **modalités d'enseignement** choisies et notamment l'appui sur le « vécu » d'étudiants constituent un levier pour ces apprentissages (ZPD…)

Plusieurs leviers !

- Double institutionnalisation
- Leur faire expérimenter eux-mêmes des activités d'enseignement : présentation de théorèmes, animation d'exercices pour leurs collègues, qui conduit à une réflexion *a posteriori*, première étape dans la prise de conscience du rôle d'une activité mathématique spécifique destinée à une classe. La qualité des formulations et des explications peut ainsi apparaître comme nécessaire, alors que nous en avons parfois moins besoin pour rédiger une solution "pour soi-même".
- Usage du levier méta (Robert & Robinet, 1996)
- Mise en valeur de formulations intermédiaires
- L'importance de dégager des méthodes (techniques)

Plusieurs leviers !

- Choix d'une définition et sa mise en mot, en articulation avec l'activité de preuve
- Manifester des liens avec les connaissances anciennes
- Usage d'une approche épistémologique
- …

Cf. Grenier-Boley (RDM numéro spécial, à paraître)

L'exemple de l'arithmétique

Afin d'illustrer comment utiliser ces principes et leviers pour ces cours pour les futurs enseignants, nous allons prendre l'exemple de la future implémentation d'un cours d'arithmétique en Master MEEF première année. En appui :

- Sur un article théorique (Grenier-Boley & Robert, 2024)
- Sur une future brochure à paraître sur l'arithmétique (Grenier-Boley, Pariès, Pilorge & Robert) "Faire de l'arithmétique, faire faire de l'arithmétique"
- Sur un groupe de travail national "Fcube"="faire, faire faire"

Nous donnons des éléments de relief des notions d'arithmétique, en lien avec celles enseignées dans le secondaire, des exemples d'activité.

Les programmes

Cycles ou classes	Multiple propriétés	Diviseur propriétés	Division euclidienne	Critères de divisibilité Parité	Nombres premiers	PGCD PPCM	Nombres premiers dans leur ensemble	Congruence
Cycle 3			Dans N	2,3,5,9, 10				
Cycle 4	X	X	X	2,3,5,9	X			
Fin de 3ème	X Somme multiples	X	X	2,3, 4, 5, 9	Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers	Recherche implicite - modélisation		
Seconde	X	X	X	2,3, 4, 5, 9 Expression algébrique de la parité	X Déterminer si un nombre est premier (en testant jusqu'à …)	définitions		
Maths expertes	PPCM	PGCD	Dans N et dans Z (démonstration)	2, 3, 4, 5, 9, 11, 7 Démonstrations	X Crible d'Eratosthène		X	X

Relief des notions d'arithmétique (1)

- Nécessité de prise en compte de fondements admis (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, $\mathbb{N}$ est archimédien, …), mais comment définir les entiers ?
- Des concepts centraux aux natures différentes : pgcd-ppcm, division euclidienne (extension ou division posée arrêtée au quotient entier ou notion FUG), nombre premier et décomposition en facteurs premiers, congruences
- L'écriture des entiers : écriture chiffrée, en lien avec la division euclidienne, en lien avec la décomposition ; → discussion sur le caractère ostensif des écritures
- Les structures additives et multiplicatives de $\mathbb{Z}$: addition itérée versus multiplication, multiplication et division (un entier est multiple d'un autre entier si et seulement si ce dernier divise le premier)

Relief des notions d'arithmétique (2)

- Trois cadres de travail (plus ou moins présents dans le secondaire, tous présents en licence) : arithmétique élémentaire dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ avec $+$ et $\times$, les congruences dans $\mathbb{Z}$, l'algèbre avec les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ et les anneaux quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- De nombreux registres et points de vue, par exemple, il y a équivalence entre a est multiple de b, a est divisible par b, b divise a ou b est un diviseur de a, le reste de la DE de a par b est 0, la division posée « tombe juste », a/b est entier, a est congru à 0 modulo b, $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$
- Des grands théorèmes : existence et unicité de la DE, lemmes d'Euclide et de Gauss, théorème de Bachet-Bézout, infinitude des nombres premiers, existence et unicité de la décomposition, compatibilité de la congruence et opérations, petit théorème de Fermat, théorème de Wilson

Relief des notions d'arithmétique (3)

- Une grande variété de types de raisonnements : exhaustif, par construction d'un tableau, disjonction des cas, CNS, analyse/synthèse, passer aux congruences, récurrence, principe des tiroirs.
- Dans les exercices : possibilité de mettre en valeur un jeu sur de nombreuses variables didactiques, les adaptations de connaissance (Robert)

Cinq grands types de problèmes initiaux (1)

- **Divisibilité 1** : DE, divisibilité, critères de divisibilité sur les écritures chiffrées et algébriques, algorithme d‘Euclide – un nombre est étudié en relation avec un autre
- **Divisibilité *2*** : deux nombres sont en jeu simultanément ; nombres premiers entre eux, pgcd, ppcm, Bézout, lemmes de Gauss et Euclide sur la divisibilité d’un produit
- **Congruences** : simplification des calculs car on remplace tous les entiers par un nombre fini mais aussi ambiguïté (travail sur les classes et non sur des entiers) – deux définitions possibles (la différence est congrue à 0 ou même reste) avec passage entre deux cadres :
  - Arithmétique vers congruence (usage de la DE)
  - Congruence vers arithmétique (passer aux restes)

Cinq grands types de problèmes initiaux (2)

- **Primalité** (outils, objets) : identification de nombres premiers, décompositions en nombres premiers, pgcd, ppcm, classes de nombres premiers, …
- **Équations** (en entiers, faisant intervenir des congruences, diophantiennes, systèmes, équations de Pell-Fermat…)

Un exemple d'activité : écritures algébriques

0) *Quelle définition prendre pour les nombres pairs ? les nombres impairs ?*
1) *Quelles propriétés de parités des sommes, des produits de deux nombres ?*
2) *Parité de n(n+1)*
3) *Que vaut la somme des n premiers nombres entiers ? La somme des n premiers nombres entiers impairs ? (Prolongements : La somme des n premiers carrés d'entiers et des conséquences pour les entiers pairs et impairs ? Somme des n premiers cubes ?)*
4) *Que dire de la décomposition en nombres premiers d'un entier pair ? Impair ?*
5) *Dans Z/2Z il y a combien de classes ? Est-ce un corps ? A quoi ça peut servir ?*
6) *Donner quelques nouvelles questions qui reprennent ce qui précède de manière moins découpée. Par exemple :* Est-ce que le nombre n(n + 1)/2 est entier ?
7) *Montrer que $3n^4 + 5n + 1$ est impair*

- Des choix : pair (intrinsèque), se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 (écriture chiffrée), pouvant s'écrire 2n (algébrique)
- Discussion didactique possible (double institutionnalisation) : exposer ce qui s'est passé dans votre groupe, intérêt du travail en groupe, d'où partir et que savent les élèves à ce sujet ?

Un exemple d'activité : divisions (1)

Soient c et b deux entiers positifs, non multiples l'un de l'autre.
1) Justifier que la division de c par b « ne tombe pas juste ».
2) On effectue une division posée de c par b et on obtient un quotient q de la forme 23,5, avec reste nul. Ecrire l'égalité de division euclidienne de c par b.
Justifier que si un quotient exact de la division de c par b a comme partie décimale 0,5, le diviseur est un entier pair.
Dans le cas général passer d'une division posée (qui s'arrête) – de reste r, à la division euclidienne en écrivant l'égalité de division.
Plus généralement, comment avec une calculatrice qui n'affiche pas la DE peut-on récupérer cette égalité à partir de la division « ordinaire » (où l'arrête-t-on, quels calculs supplémentaires faire éventuellement…) ?
3) Que se passe-t-il lorsque le diviseur est plus grand que le (égal au) dividende ?
4) Traduire algébriquement le traitement des situations suivantes.
a) On veut diviser équitablement a d'objets entre b destinataires. Comment fait-on ?
b) On dispose de boites d'une contenance b et on cherche de combien de boites on aura besoin pour répartir a objets. Qu'obtient-on ?

Objectif : faire prendre conscience du lien entre les connaissances antérieures en matière de division, posée ou sur calculatrice, et l'égalité de la division euclidienne. Cela lui donne ainsi un statut de **généralisation et d'unification**, porté par une **formalisation algébrique**, mais limitée aux entiers. La DE serait une extension de la division posée, arrêtée au dernier quotient entier, ou de la division sur calculatrice élémentaire, avec le même arrêt : elle est portée par un formalisme algébrique général, $a = bq + r$, avec la condition $0 \leq r < |b|$

Un exemple d'activité : divisions (2)

1) *Représenter sur une droite les multiples positifs et négatifs de 17.*
   Donner différentes CNS pour qu'un entier soit multiple de 17.
   Même question pour -17.
2) *Donnez plusieurs couples (q,r) tels que 92 = 17q + r.*
   Montrer qu'il en existe un seul tel que 0 ≤ r < 17 (graphiquement et algébriquement).
3) *Ecrire l'égalité de division euclidienne pour (92, -17), (-92, 17), (-92, -17) en l'illustrant graphiquement.*
4) *Pourquoi précise-t-on l'unicité dans le cas de l'écriture d'une division euclidienne et pas dans le cas de k dans l'écriture algébrique d'un multiple de 17 écrit sous forme 17k ?*
5) *Est-ce que le nombre de diviseurs d'un entier qui n'est pas un carré est pair ? Pourquoi peut-on se poser la question ?*
6) *Trouver l'erreur (donner un CE et montrer l'erreur de raisonnement) : on considère un multiple a de 17 et un multiple b de 2, alors leur somme est divisible par 19 – en effet si a = 17k et b = 2k, alors a + b = 19k et est divisible par 19.*
7) *L'égalité de DE pour (a,b) [a = bq + r] est-elle la même pour le couple (a,q) ?*

Discussion possible sur les difficultés ou erreurs possibles (dont on peut prévenir les étudiants avant, ou au contraire en leur faisant rencontrer puis en tirer des conséquences) : savoir utiliser la condition sur le reste, non changement de variable muette, introduction des nombres négatifs dans la DE, choix à faire dans chaque contexte

Un exemple d'activité : petit théorème de Fermat

1) Quel est le chiffre des unités (« le dernier chiffre ») de 2054^{11} ? De 3074^{11}
2) Existe-t-il des nombres dont toutes les puissances ont le même chiffre des unités ?
3) Montrer que $23^3 \equiv 8 \equiv 1[7]$. En déduire le reste de la division de 23^{27} par 7.
4) A quoi est congru n'importe quelle puissance d'un nombre congru à 1 (modulo un entier n) ?
5) Etant donnés deux entiers n et p, existe-t-il toujours une puissance de n congrue à 1 modulo p

- On aborde cette activité après avoir abordé les deux cadres en jeu (élémentaire, congruences), on introduit le théorème de Fermat par le problème ci-dessus.
- Le théorème de Fermat est une réponse à la question 5) avec deux démonstrations possibles au moins, présentées successivement : par récurrence avec la divisibilité des combinaisons ; dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec l'ordre d'un élément d'un groupe si on a introduit le cadre de l'algèbre.

Séances animées par les étudiants : possibles

- Des synthèses à faire faire aux étudiants : par exemple, sur les équations que l'on peut rencontrer en arithmétique (de la forme $xy = n$, se ramenant à $x^2 \equiv N(n)$, équations diophantiennes, équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
- Une réflexion autour des types de raisonnements en arithmétique, à reprendre avec des exemples illustratifs
- Une lecture de plusieurs articles pour introduire une même notion, avec présentation, puis discussion collective, comparaison, débat

Éléments de conclusion : en résumé

Pour apporter une réponse possible à la seconde discontinuité de Klein, nous proposons de concevoir et expérimenter un enseignement universitaire apportant des éléments nouveaux sur les mathématiques (du supérieur, du secondaire) ainsi que des éléments de réflexion sur les choix de l'enseignant tels qu'ils ont pu être "vécus" par les étudiants avec :

- des choix sur les tâches proposées (en relation avec un certain relief, à introduire petit à petit aux étudiants)
- des choix sur le travail organisé (modalités, individuel, collectif, animations..., accompagnements divers de l'enseignant)
- des choix d'évaluation

Cela demande des déroulements appropriés et une double institutionnalisation à mettre au point.

Bibliographie

Biehler, R. & Durand-Guerrier, V. (2020). TWG3 report: University Mathematics Didactic Research on Number Theory, Algebra, Discrete Mathematics, Logic. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), Proceedings of theThird Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020) (pp. 283-287). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

Cooney, T. J., & Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. In A. J. Bishop, M. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 795–828). Kluwer.

Coulange, L., & Robert, A. (2015). Les mathématiques dans les activités du professeur conséquences pour la formation. In L. Theis (Éd.), Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage Actes du colloque EMF2015 (pp. 81-94).

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-32.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A., Kwon, O.N. & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. Springer, 2016, ICME 13 Topical survey, Gabriele Kaiser.

Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2022). Transition secondaire-supérieur : ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques. *Epidemes, 1.* https://doi.org/10.46298/epidemes-7486

Bibliographie

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Eds.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3- 658- 01360-8_1

Hoffmann, M. & Biehler, R. (2020). Designing a Geometry Capstone Course for Student Teachers: Bridging the gap between academic mathematics and school mathematics in the case of congruence. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020) (pp. 338-347). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

Hoffmann, M., & Biehler, R. (2023). Implementing profession orientation as a design principle for overcoming Klein's second discontinuity – preservice teacher's perspectives on interface activities in the context of a geometry course. *ZDM Mathematics Education, 55*(4)., 737-751.

Kilpatrick, J. (2008). *A higher standpoint*. ICMI proceedings: Regular lectures, 26-43.

Klein, F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.. . Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der K. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen* (A. Deichert éd.). Erlangen.

Montmollin, M. (de) (1984). *L'intelligence de la tâche*. Berne : Peter Lang.

Pézard, M. (1985). *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs.* Doctoral thesis, Université Paris 7.

Bibliographie

Planchon, G. & Hausberger, T. (2020). Un problème de CAPES comme premier pas vers une implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020) (pp. 153-162). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

Planchon, G. (2022). *Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire : la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale*. Thèse de Doctorat : Université de Montpellier.

Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Eds.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (pp. 151-168).

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques des enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.) La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (pp. 45-68), Toulouse : Octares Edition.

Robert, A., Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2*, 4, 505-528.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (2-3), 133-169.

Bibliographie

Wasserman, N.H., Buchbinder, O. & Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM Mathematics Education, 55*(4), 719–736.

Winsløw, C. (2020). Professional and academic bases of university mathematics teaching for the 21st century: the anthropological approach to practice-based research. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020) (pp. 8-27). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

Winsløw, C. & Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34/1*, 59-86.

Winsløw, C., & Kondratieva, M. (2018). Klein's Plan B in the Early Teaching of Analysis: Two Theoretical Cases of Exploring Mathematical Links. *International Journal of Research in Undegraduate Mathematics Education, 4*, 119-138.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 263–281.