Mathematical Knowledge for Teaching

Renaud Chorlay

Sorbonne Université & LDAR

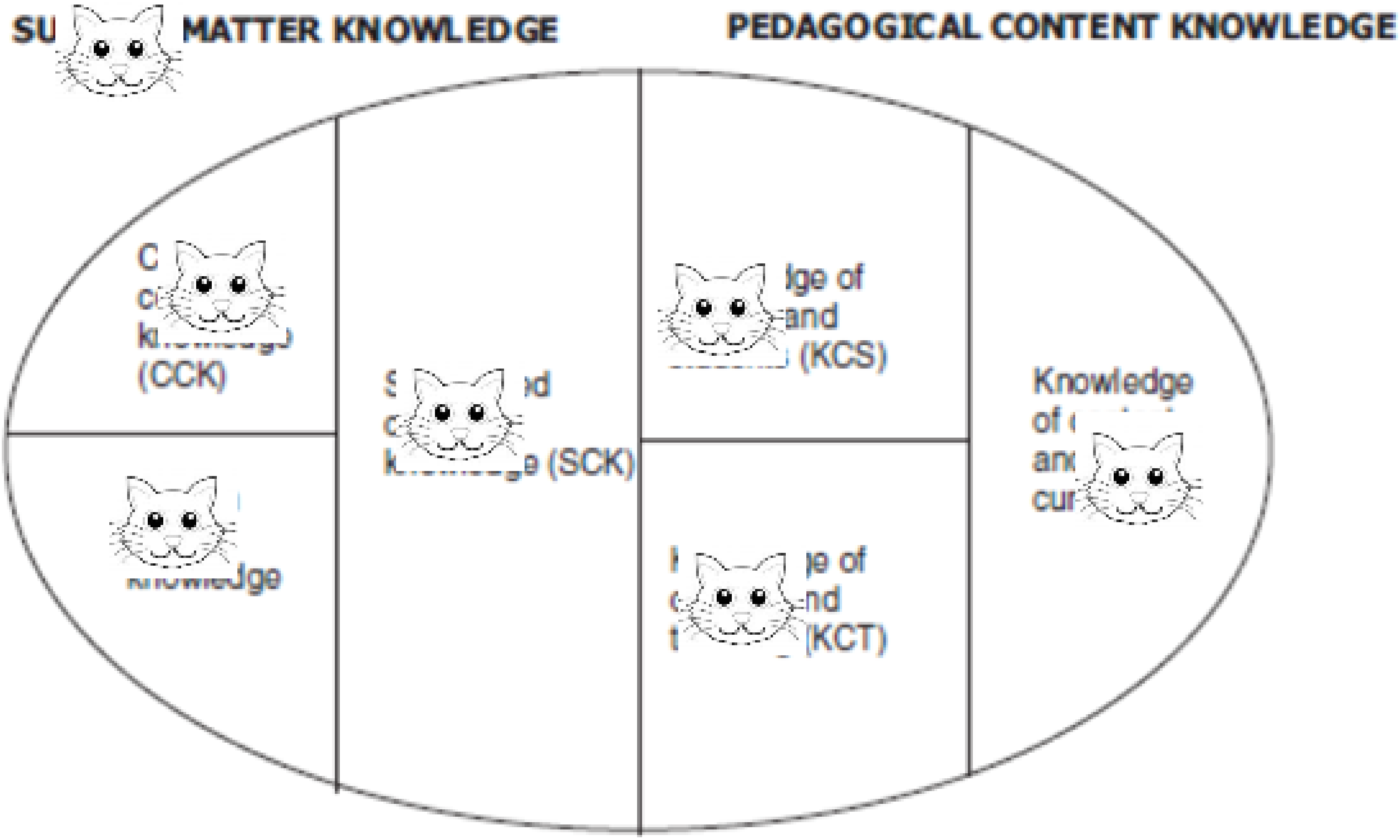
CORFEM 2025

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

LDAR LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

IREMS DE PARIS

L’œuf (*The egg)*


MATTER KNOWLEDGE
PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE
(CCK)
(SCK)
(KCS)
(KCT)
Knowledge

Plan de l’exposé

Décrire et organiser les Connaissances Mathématiques pour Enseigner (MKT) : l’article fondateur de Ball, Phelps, & Thames (2008)

Mesurer les MKT d’enseignants :

- Dans quel but ?
- Comment ?
- Une enquête grande échelle : TEDS-M

Quelques prolongements

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

D. Ball, M. Thames, G. Phelps. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of teacher education, 59*(5), 2008, 389–407.

Une double origine :

- Une source théorique : Le *Pedagogical Content Knowledge* du Shulman (1987)

- Un ancrage dans des études empiriques : le *Mathematics Teaching and Learning Project* et le *Learning Mathematics for Teaching project* (années 90 et 2000).

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Shulman's Major Categories of Teacher Knowledge

- General pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter
- Knowledge of learners and their characteristics
- Knowledge of educational contexts, ranging from workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures
- Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds
- Content knowledge
- Curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers
- Pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding

(Shulman, 1987, p. 8)

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Un ancrage dans des études empiriques : le *Mathematics Teaching and Learning Project* et le *Learning Mathematics for Teaching project*

« Pour déterminer les connaissances en jeu dans l'enseignement, nous avons commencé par étudier ce que requiert [*demand*] l'enseignement lui-même. Au lieu de partir du programme scolaire pour dresser une liste des choses que les enseignants doivent connaître, nous avons développé une approche empirique pour comprendre les connaissances disciplinaires [*content knowledge*] dont a besoin l'enseignant. Le premier projet s'est concentré sur le *travail* des enseignants dans l'enseignement des mathématiques. Les auteurs et leurs collègues ont utilisé des études sur les pratiques pédagogiques pour analyser les besoins mathématiques de l'enseignement et, sur la base de ces analyses, ont élaboré un ensemble d'hypothèses vérifiables sur la nature des connaissances mathématiques pour l'enseignement. Dans le cadre d'un travail connexe, le deuxième projet a permis de concevoir des enquêtes pour évaluer les connaissances disciplinaires pour l'enseignement des mathématiques. »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Questions centrales pour l'étude qualitative MTL :

« Que doivent savoir et être capables de faire les enseignants pour enseigner efficacement [*teach effectively*] ? Ou encore, que requiert un enseignement efficace en termes de compréhension des contenus ? L'accent est ainsi mis sur l'utilisation des connaissances dans et pour l'enseignement plutôt que sur les enseignants eux-mêmes. »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

« Pour l’enseignement » ?

« Par « enseignement », nous entendons tout ce que les enseignants doivent faire pour soutenir l'apprentissage de leurs élèves. Nous entendons bien sûr le travail interactif consistant à dispenser des cours en classe et toutes les tâches qui découlent de ce travail. Mais nous entendons également la planification de ces cours, l'évaluation du travail des élèves, la rédaction et la notation des évaluations, l'explication du travail en classe aux parents, la préparation et la gestion des devoirs, la prise en compte des questions d'équité (…). Chacune de ces tâches, et bien d'autres encore, nécessitent des connaissances mathématiques, des compétences en raisonnement mathématique, une bonne maîtrise des exemples et des notions, ainsi qu'une réflexion approfondie sur ce que signifie la maîtrise des mathématiques. »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Un *focus* sur les connaissances

20 ans après Shulman, une dérive à éviter : “les connaissances pédagogiques semblent englober presque tout ce qu'un enseignant peut savoir pour enseigner un sujet particulier, ce qui brouille les distinctions entre les actions, le raisonnement, les croyances et les connaissances de l'enseignant.”

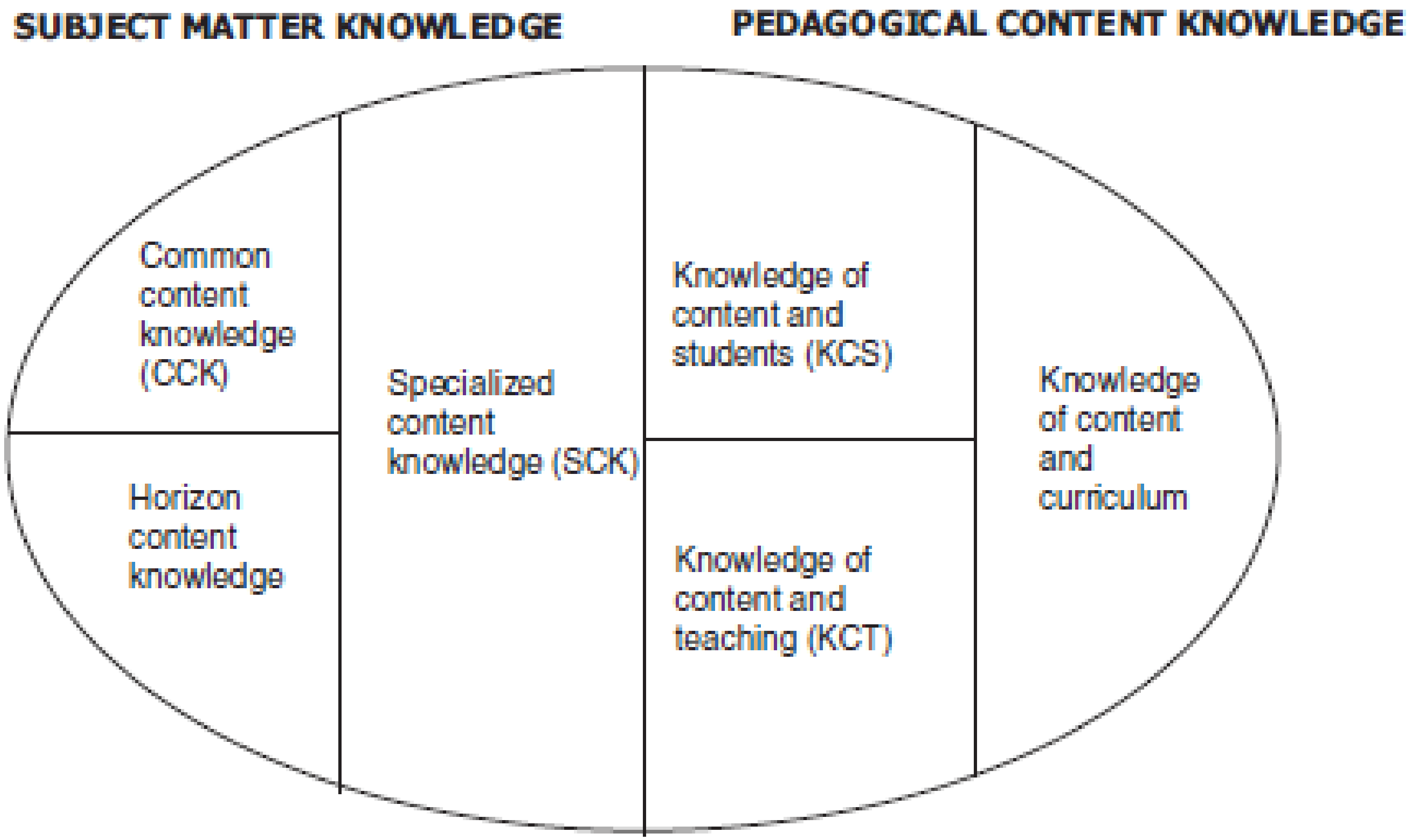
Un *focus* sur les connaissances mathématiques

« Nous cherchons à mettre en lumière les façons dont les mathématiques interviennent dans les besoins quotidiens, à chaque instant, de l'enseignement. (...) Par ‘connaissances mathématiques pour l'enseignement’ [*Mathematical Knowledge for Teaching*], nous entendons les connaissances mathématiques dont on a besoin pour enseigner les mathématiques. »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

« Pour représenter nos hypothèses, nous proposons un schéma qui raffine les catégories de Shulman. (…) Nos résultats empiriques actuels, basés sur nos analyses factorielles, suggèrent que les connaissances disciplinaires nécessaires à l'enseignement sont probablement multidimensionnelles (Hill et al., 2004 ; Schilling, à paraître). La question de savoir si les catégories que nous proposons ici sont les bonnes n'est pas essentielle. Elles ne le sont probablement pas. »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008



Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Connaissances Communes [*Common Content Knowledge*] : « les connaissances et compétences mathématiques utilisées dans des contextes autres que l'enseignement. (...) [les enseignants] doivent être capables d'effectuer les tâches qu'ils assignent à leurs élèves. Mais certaines de ces tâches requièrent des connaissances et des compétences mathématiques que d'autres possèdent également — elles ne sont donc pas spécifiques à l'enseignement. Par ‘communes’, nous ne voulons toutefois pas dire que tout le monde possède ces connaissances. »

Connaissances à l’horizon (*Horizon Content Knowledge*) : Il s’agit d’avoir à l’esprit les « liens qui existent entre les différents thèmes mathématiques abordés dans le programme scolaire. »

[Catégorie étendue depuis 2008 aux connaissances *sur les* mathématiques : liens entre les thèmes mathématiques ; nature, structure et histoire des mathématiques ; liens avec d'autres sciences ; applications des mathématiques]

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Connaissances Disciplinaires Spécifiques (*Specialized Content Knowledge*) :

« les connaissances et compétences mathématiques propres à l'enseignement »

« les connaissances et habiletés [*skills*] mathématiques uniques à l’enseignement »

Une mise en garde (Herbst & Kosko, 2014) :

Dans leur article, « Les SCK sont définies comme les connaissances mathématiques utilisées dans l'enseignement. Cette définition nous semble opérationnelle, contrairement à une autre définition qui circule dans la littérature (selon laquelle le SCK correspond aux connaissances mathématiques que seuls les enseignants utilisent) qui n'est pas aussi opérationnelle. La définition que nous avons choisie n'est pas sans poser problème, mais elle permet de créer des items sans avoir à établir la véracité d'une proposition empirique négative, à savoir que personne d'autre que les enseignants ne possède les mêmes connaissances, ce qui semble assez difficile à vérifier. La définition que nous avons choisie est problématique dans la mesure où elle génère un certain chevauchement avec les CCK. »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Des besoins de *Specialized Content Knowledge* se manifestent dans des tâches d’enseignement :

- « Présenter des idées mathématiques
- Trouver un exemple pour illustrer un point mathématique spécifique
- Modifier des tâches pour les rendre plus faciles ou plus difficiles
- Reconnaître ce qu'implique l'utilisation d'une représentation particulière / Relier les représentations aux idées sous-jacentes et à d'autres représentations / Sélectionner des représentations à des fins particulières
- Relier un sujet enseigné à des sujets abordés les années précédentes ou à venir
- Évaluer la plausibilité des affirmations des élèves affirmations (souvent rapidement)
- Donner ou évaluer des explications mathématiques
- Choisir et utiliser des définitions adaptées
- Évaluer et adapter le contenu mathématique des manuels scolaires
- Utiliser la notation et le langage mathématiques et critiquer leur utilisation
- Poser des questions mathématiques productives »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Specialized Content Knowledge : Trois précisions

La bonne réalisation des tâches de cette liste demande une combinaison de connaissances de différentes catégories. Pas de bijection entre liste des tâches et liste des catégories de connaissances. L'objectif est de défendre l'existence d'une catégorie autonome de type SCK.

Les SCK sont « les connaissances et compétences mathématiques propres à l'enseignement. (...) Ce travail implique une décomposition inhabituelle des mathématiques qui n'est ni nécessaire, ni même souhaitable dans des contextes autres que l'enseignement. (...) Avec les élèves, l'objectif est de développer une maîtrise des connaissances mathématiques condensées [*compressed*]. Au final, les apprenants doivent être capables d'utiliser des concepts et des procédures mathématiques sophistiqués. Les enseignants doivent toutefois posséder des connaissances mathématiques décompressées [*unpacked*], car l'enseignement consiste à rendre les caractéristiques d'un contenu particulier visibles et apprenables par les élèves. »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Specialized Content Knowledge : Trois précisions

« On pourraient se demander si ces connaissances décomposées équivalent à une compréhension conceptuelle. Ils pourraient se demander si nous ne souhaitons pas que tous les apprenants comprennent le contenu de cette manière. Notre réponse est non. Ce que nous décrivons va au-delà d'une solide maîtrise de la matière. Notre objectif n'est pas que chaque apprenant soit capable de sélectionner des exemples dans un but pédagogique stratégique, d'identifier et de distinguer l'ensemble des situations différentes modélisées par 38 ÷ 4, ou d'analyser les erreurs courantes. »

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Connaissance du contenu et des élèves (*Knowledge of Content and Students*) :

« (...) la connaissance des élèves et du contenu est un amalgame associant à une idée ou une procédure mathématique particulière la familiarité avec ce que les élèves pensent ou font souvent. (...) La connaissance des conceptions et des idées fausses courantes des élèves sur un contenu mathématique particulier est au cœur de ces tâches. »

Connaissance des programmes (*Knowledge of Content and Curriculum*)

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Connaissance du Contenu et de l'Enseignement (*Knowledge of Content and Teaching*) :

« (...) une connaissance mathématique pour la conception [*design*] de l'enseignement. Les enseignants organisent le contenu particulier à enseigner. Ils choisissent les exemples par lesquels commencer et ceux qui permettront d'approfondir le contenu. Les enseignants évaluent les avantages et les inconvénients pédagogiques des représentations utilisées pour enseigner une idée spécifique et identifient ce que les différentes méthodes et procédures apportent sur le plan pédagogique. Chacune de ces tâches nécessite une interaction entre une compréhension mathématique spécifique et une compréhension des questions pédagogiques qui influent sur l'apprentissage des élèves. »

Remarque : proche du « répertoire pédagogique » de Mason.

Un article qui fait date : Ball & al. 2008

Un exemple :

$$\begin{array}{rccc} & 3 & 0 & 7 \\ - & 1 & 6 & 8 \\ \hline & 2 & 6 & 1 \end{array}$$

« Reconnaître une réponse incorrecte relève des connaissances générales (CCK), tandis que déterminer la nature d'une erreur, en particulier une erreur inconnue, nécessite généralement une grande agilité dans le raisonnement mathématique, une attention particulière aux schémas et une flexibilité dans l'interprétation des significations, qui sont des caractéristiques propres aux connaissances spécifiques (SCK). En revanche, la familiarité avec les erreurs courantes et la capacité à déterminer laquelle parmi plusieurs erreurs les élèves sont le plus susceptibles de commettre sont des exemples de connaissances du contenu et des élèves (KCS). »

Plan de l’exposé

Décrire et organiser les Connaissances Mathématiques pour Enseigner (MKT) : l’article fondateur de Ball, Phelps, & Thames (2008)

Mesurer les MKT d’enseignants :

- Dans quel but ?
- Comment ?
- Une enquête à grande échelle : TEDS-M

Quelques prolongements

Mesurer les MKT d'enseignants : dans quel but ?

Pour les institutions pilotant les systèmes éducatifs

- Evaluation individuelles d'enseignants visant une certification ou un recrutement
- Evaluation de collectifs d'enseignants comme élément de pilotage du système éducatif, en particulier quant à la formation et le recrutement des enseignants

Mesurer les MKT d’enseignants : dans quel but ?

Pour les chercheurs en didactique des mathématiques

L’approche MKT peut être un *objet* d’étude : clarification conceptuelle des catégories ; construction d’observables et de modes de recueil de données sur les MKT de telle ou telle population.

L’approche MKT peut être un *outil* pour étudier :

- Les corrélations entre MKT des enseignants et réussite des élèves
- Les corrélations entre MKT et parcours des enseignants, en particulier parcours de formation, en particulier de manière comparative
- Le poids des connaissances mathématiques pour enseigner parmi les facteurs explicatifs de l’activité des enseignants

Liste non exhaustive …

Mesurer les MKT d’enseignants : dans quel but ?

Une mise en garde de Ball & al. dans le cadre du projet *Learning Mathematics for Teaching* :

« Nous avons rendu public un petit ensemble d'*items* issus de nos projets visant à rédiger et à tester des questionnaires pilotes. Nous pensons que ces éléments peuvent être utiles dans de nombreux contextes différents : comme questions ouvertes permettant d'explorer le raisonnement des enseignants à propos des mathématiques et de la réflexion des élèves ; comme supports pour le développement professionnel ou la formation des enseignants ; comme échantillons du type de mathématiques que les enseignants doivent connaître pour enseigner. Nous encourageons leur utilisation dans ces contextes. Cependant, cet ensemble d'*items* n'est <u>PAS</u> adapté, en tant que groupe, à une utilisation comme mesure globale ou échelle représentant les connaissances des enseignants. En d'autres termes, il n'est pas possible de calculer une note pour un enseignant qui indiquerait de manière fiable son niveau de connaissance ou ses progrès au fil du temps. »

Mesurer les MKT d'enseignants : Comment ?

Hill, H.C., Sleep, L, & Ball, D.L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. What knowledge matters and what evidence counts.
In Franck Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.111–156), NCTM and Information Age Publishing, 2007

Trois méthodes d'enquête sur les MKT d'enseignants :

- Observation de classe
- Entretiens
- Questionnaires à grande échelle

Mesurer les MKT d'enseignants : Comment ?

Observations de classe

« (...) si les observations en classe et sur vidéo peuvent être utiles pour répondre à des questions précises sur des enseignants particuliers travaillant avec des élèves sur des sujets particuliers, cette technique ne se prête pas à des études visant à tester formellement les effets des programmes de formation initiale des enseignants ou à établir un lien entre différentes conceptualisations des connaissances des enseignants et les résultats des élèves. »

Mesurer les MKT d'enseignants : Comment ?

Entretiens

« Une deuxième méthode largement utilisée pour étudier les connaissances mathématiques pour enseigner consiste à recourir à des tâches mathématiques et à des entretiens (…) pour aider les chercheurs à comprendre la nature et l'étendue des connaissances des enseignants. »

Plusieurs catégories de tâches soumises aux enseignants :

- « Certaines tâches utilisées dans les évaluations écrites et les entretiens étaient littéralement les mêmes que celles données aux élèves ».

  Conclusion principale : « (...) certains futurs enseignants présentaient de sérieuses lacunes dans leur compréhension des mathématiques qu'ils seraient amenés à enseigner ». Mêmes erreurs ou conceptions erronées que chez les élèves.

- Tâches faisant appel à des connaissances spécialisées : pourquoi tel algorithme fonctionne, comment construire un problème ou choisir un exemple pour expliquer une notion, etc.

Mesurer les MKT d’enseignants : Comment ?

Inconvénients ou limites des enquêtes par entretien :

- Chronophages
- Fiabilité du codage discutable
- Se concentrent sur trop peu de sujets pour fournir une évaluation générale des connaissances d'un individu
- Aident à identifier les personnes ayant peu de connaissances, mais « ne permettent pas de distinguer les enseignants très compétents de ceux qui le sont moins. »

Mesurer les MKT d’enseignants : Comment ?

Questionnaires à grande échelle

Exemples (avant 2007) : SII/LMT (*Learning Mathematics for Teaching*), KAT (*Knowledge for Algebra Teaching*), DATMS (*Diagnostic Teacher Assessments in Mathematics and Science*), SimCalc.

Points communs :

- Tests écrits (sans entretien)
- Questions à choix multiples ou réponses courtes
- Les réponses des enseignants sont notées comme correctes ou incorrectes, et une note est calculée, généralement en unités d'écart-type
- Les questions de fiabilité et de validité sont étudiées avec l'aide de psychométriciens

Mesurer les MKT d'enseignants : Comment ?

Questionnaires à grande échelle : Exemples issus de *LMT*

Specialized Content Knowledge

Imagine that you are working with your class on multiplying large numbers. Among your students' papers, you notice that some have displayed their work in the following ways:

Student A	Student B	Student C
35	35	35
×25	×25	×25
125	175	25
+75	+700	150
875	875	100
		+600
		875

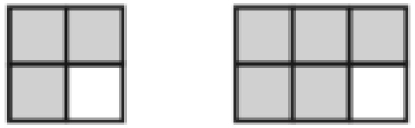
Which of these students would you judge to be using a method that could be used to multiply any two whole numbers?

	Method would work for all whole numbers	Method would *not* work for all whole numbers	I'm not sure
Method A	1	2	3
Method B	1	2	3
Method C	1	2	3

Mesurer les MKT d’enseignants : Comment ?

Questionnaires à grande échelle : Exemples issus de *LMT*

Takeem’s teacher asks him to make a drawing to compare $3/4$ and $5/6$. He draws the following:



and claims that $3/4$ and $5/6$ are the same amount.

What is the most likely explanation for Takeem’s answer? (Mark ONE answer.)

a) Takeem is noticing that each figure leaves one square unshaded.

b) Takeem has not yet learned the procedure for finding common denominators.

c) Takeem is adding 2 to both the numerator and denominator of $3/4$, and he sees that that equals $5/6$.

d) All of the above are equally likely.

Knowledge of Content and Students

Mesurer les MKT d'enseignants : Comment ?

Questionnaires à grande échelle : Exemples issus de *LMT*

Knowledge of Content and Teaching

While planning an introductory lesson on primes and composites, Mr. Rubenstein is considering what numbers to use as initial examples. He is concerned because he knows that choosing poor examples can mislead students about these important ideas.
Of the choices below, which set of numbers would be <u>best</u> for introducing primes as composites? (Mark one answer.)

	Primes	Composites
a)	3, 5, 11	6, 30, 44
b)	2, 5, 17	8, 14, 32
c)	3, 7, 11	4, 16, 25
d)	2, 7, 13	9, 24, 40

e) All of these would work equally well to introduce prime and composite numbers.

Mesurer les MKT d’enseignants : Comment ?

Questionnaires à grande échelle : problèmes et limites (Ball & al. 2007)

- « Le cadre ‘connaissances mathématiques pour l'enseignement’ est encore émergente. Sans une meilleure cartographie théorique de ce domaine, aucun instrument ne peut espérer saisir pleinement les connaissances et les capacités de raisonnement des enseignants. »
- Une question d’exhaustivité
- Une question de comparabilité (cadres de référence différents selon les enquêtes)
- Les enseignants sont réticents à se soumettre à des évaluations sur papier, en particulier à des QCM.

Mesurer les MKT d’enseignants : Comment ?

Mesurer les MKT d’enseignants : Que mesure-t-on vraiment ?

Hill, H, Ball, D.L., Schilling, S.G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4). pp. 372–400.

Mesurer les MKT d’enseignants : Comment ?

Mesurer les MKT d’enseignants : Que mesure-t-on vraiment ?

Enquête par questionnaire puis phase de contrôle : 2 mois après, un échantillon des enseignants ayant passé le test est vu en entretien (entretiens cognitifs rétrospectifs). Chacun est invité à expliquer comment il a répondu au questionnaire.

Mesurer les MKT d’enseignants : Comment ?

Mesurer les MKT d’enseignants : Que mesure-t-on vraiment ?

Un résultat et une hypothèse :

- Les réponses correctes peuvent s'appuyer sur les connaissances KCS ou SCK : pour certains éléments, 42 % des réponses correctes reflétaient les connaissances KCS et 42 % reflétaient les connaissances SCK.

  « Nous trouvons également particulièrement troublant que les entretiens cognitifs suggèrent que bon nombre de ces problèmes peuvent être résolus en l'absence du KCS qu'ils étaient censés évaluer. (...) même si le KCS n'est pas présent, le raisonnement mathématique et les connaissances peuvent compenser. »

- Les connaissances/la compréhension peuvent être induites par le test : « Il existe également une possibilité, qui n'a pas été examinée dans ces entretiens cognitifs rétrospectifs, que les *items* aient « enseigné » le contenu, provoquant en fait un moment du type ‘aha !’ »

Plan de l’exposé

Décrire et organiser les Connaissances Mathématiques pour Enseigner (MKT) : l’article fondateur de Ball, Phelps, & Thames (2008)

Mesurer les MKT d’enseignants :

- Dans quel but ?
- Comment ?
- Une enquête grande échelle : TEDS-M

Quelques prolongements

Mesurer les MKT d'enseignants : Enquêtes à grande échelle

L'étude TEDS-M (2006-2010)

Teacher Education and Development Study in Mathematics

Etude internationale co-pilotée par :

- Un consortium spécialisé dans l'évaluation : *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) https://www.iea.nl/studies/iea/teds-m
- Des didacticiens des mathématiques : Etats-Unis, Australie, Allemagne

Mesurer les MKT d’enseignants : Enquêtes à grande échelle

L’étude TEDS-M

Population : futurs enseignants du primaire et du collège (deux cohortes), dans leur dernière année de formation

Echantillon représentatif dans 17 pays : Botswana, Canada, Chili, Géorgie, Allemagne, Malaisie, Norvège, Oman, Philippines, Pologne, Fédération de Russie, Singapour, Espagne, Suisse (cantons germanophones), Taiwan, Thaïlande, Etats-Unis.

Taille de l’échantillon : 23 000

Mesurer les MKT d’enseignants : l’étude TEDS-M

Objectifs : Décrire et évaluer les systèmes de formation des enseignants

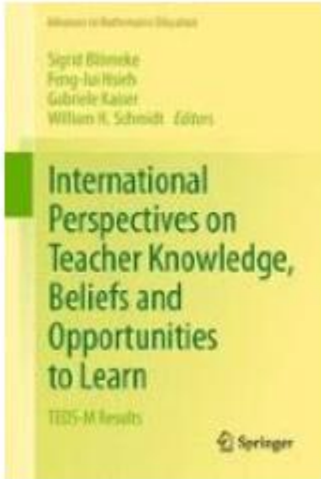
Deux études :

- Aspects institutionnels : organisation, recrutement des systèmes de formation d’enseignants

- Tests par questionnaires portant sur
  - Les connaissances (durée : 1h) :
    - Connaissances Mathématiques (*Mathematics Content Knowledge*)
    - Connaissances Pédagogiques relatives aux Mathématiques *(Mathematics Pedagogical Content Knowledge*)
  - Les croyances (*beliefs*) à propos des mathématiques et de leur enseignement

Mesurer les MKT d'enseignants : l'étude TEDS-M

Des résultats scientifiques …



Content Knowledge of Future Lower Secondary Teachers	
Country	**Mean**
Taiwan	667
Russia	594
Singapore	570
Poland*	540
Switzerland*	531
Germany	**519**
USA*	505
International	500
Malaysia	493
Thailand	479
Oman	472
Norway*	444
Philippines	442
Botswana	441
Georgia*	424
Chile*	354
IEA: Teacher Education and Development Study	© TEDS-M Germany

… et des effets politiques

ZDM Mathematics Education (2012) 44:223–247
DOI 10.1007/s11858-012-0429-7

ORIGINAL ARTICLE

Assessment of teacher knowledge across countries: a review of the state of research

Sigrid Blömeke · Seán Delaney

Mesurer les MKT d'enseignants : l'étude TEDS-M

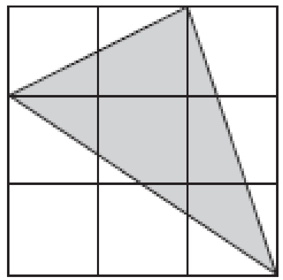
Echantillon de questions

Domaine Format de question	MCK	MPCK
QCM simple		
QCM complexe		
Réponse rédigées (*Constructed*)		

Mesurer les MKT d'enseignants : l'étude TEDS-M

*Exhibit 5.8: Multiple-choice MCK Item MFC408**

The area of each small square is 1 cm^2



What is the area of the shaded triangle in cm^2?

Check *one* box.

A. 3.5 cm^2 ☐

B. 4 cm^2 ☐

C. 4.5 cm^2 ☐

D. 5 cm^2 ☐

Mesurer les MKT d’enseignants : l’étude TEDS-M

A mathematics teacher wants to show some <lower secondary school> students how to prove the quadratic formula.

Determine whether each of the following types of knowledge is needed in order to understand a proof of this result.

Check one box in each row.

		Needed	Not needed
A.	How to solve linear equations.	☐ 1	☐ 2
B.	How to solve equations of the form $x^2 = k$, where $k > 0$.	☐ 1	☐ 2
C.	How to complete the square of a trinomial.	☐ 1	☐ 2
D.	How to add and subtract complex numbers.	☐ 1	☐ 2

Mesurer les MKT d’enseignants : l’étude TEDS-M

Some <lower-secondary school> students were asked to prove the following statement:
When you multiply 3 consecutive natural numbers, the product is a multiple of 6.
Below are three responses.

[Kate’s] answer

A multiple of 6 must have factors of 3 and 2.
If you have three consecutive numbers, one will be a multiple of 3.

Also, at least one number will be even and all even numbers are multiples of 2.
If you multiply the three consecutive numbers together the answer must have at least one factor of 3 and one factor of 2.

[Leon’s] answer

$1 \times 2 \times 3 = 6$

$2 \times 3 \times 4 = 24 = 6 \times 4$

$4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20$

$6 \times 7 \times 8 = 336 = 6 \times 56$

[Maria’s] answer

n is any whole number

$$\begin{aligned} n \times (n+1) \times (n+2) &= (n^2 + n) \times (n+2) \\ &= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n \end{aligned}$$

Cancelling the n’s gives $1 + 1 + 2 + 2 = 6$

Determine whether each proof is valid.

Check *one* box in *each* row.

	Valid	Not valid
A. [Kate’s] proof	☐	☐
B. [Leon’s] proof	☐	☐
C. [Maria’s] proof	☐	☐

Mesurer les MKT d'enseignants : l'étude TEDS-M

[Kate's] answer

A multiple of 6 must have factors of 3 and 2.
If you have three consecutive numbers, one will be a multiple of 3.

Also, at least one number will be even and all even numbers are multiples of 2.
If you multiply the three consecutive numbers together the answer must have at least one factor of 3 and one factor of 2.

[Leon's] answer

1 x 2 x 3 = 6

2 x 3 x 4 = 24 = 6 x 4

4 x 5 x 6 = 120 = 6 x 20

6 x 7 x 8 = 336 = 6 x 56

[Maria's] answer

n is any whole number

$$n \times (n+1) \times (n+2) = (n^2 + n) \times (n+2)$$
$$= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n$$

Cancelling the n's gives 1 + 1 + 2 + 2 = 6

- Kate : réponse validée par 74% des participants (min : 54% Botswana, max : 97% Taiwan)
- Leon : réponse rejetée par 55% des participants
- Maria : réponse rejetée à 59% (mais acceptée à 56% au Chili)

Exhibit 5.12: Constructed-response Items MFC208A–B

[Jeremy] notices that when he enters 0.2×6 into a calculator his answer is smaller than 6, and when he enters $6 \div 0.2$ he gets a number greater than 6. He is puzzled by this, and asks his teacher for a new calculator!

(a) What is [Jeremy's] most likely misconception?

(b) Draw a visual representation that the teacher could use to model 0.2×6 to help [Jeremy] understand **WHY** the answer is what it is?

Mesurer les MKT d'enseignants : l'étude TEDS-M

The following problems appear in a mathematics textbook for <lower secondary school>.

1. [Peter], [David], and [James] play a game with marbles. They have 198 marbles altogether. [Peter] has 6 times as many marbles as [David], and [James] has 2 times as many marbles as [David]. How many marbles does each boy have?

2. Three children [Wendy], [Joyce] and [Gabriela] have 198 zeds altogether. [Wendy] has 6 times as much money as [Joyce], and 3 times as much as [Gabriela]. How many zeds does each child have?

(a) Solve each problem.

Solution to Problem 1:

Solution to Problem 2:

(b) Typically Problem 2 is more difficult than Problem 1 for <lower secondary> students. Give one reason that might account for the difference in difficulty level.

Mesurer les MKT d’enseignants : l’étude TEDS-M

Conclusion

« Il est naturel de se demander ce qui explique les différences de connaissances entre les pays et au sein d'un même pays. La réponse à cette question nécessite des analyses supplémentaires et dépasse le cadre du présent rapport. Pour chaque unité participante (un pays ou une institution, par exemple), les résultats du TEDS-M servent de données de référence à partir desquelles mener des recherches plus approfondies. Par exemple, les experts en contenu pourraient choisir d'examiner les descriptions des points de référence pour les MCK et les MPCK et le pourcentage de futurs enseignants diplômés de leur unité qui atteignent chaque point de référence. Ils pourraient ensuite étudier comment les changements apportés aux programmes d'études peuvent conduire à une amélioration des performances. Les décideurs politiques pourraient (…) examiner si l'allongement de la durée des programmes de formation des enseignants peut conduire à de meilleurs résultats aux échelles MCK et MPCK. »

Plan de l'exposé

Décrire et organiser les Connaissances Mathématiques pour Enseigner (MKT) : l'article fondateur de Ball, Phelps, & Thames (2008)

Mesurer les MKT d'enseignants :

- Dans quel but ?
- Comment ?
- Une enquête grande échelle : TEDS-M

Quelques prolongements

Quelques prolongements

Quelle adaptation au lycée (et au-delà) ?

Teacher Education and Development Study – Short Test on Mathematics Content Knowledge (MCK) and Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK)

TEDS-shortM

Kurzfassung der mathematischen und mathematikdidaktischen Testinstrumente aus TEDS-M, TEDS-LT und TEDS-Telekom

Nils Buchholtz (Universität Hamburg)
Thorsten Scheiner (Universität Hamburg)
Prof. Dr. Martina Döhrmann (Universität Vechta)
Dr. Ute Suhl (Humboldt-Universität zu Berlin)
Prof. Dr. Gabriele Kaiser (Universität Hamburg)
Prof. Dr. Sigrid Blömeke (Humboldt-Universität zu Berlin)

Februar 2012

Email: Nils.Buchholtz@uni-hamburg.de
Tel.: +49 (0)40-42838-6405
Fax: +49 (0)40-42838-4459

Nils Buchholtz
Universität Hamburg, Fakultät IV
Fachbereich Erziehungswissenschaften 5,
Arbeitsbereich Mathematikdidaktik
Von-Melle-Park 5
20146 Hamburg

ZDM Mathematics Education (2013) 45:107–120
DOI 10.1007/s11858-012-0462-6

ORIGINAL ARTICLE

Future mathematics teachers' professional knowledge of elementary mathematics from an advanced standpoint

Nils Buchholtz · Frederick K. S. Leung · Lin Ding · Gabriele Kaiser · Kyungmee Park · Björn Schwarz

Quelques prolongements

Quelle adaptation au lycée (et au-delà) ?

Decide whether the following will always, sometimes or never yield an irrational number. ***Mark one of the boxes on each row.***

		Always	Sometimes	Never
A)	The number obtained by dividing the circumference of a circle by its diameter.	☐	☐	☐
B)	The area of a circle.	☐	☐	☐
C)	The length of the diagonal of a square with sides of length 1.	☐	☐	☐
D)	The result of 22 divided by 7.	☐	☐	☐

Quelques prolongements

Quelle adaptation au lycée (et au-delà) ?

In school mathematics, we study rational numbers and real numbers. What do you think is the mathematical justification of extending the rational number system to the real number system?		
A	On the number line, there may exist two rational numbers for which there is an irrational number, but not a rational number, between them. Therefore, we need to introduce irrational numbers	☐
B	If we do not introduce real numbers, we may not be able to find a number a' for each rational number $a \neq 0$ so that $a \cdot a' = 1$ is true	☐
C	If we do not introduce real numbers, we may not be able to solve equations such as $x^2 = a,\ a > 0$	☐
D	If we extend rational numbers to real numbers, we will be able to find $\sqrt{a},\ a<0$	☐
E	I don't know	☐

Réponse correcte : Corée 79%, Chine 39%, Allemagne 38%, Honk-Kong 32%

Quelques prolongements

Quelle adaptation au lycée (et au-delà) ?

Speer, N.M., King, K.D., & Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 105–122

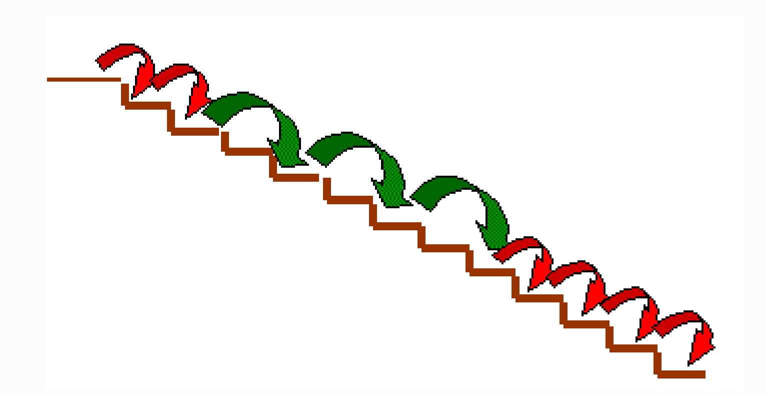
Observation de classes, sur modèle initial de Ball & al., qui avait conduit à proposer la catégorie SCK.

« Le cadre MKT repose sur l'idée que les connaissances CCK sont celles détenues ou utilisées par un citoyen moyen ayant des connaissances mathématiques, et que les connaissances SCK sont différentes. Cependant, parmi les enseignants du secondaire et du supérieur, que faut-il considérer comme des connaissances communes ? La compréhension conceptuelle des connaissances communes chez les titulaires d'une Licence de mathématique – ou plus – est-elle la même que celle des connaissances SCK ? »

Quelques prolongements

Quelle adaptation au lycée (et au-delà) ?

« Supposons qu'un escalier comporte dix marches et que vous puissiez monter les marches une ou deux à la fois. De combien de façons différentes pouvez-vous monter ces dix marches ? (...).



L'enseignant a pour objectif d'utiliser ce problème pour discuter des combinaisons et des méthodes de dénombrement et a une idée générale de la solution.
Un groupe [d'élèves] a commencé avec un nombre total de marches plus petit pour construire sa solution pour 10 marches. Les élèves ont conclu que le nombre de façons d'atteindre le but augmente de la même manière que la suite de Fibonacci. Il y a donc 89 façons d'atteindre le but pour 10 marches.
L'enseignant doit décider comment répondre aux élèves. »

Quelques prolongements

Quelle adaptation au lycée (et au-delà) ?

« Après avoir demandé aux élèves de rappeler la formule, l'enseignant écrit ce qui suit au tableau

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L'enseignant dit : ‘Pouvez-vous le prouver ? Qui sait comment le déduire ?’
Un élève répond : ‘Est-ce qu’on pourrait travailler à rebours ?’
L'enseignant demande : ‘Et simplement remplacer et montrer que ça marche ?’ »

Quelques prolongements

Quelle adaptation au lycée (et au-delà) ?

« Le type de travail mathématique décrit ci-dessus est une composante fréquente et courante des activités scientifiques des mathématiciens. À ce titre, il semble inapproprié de le qualifier de ‘spécifique’ à l'enseignement, étant donné que les mathématiciens s'adonnent à ce type de travail et utilisent ce type de connaissances de manière courante dans le cadre de leurs recherches. »

Quelques prolongements

Les réflexions de Speer et al. pointent dans la direction suivante : les connaissances dont ont besoin les enseignants de lycée dans l'exercice de leur métier sont

- Des PCK : connaissance des programmes, des conceptions et erreurs courantes chez élèves, d'un répertoire d'actions dans lequel piocher pour concevoir les séances et séquences.
- Des connaissances mathématiques qui ne diffèrent pas de celles enseignées dans le supérieur.

Quelques prolongements

Une hypothèse implicite forte : la fréquentation des mathématiques du supérieur (non spécifiques aux futurs enseignants) permettrait l'acquisition

- de compétences de mathématicien (en particulier : agilité dans la résolution de problème passant par des capacités de changement de point de vue, de registre, de cadre ; capacités de raisonnement et de preuve),
- d'un rapport savant aux mathématiques (en particulier une *theory-building disposition* (Herbst)),
- et d'une connaissance *décompressée* des contenus mathématiques du lycée.

Quelques prolongements

Utilisation du cadre MKT en recherche

Quelques travaux du GRIP

Grasping the Rationality of Instructional Practice

https://www.gripumich.org/

Quelques prolongements

Plusieurs directions de recherche :

- Analyse des pratiques enseignantes
- Recherche de facteurs expliquant la variabilité des niveaux de MKT
- Evaluation comparée de formations initiales comparables
- Raffinement théorique et méthodologique

Quelques prolongements

Herbst, P., & Kosko, K. (2014). Mathematical knowledge for teaching and its specificity to high school geometry instruction. In J. Lo, K. R. Leatham, & L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 23-45). Springer.

Quelques prolongements

- Une restriction non seulement à un domaine des mathématiques, mais à une situation d'enseignement (*instructional situation*) spécifique : enseignement de la géométrie, au Lycée, aux Etats-Unis
  Situation d'instruction modélisée comme l'interaction entre contenu-enseignants-élèves dans un contexte d'enseignement décrit en termes d'obligations et de normes collectives
- Dans la situation, identification d'une liste de tâches d'enseignement (*tasks of teaching*) :
  - Concevoir un problème ou une tâche pour les élèves
  - Evaluer une réponse d'élève (solutions, arguments, définitions)
  - Reformuler une affirmation d'élève en langage mathématique conventionnel

    …

Quelques prolongements

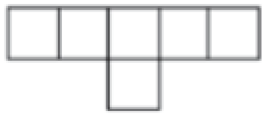
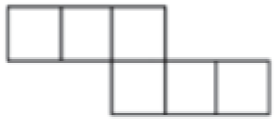
Une conception du test (QCM) en plusieurs phases :

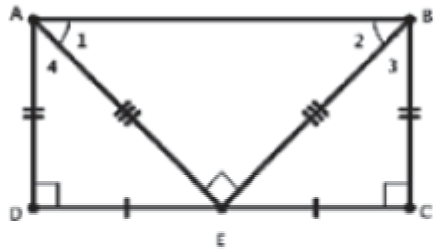
- Conception par l’équipe de chercheurs
- Pré-test, qualitatif, auprès de 11 enseignants experts
- Test-pilote auprès de 48 enseignants : élimination de la moitié des questions initiales

$\rightarrow$ Test de 34 *items* (MKT-G) : 9 CCK, 11 SCK, 7 KCT, 7 KCS

Administration à 83 enseignants

Quelques prolongements

<table>
<tr>
<td>CCK released item</td>
<td>
Students in Mr. Wingate's class have been creating nets that they want to be able to fold to create a cube. For each of the student-created nets shown below, identify whether it can be successfully folded into a cube?
<table>
<tr><td></td><td></td><td>Yes</td><td>No</td></tr>
<tr><td>i</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ii</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>SCK released item</td>
<td>
While proving a claim on the board about the figure below, Joe wrote "1 + 2 = 90." Ms. Staples ponders how to correct that statement. Of the following, what is the best alternative?



<table>
<tr><td>A</td><td>Do nothing. The statement is correct as is.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Add the degree symbol so that the statement reads 1 + 2 = 90°.</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Replace what Joe wrote; write instead that "m∠A + m∠B = 90°".</td></tr>
<tr><td>D</td><td>Replace what Joe wrote; write instead that "m∠EAB + m∠EBA = 90°".</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Quelques prolongements

KCS released item	Ms. Jamison asked students to figure out the number of diagonals in an 11-sided polygon. Of the following erroneous solutions, which one might have resulted from using the number of diagonals through one vertex? **A** 11 **B** 72 **C** 88 **D** 99 **E** 121
KCT released item	After teaching her students the base angles theorem (which states that base angles of an isosceles triangle are congruent), Ms. Wellington is pondering what example she could give to illustrate how this theorem can help find new information. Which of the following would be the best example? **A** If you have a triangle that you know is isosceles and you know two of the sides are 8 and 10, then the third side will be 8 or 10. **B** If you have a triangle that you know the sides have length 8, 10, and 12 you know it does not have two angles that are congruent. **C** If you have an isosceles triangle and two of its angles are 30 you can calculate the third angle by subtracting 60 from 180. **D** If you have a kite and draw its minor diagonal, the kite is divided into two isosceles triangles and those have two congruent angles each.

Quelques prolongements

Quelques résultats :

Table 3 Correlations between MKT-G domain scores

	CCK	SCK	KCT	KCS
CCK	–	–	–	–
SCK	0.40***	–	–	–
KCT	0.36**	0.54***	–	–
KCS	0.69***	0.48***	0.43***	–

*$p<0.05$, **$p<0.01$, ***$p<0.001$

« Les corrélations entre les scores des domaines sont présentées dans le tableau 3 et suggèrent des relations modérées à fortes entre les différents domaines. Ces résultats montrent des tendances similaires à celles trouvées par Hill et al. (2004) pour le CCK et le KCS, ce qui suggère que les différents domaines sont, dans une certaine mesure, interdépendants. »

Quelques prolongements

Table 4 Correlations between domain scores and experience and coursework

	Years experience		Content coursework	
	Years teaching mathematics	Years teaching geometry	Total math courses	Total geometry courses
CCK-G	−0.06	0.38***	−0.05	−0.02
SCK-G	0.09	0.35**	0.05	0.04
KCT-G	0.04	0.19[a]	−0.00	−0.05
KCS-G	−0.02	0.25*	0.10	0.08

[a]$p<0.10$, *$p<0.05$, **$p<0.01$, ***$p<0.001$

« Nous avons également examiné les corrélations, par domaine MKT, avec l'expérience de l'enseignement en général et avec l'expérience de l'enseignement de la géométrie au lycée (…). Les corrélations (…) fournissent une image intrigante de la manière dont les enseignants ayant des expériences différentes acquièrent des connaissances pour enseigner la géométrie et suggèrent que le MKT-G peut s'apprendre par l'expérience de l'enseignement de la géométrie. »

Quelques prolongements

Table 4 Correlations between domain scores and experience and coursework

	Years experience		Content coursework	
	Years teaching mathematics	Years teaching geometry	Total math courses	Total geometry courses
CCK-G	−0.06	0.38***	−0.05	−0.02
SCK-G	0.09	0.35**	0.05	0.04
KCT-G	0.04	0.19[a]	−0.00	−0.05
KCS-G	−0.02	0.25*	0.10	0.08

[a]$p < 0.10$, *$p < 0.05$, **$p < 0.01$, ***$p < 0.001$

Ces résultats montrent que ni le nombre total de cours de mathématiques ou de cours de géométrie suivis à l'université ne sont corrélés aux scores MKT-G. De même, les années d'expérience dans l'enseignement des mathématiques en général montrent également des corrélations proches de zéro. Cependant, pour chaque domaine du MKT-G, il existe des indices d'une relation avec l'expérience dans l'enseignement du cours de géométrie. Il semble donc que l'instrument MKT-G puisse mesurer un domaine de connaissances spécifiquement lié à l'enseignement de la géométrie au lycée. (…) bien qu'un effet important attribuable à la situation géographique ait été constaté, l'effet associé à l'expérience des enseignants en géométrie s'est révélé être un facteur prédictif beaucoup plus fort du score MKT-G des enseignants. »

Quelques prolongements

D’où une nouvelle question de recherche :

« Comment les exigences [*demands*] spécifiques du travail d'enseignement de la géométrie créent-elles des opportunités pour les enseignants d'acquérir [*opportunities to learn*] ces connaissances mathématiques ? »

Et une invitation à un cadrage plus précis des questionnaires, permettant de préciser le contenu de type SCK :

« Nous postulons plutôt que les éléments de la MKT doivent être identifiés à partir du travail spécifique de l'enseignement des mathématiques dans des programmes d'études donnés, plutôt que par l'association de caractéristiques génériques de l'enseignement à des listes de thèmes mathématiques issus de domaines mathématiques. »

Quelques prolongements

Expérience d’enseignement et acquisition de SCK : un exemple

« L'instrument MKT-G comprenait également des items SCK qui faisaient référence à des tâches mathématiques <u>s'écartant des situations pédagogiques habituelles</u>, mais qui portaient sur des objets d'étude faisant partie du cours de géométrie. Dans l'un de ces items (…) les participants étaient confrontés au scénario suivant : un enseignant avait demandé à ses élèves de géométrie de donner une définition d'une figure habituellement étudiée dans le cours. Les participants devaient examiner deux définitions prétendument proposées par des élèves et de décider si elles étaient correctes, si elles s'appliquaient uniquement à des cas particuliers ou si elles ne pouvaient être que les conséquences d'une définition. »

C’est moi qui souligne

Quelques prolongements

Expérience d’enseignement et acquisition de SCK : un exemple (suite)

Les observations montrent qu’un tel travail sur les définitions est bien plus courant dans les cours de géométrie que dans les autres cours de mathématiques. Donc :

« Nous nous attendions à ce que les enseignants expérimentés dans l'enseignement de la géométrie obtiennent de meilleurs résultats sur cet *item*. »

Résultat : « Les enseignants de géométrie plus expérimentés étaient beaucoup plus susceptibles que les enseignants moins expérimentés de signaler cette définition comme incorrecte. Ainsi, bien que demander aux élèves de créer leurs propres définitions puisse être une tâche nouvelle dans la plupart des classes de géométrie, les enseignants expérimentés semblaient mieux à même d'utiliser leurs connaissances mathématiques pour évaluer le travail des élèves. »

Quelques prolongements

Herbst, P., Ko, I., & Brown, A. (2024). *Assessing prospective teachers' growth in mathematical knowledge for teaching geometry*. Presented at TSG 4.6, ICME 15 conference. Sydney, Australia.

Quelques prolongements

Comparaison de 36 formations universitaires d'enseignants de mathématique du secondaire.

Cursus typique (Etats-Unis) :

- Cours à la faculté d'éducation : généralités sur l'enseignement et l'apprentissage
- Cours à la faculté de mathématiques :
  - Calcul différentiel à une variable (parfois à plusieurs)
  - Algèbre linéaire, algèbre abstraite
  - Cours de géométrie euclidienne (et non-euclidienne) axiomatique
  - Parfois :
    - Ouverture sur des mathématiques plus avancées : analyse complexe, topologie, théorie des nombres, probabilités …
    - Compléments sur les mathématiques de lycée

Quelques prolongements

Deux objectifs :

- Pratique : l’enquête est menée à la demande d’un collectif d’enseignants du supérieur désireux de rendre leurs cours universitaires plus « utiles » aux futurs enseignants

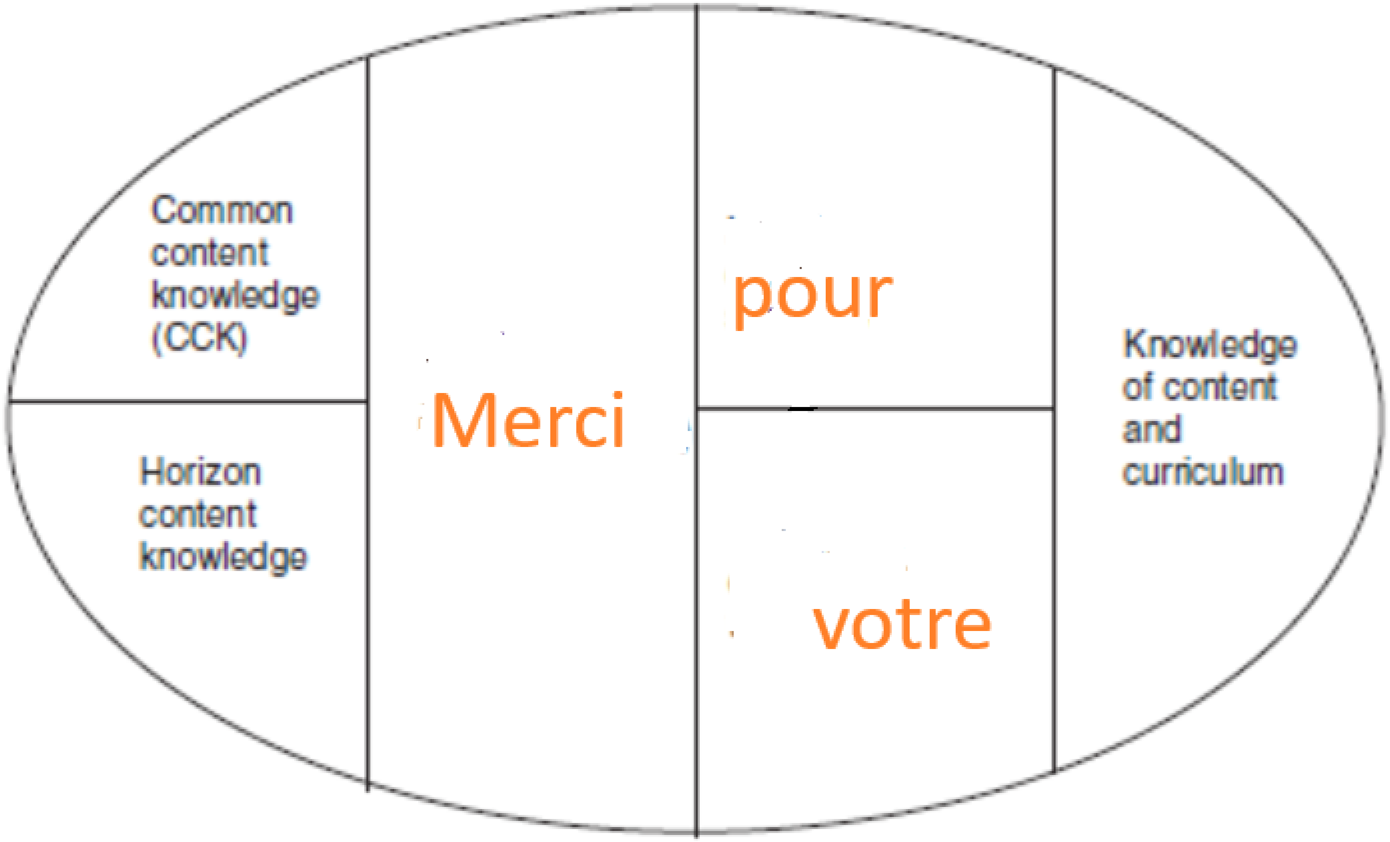
- Recherche en didactique : apporter des éléments empiriques susceptibles de départager les réponses « idéologiques » face à l’enjeu de la seconde discontinuité de Klein

Quelques prolongements

Une frustration

Le travail publié ne porte que sur les préliminaires méthodologiques, et vise à établir la fiabilité de l'usage de l'outil MKT-G dans ce nouveau contexte : une étude avant/après dans des cohortes d'individus.

« Sur la base de ces résultats, nous proposons l'interprétation et l'utilisation suivantes des résultats du test : les scores globaux obtenus par les futurs enseignants au test MKT-G peuvent être utilisés pour estimer l'ampleur des gains en connaissances des futurs enseignants en géométrie au niveau secondaire associés à la participation aux cours GeT [Géométrie théorique]. Il serait donc logique que les études suivantes examinent si le test MKT-G permet de distinguer l'efficacité relative de différentes méthodes d'organisation des cours de géométrie destinés aux enseignants. »


Common content knowledge (CCK)
Horizon content knowledge
Merci
pour
votre
Knowledge of content and curriculum
attention

Annexe 1

Quelques prolongements ou remises en question

Prolongement

Ko, I., & Herbst, P. (2020). Subject Matter Knowledge of Geometry Needed in Tasks of Teaching: Relationship to Prior Geometry Teaching Experience *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(5), pp. 600–630.

Quelques prolongements ou remises en question

Focus sur deux tâches d'enseignement :

- Comprendre le travail d'un élève (*USW*)
- Choisir les données d'un problème (*CGP*) de type *geometric calculation in algebra*

« (…) ces deux tâches d'enseignement, l'USW et le CGP, sont mathématiques dans le sens où, pour les accomplir, l'enseignant doit faire appel à ses propres connaissances mathématiques. »

Mr. Boone is making a problem for students to practice the definition of isosceles triangle. He is looking for algebraic expressions to represent the measures of the sides of $\triangle ABC$ where it is given that $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. He will ask students to find the value of x and the lengths of each side of the triangle. **Of the following sets of algebraic expressions, indicate whether the set is usable.**

		Yes	No
i	$AB = 2x + 3, AC = 2x + 5, BC = x - 2$		
ii	$AB = x - 5, AC = 2x + 3, BC = x - 2$		
iii	$AB = 3x - 5, AC = 2x + 3, BC = 5x + 7$		
iv	$AB = x + 5, AC = 2x - 3, BC = 2x$		

Quelques prolongements ou remises en question

L'analyse quantitative suggère que ces deux tâches mettent en jeu des connaissances différentes :

« Nous avons constaté des différences dans les effets de l'expérience des enseignants en matière d'enseignement de la géométrie (et d'autres matières) sur leurs scores SMK_USW et SMK_CGP. En particulier, le nombre d'années d'enseignement de la géométrie a eu un effet légèrement plus important sur le score SMK_USW que sur le score SMK_CGP. (…) L'effet plus marqué des années d'enseignement de la géométrie sur SMK_USW que sur SMK_CGP est compréhensible dans la mesure où la compréhension du travail des élèves est une tâche que chaque enseignant doit accomplir fréquemment, alors que le CGP est une tâche plus rare qui n'est peut-être accomplie que par les enseignants qui conçoivent leurs propres problèmes. »

« (…) cette étude apporte des contributions théoriques et méthodologiques à l'étude de la MKT telle qu'elle a été initialement conceptualisée par Ball et al. (2008), en particulier à leur conceptualisation de la partie de la MKT appelée SMK et à leur affirmation sur l'existence du SCK. Nous montrons qu'il est possible de maintenir l'affirmation selon laquelle les enseignants font un usage particulier des mathématiques dans leur travail d'enseignement, même si nous ne prétendons pas que le SCK est un domaine séparable. (…) Dans notre cas, la meilleure adéquation d'un modèle bidimensionnel vient étayer notre argument selon lequel les distinctions entre les tâches d'enseignement sont pertinentes pour la définition de la MKT. Cet argument vient appuyer l'affirmation plus fondamentale de Ball et al. (2001) selon laquelle la MKT ne peut être réduite aux connaissances mathématiques acquises dans le cadre de cours de mathématiques. En effet, le fait qu'un enseignant connaisse bien un sujet mathématique lorsqu'il étudie les mathématiques ne signifie pas nécessairement qu'il soit capable d'utiliser ce même sujet pour créer des problèmes pour ses élèves ou pour comprendre ce que ses élèves ont fait. Nos résultats suggèrent la possibilité que la capacité à utiliser ces connaissances dans différentes tâches d'enseignement puisse être différente. »

Annexe 2

https://www.educ.msu.edu/kat/

Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices

Author(s): Raven McCrory, Robert Floden, Joan Ferrini-Mundy, Mark D. Reckase and Sharon L. Senk

Source: *Journal for Research in Mathematics Education*, November 2012, Vol. 43, No. 5 (November 2012), pp. 584-615

Defining what teachers need to know to teach algebra successfully is important for informing teacher preparation and professional development efforts. Based on prior research, analysis of video, interviews with teachers, and analysis of textbooks, we define categories of knowledge and practices of teaching for understanding and assessing teachers' knowledge for teaching algebra. The three categories of knowledge — *school, advanced, and teaching* — build on the work of Ball and others for elementary school teaching and take into account the recommendations of the Conference Board of the Mathematical Sciences (2001, 2012) for secondary school teachers' knowledge of post-secondary mathematics. Three categories of teaching practices — *trimming, bridging, and decompressing* — address mathematical uses of knowledge specific to teaching. We argue that the combination of categories and practices must be covered in assessments of teacher knowledge, if the assessments are to be used in research that investigates the presumed links among teachers' content preparation, their knowledge, their practice, and student learning.

Table 1

An Example of School Knowledge and Teaching Knowledge in the Framework

	Uses of Knowledge		
	Trimming	Bridging	Decompressing
School knowledge (polynomials)	Using both parameters and numerical coefficients fluently	Place value and base 10 notation	Using and understanding symbolic notations for polynomial expressions (e.g., $ax^2 + 5bx + c$)
Teaching knowledge (polynomials)	Knowing the mathematical entailments of parameters as compared to numerical coefficients	Knowing how polynomials are related to place value and base 10 notation.	Attending to different meanings of similar symbols: *ab* means *a* times *b*; 10 means ten, or $1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, not 1 times 0

Table 2

An Example of Advanced Knowledge and Teaching Knowledge in the Framework

	Uses of Knowledge		
	Trimming	Bridging	Decompressing
Advanced knowledge (of slope and derivative)	Calculating slope algebraically	Slope as rate of change; as instantaneous rate of change; as derivative	Knowing different formulae for representing or calculating slope
Teaching knowledge (of slope and derivative)	Knowing where slope in algebra is used in calculus and attending to appropriate definitions	Methods of graphing instantaneous rates of change and slopes; affordances of different definitions and representations of slope	Knowing that slope as *rise over run* can lead to confusion (if rise corresponds to a negative number), and limiting the idea to linear functions