

Les points essentiels :

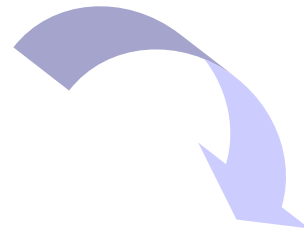
- 1/ Les articulations de la méthode des moindres carrés
- 2/ La notion d'erreur-type
- 3/ Mise en œuvre de l'utilitaire d'analyse

Construction d'une droite de régression (1/2)...

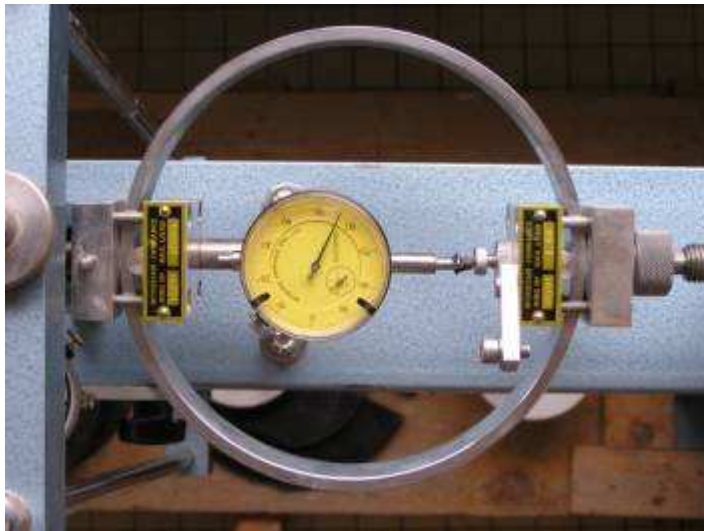
François Louvet
Ecole Nationale Supérieure de Céramique Industrielle
47 – 73 Avenue Albert Thomas
87065 Limoges Cedex
francois.louvet@unilim.fr

L'anneau dynamométrique

$$\Delta_{\text{Diamètre}} = \frac{R^3 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \right) F}{EI}$$

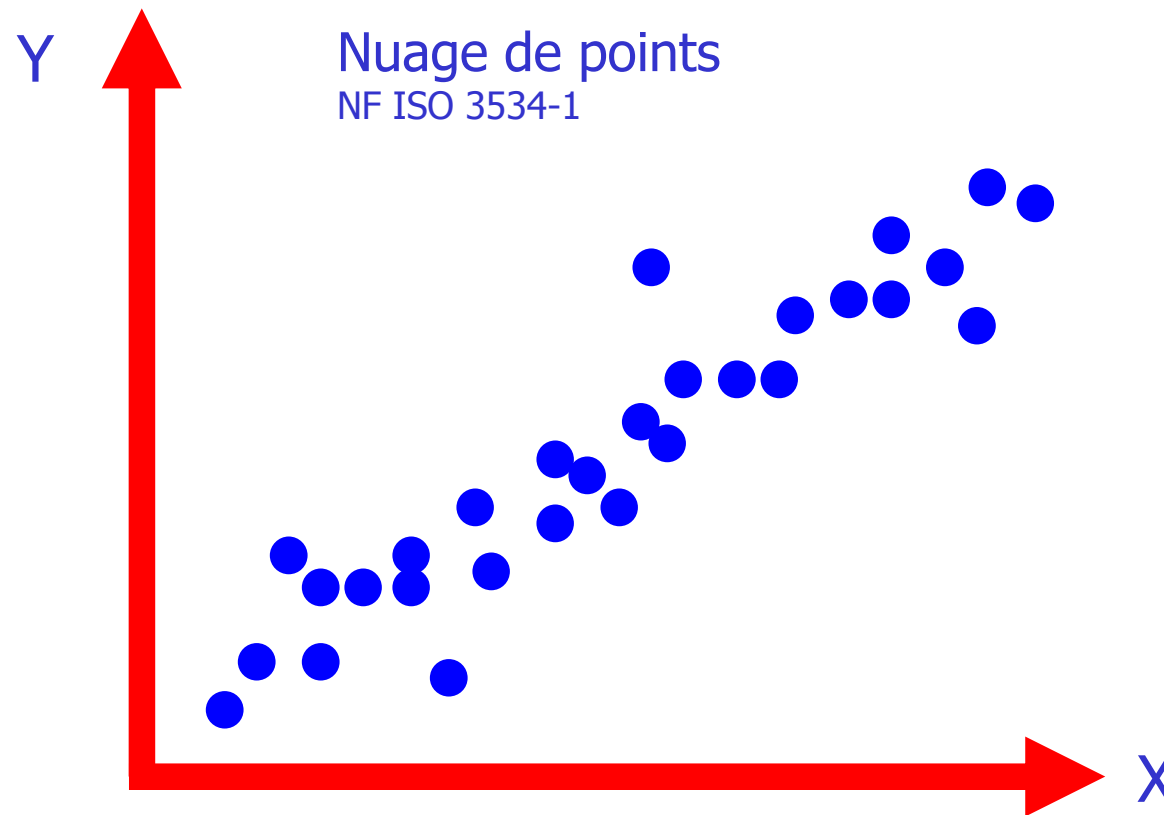


$$Y = \beta X$$



L'anneau dynamométrique

- Contexte général



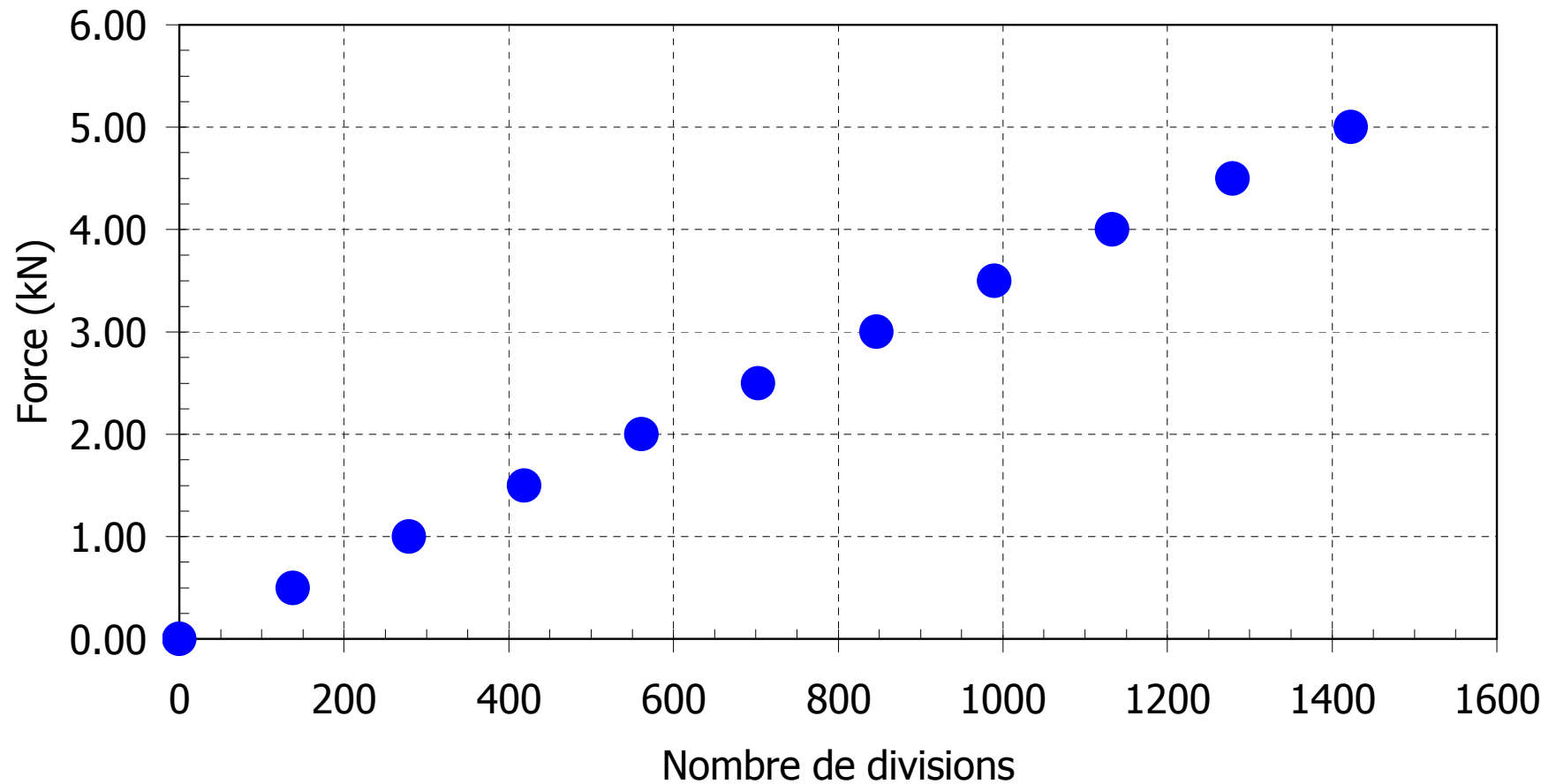
Définition ...

- Nuage de points :
 - Représentation graphique consistant en un ensemble de points dont les coordonnées x et y (sur des axes rectangulaires classiques) sont les valeurs des variables associées X et Y .
 - Un ensemble de n individus fournit donc n points dont la dispersion montre la relation entre X et Y .
 - Le concept de nuage de points peut être étendu à plus de deux caractères.

(NF ISO 3534-1)

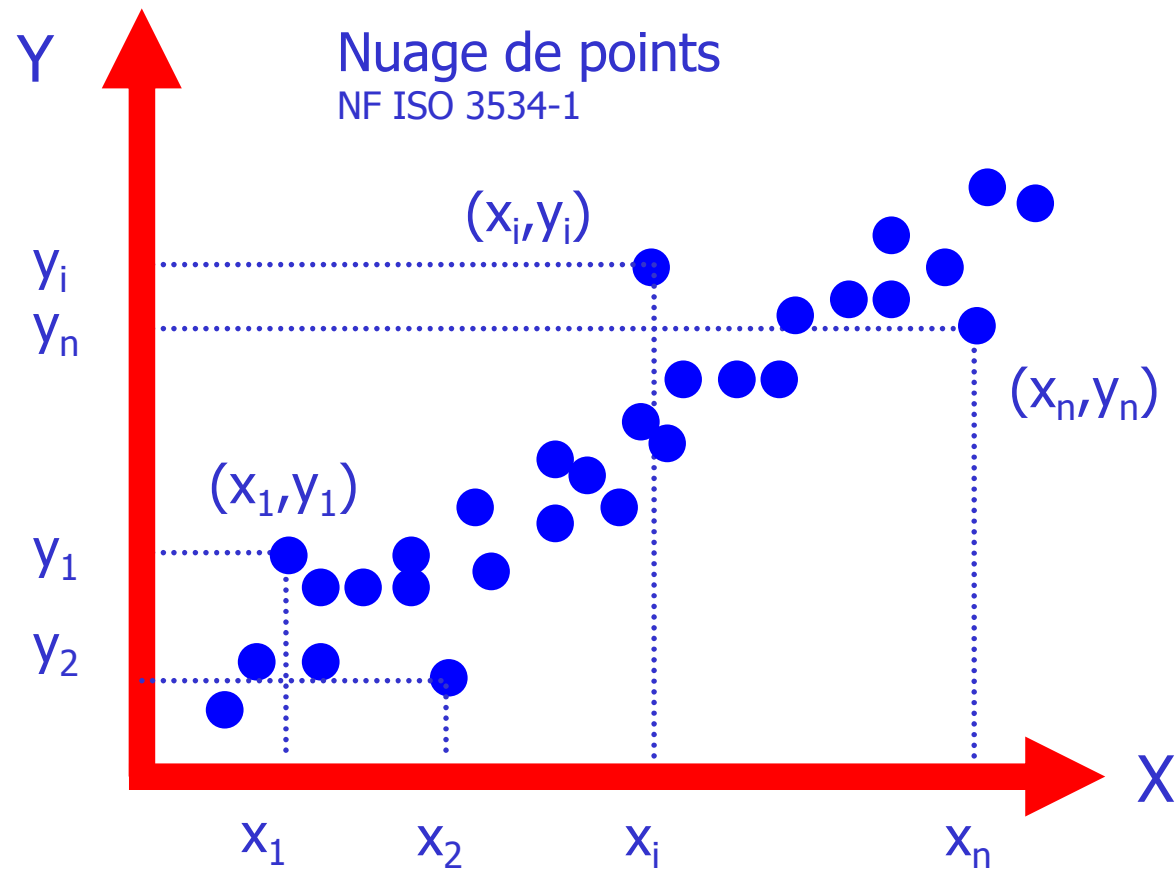
L'anneau dynamométrique

Nuage de points



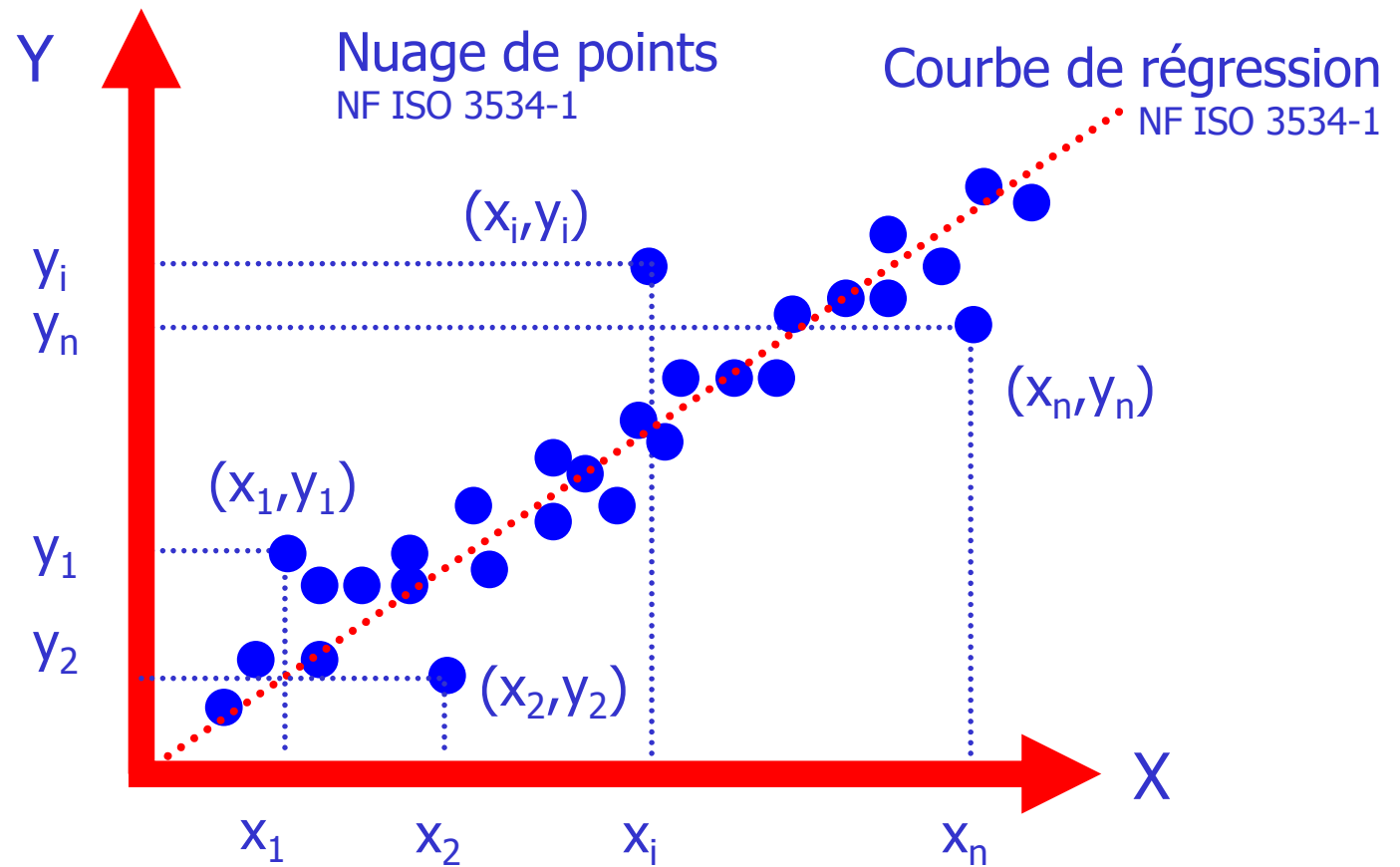
L'anneau dynamométrique

- Contexte général



L'anneau dynamométrique

- Contexte général



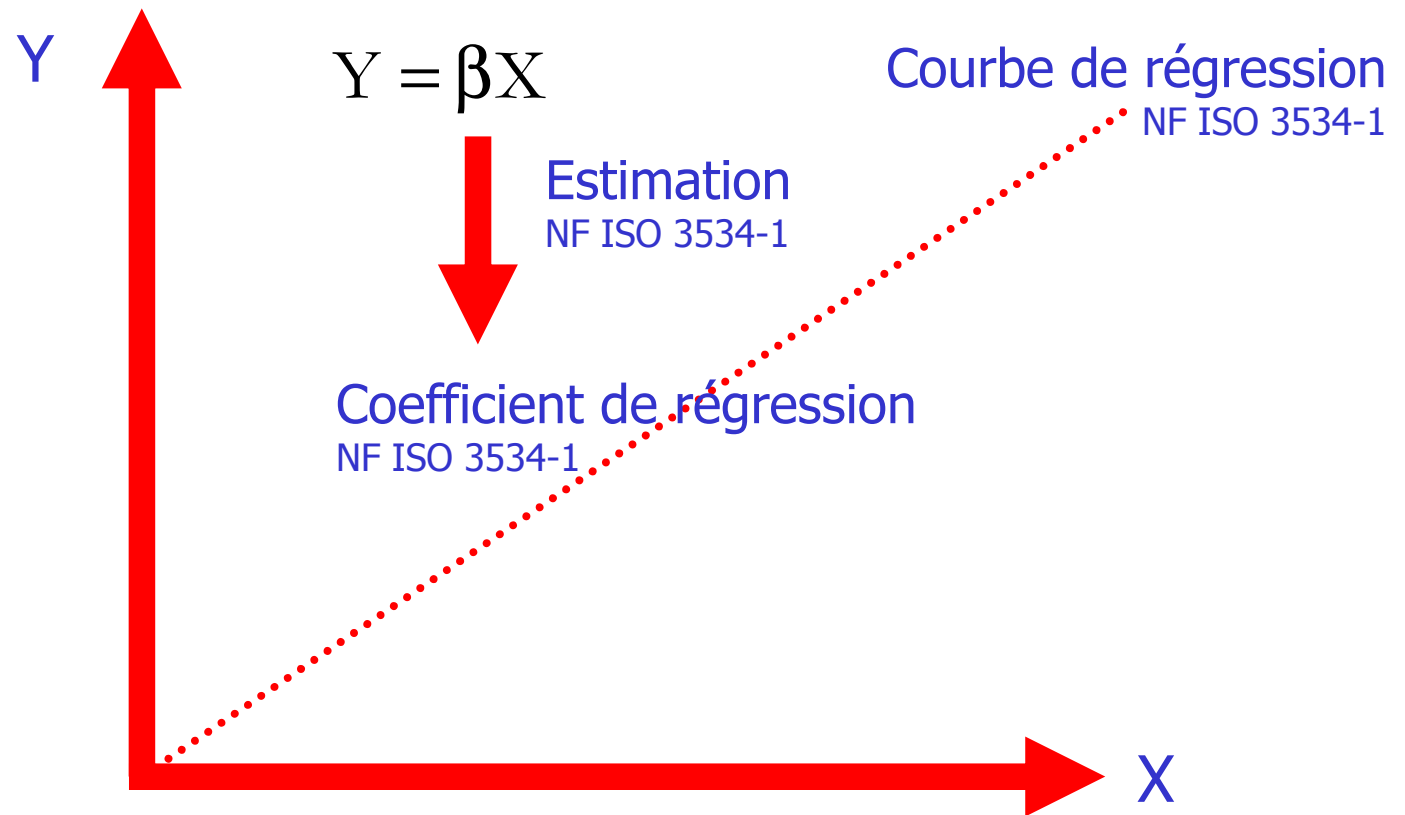
Définition ...

- Courbe de régression :
 - Pour un *échantillon* de n couples d'observations de deux caractères X et Y , la courbe de régression de Y sur X est une représentation de Y comme fonction de X .

(NF ISO 3534-1)

L'anneau dynamométrique

- Contexte général



Définition ...

- Estimation :
 - Opération ayant pour but, à partir de résultats d'essais dans un *échantillon*, d'attribuer des valeurs numériques aux paramètres d'une loi prise comme modèle statistique de la *population* dont est issu l'échantillon.
 - Le résultat de cette opération peut être exprimé sous la forme d'une valeur unique (*estimateur*) ou sous la forme d'un intervalle (*intervalle de confiance*).

(NF ISO 3534-1)

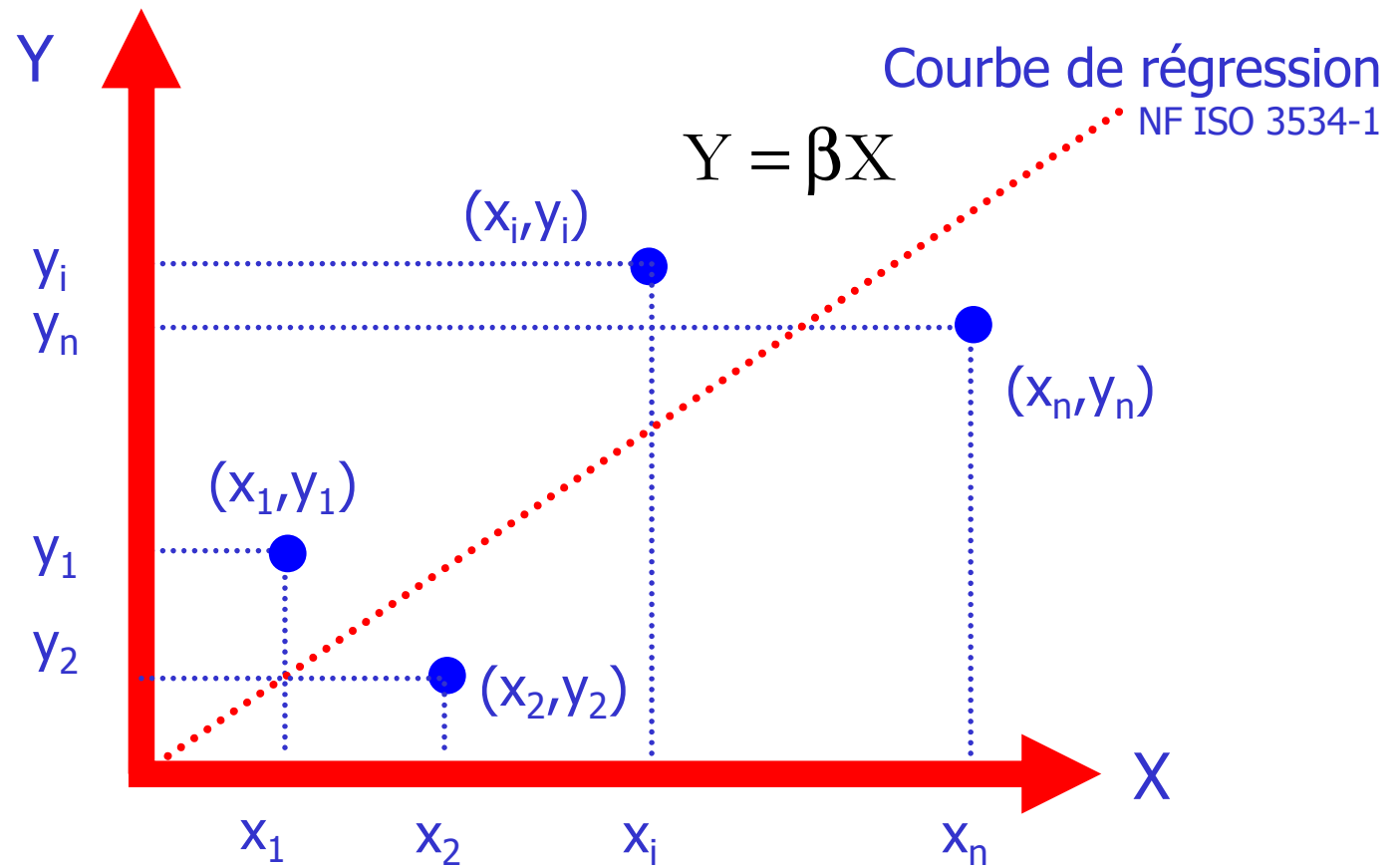
Définition ...

- Coefficient de régression :
 - Coefficient d'une variable dans l'équation de la *courbe de régression* ou de la surface de régression.

(NF ISO 3534-1)

L'anneau dynamométrique

- Contexte général



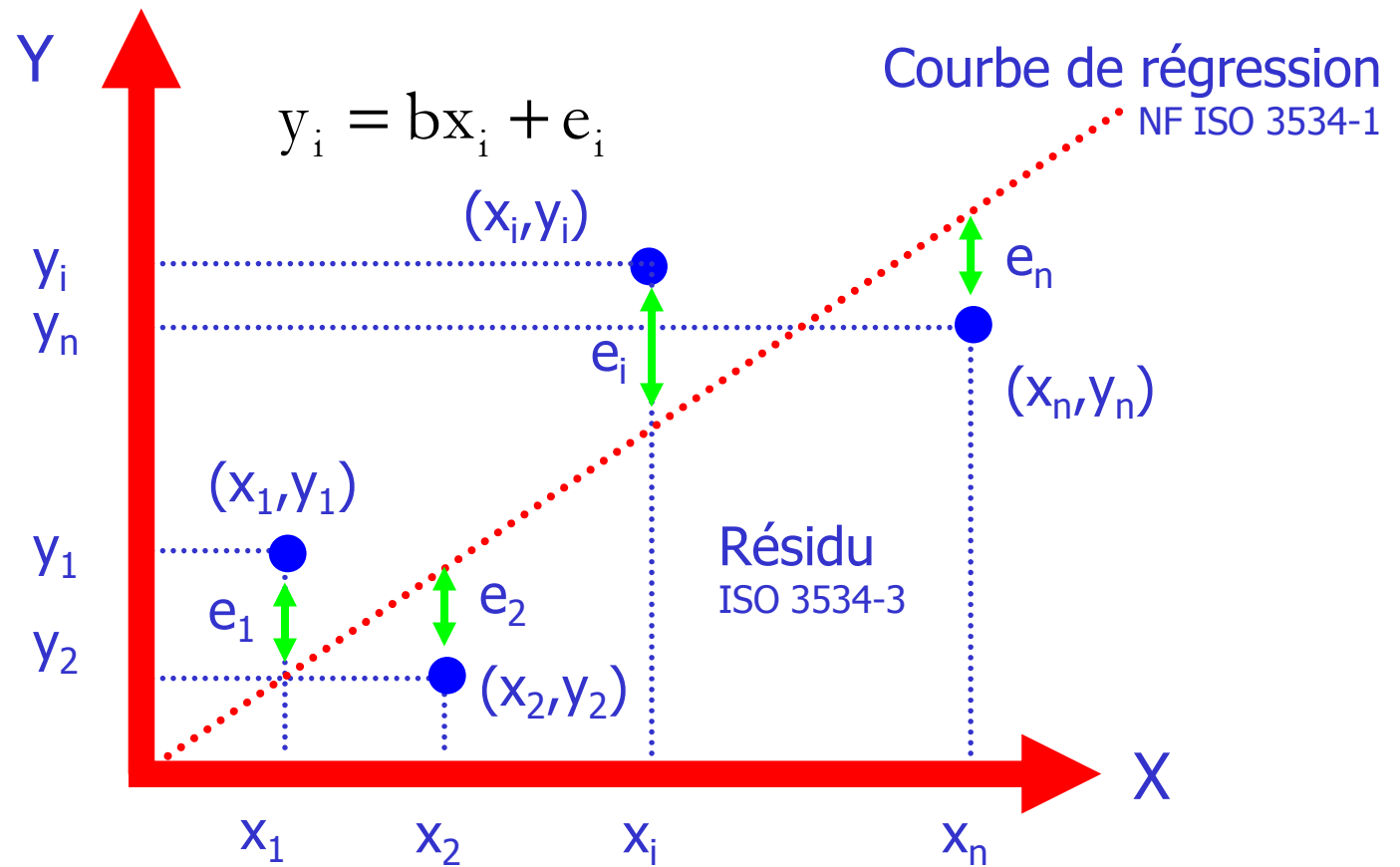
L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$Y = \beta X \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = bx_1 + e_1 \\ y_2 = bx_2 + e_2 \\ \dots \\ y_i = bx_i + e_i \\ \dots \\ y_n = bx_n + e_n \end{cases}$$

L'anneau dynamométrique

- Contexte général



L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = bx_1 + e_1 \\ y_2 = bx_2 + e_2 \\ \dots \\ y_i = bx_i + e_i \\ \dots \\ y_n = bx_n + e_n \end{array} \right.$$

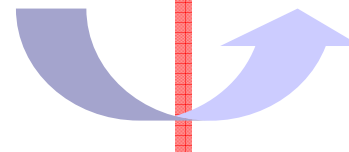
\Rightarrow

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_i \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

n couples
d'observations

(n+1)
inconnues

Méthode des moindres carrés
ISO 3534-3



Résidu
ISO 3534-3

Définition ...

- Méthode des moindres carrés :
 - Technique d'*estimation* de paramètres multiples qui minimise Σe^2 , où e est la différence entre la valeur observée et la valeur prévue par le modèle théorique.

(ISO 3534-3)

L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_i \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Résidu
ISO 3534-3

$$\Rightarrow e_i = y_i - bx_i$$


Méthode des
moindres carrés
ISO 3534-3

Minimiser $SCE = \sum_{i=1}^n e_i^2$

L'anneau dynamométrique


- Contexte général

Minimiser $SCE = \sum_{i=1}^n e_i^2$


$$\begin{cases} \frac{\partial SCE}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial^2 SCE}{\partial b^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial b} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2 \right] > 0 \end{cases}$$

L'anneau dynamométrique


- Contexte général


$$\frac{\partial \text{SCE}}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial b} \left[\sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2bx_i y_i + b^2 x_i^2) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \text{SCE}}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial b} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2b \sum_{i=1}^n x_i y_i + b^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 0$$

L'anneau dynamométrique

- Contexte général


$$\frac{\partial \text{SCE}}{\partial b} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial \text{SCE}}{\partial b} = 0 \Rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Estimateur
NF ISO 3534-1

Définition ...

- Estimateur :
 - *Statistique* pour estimer un paramètre d'une *population* .
- (NF ISO 3534-1)

L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$\frac{\partial^2 \text{SCE}}{\partial b^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2$$



$$\frac{\partial^2 \text{SCE}}{\partial b^2} > 0$$

L'anneau dynamométrique

Microsoft Excel - Exercice 15 - Droite de régression (1)

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?

Tahoma 10 G I S

D18 = =DROITEREG(D4:D14;C4:C14;FAUX;FAUX)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Certificat d'étalonnage											
2												
3		N°	Division	Force (kN)								
4		1	0	0.00								
5		2	138	0.50								
6		3	279	1.00								
7		4	419	1.50								
8		5	561	2.00								
9		6	703	2.50								
10		7	847	3.00								
11		8	990	3.50								
12		9	1133	4.00								
13		10	1279	4.50								
14		11	1423	5.00								
15												
16			Coefficient b									
17												
18				0.003530142								
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												
30												
31												
32												
33												

DROITEREG

Y_connus D4:D14 = {0;0.5;1;1.5;2;2.5;

X_connus C4:C14 = {0;138;279;419;561;

Constante FAUX = FAUX

Statistiques FAUX = FAUX

Résultat = 0.003530142

Renvoie une matrice qui décrit une droite de corrélation pour vos données, calculée avec la méthode des moindres carrés.

Constante est une valeur logique: la constante b est calculée normalement si Constante = VRAI ou omise; b est égale à 0 si Constante = FAUX.

OK Annuler

L'anneau dynamométrique

Microsoft Excel - Exercice 15 - Droite de régression (1)

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?

Tahoma 10 G I S

D18 = =DROITEREG(D4:D14;C4:C14;FAUX;FAUX)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Certificat d'étalonnage											
2												
3		N°	Division	Force (kN)								
4		1	0	0.00								
5		2	138	0.50								
6		3	279	1.00								
7		4	419	1.50								
8		5	561	2.00								
9		6	703	2.50								
10		7	847	3.00								
11		8	990	3.50								
12		9	1133	4.00								
13		10	1279	4.50								
14		11	1423	5.00								
15												
16			Coefficient b									
17												
18				0.003530142								
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												
30												
31												
32												
33												

DROITEREG

Y_connus D4:D14 = {0;0.5;1;1.5;2;2.5;

X_connus C4:C14 = {0;138;279;419;561;

Constante FAUX = FAUX

Statistiques FAUX = FAUX

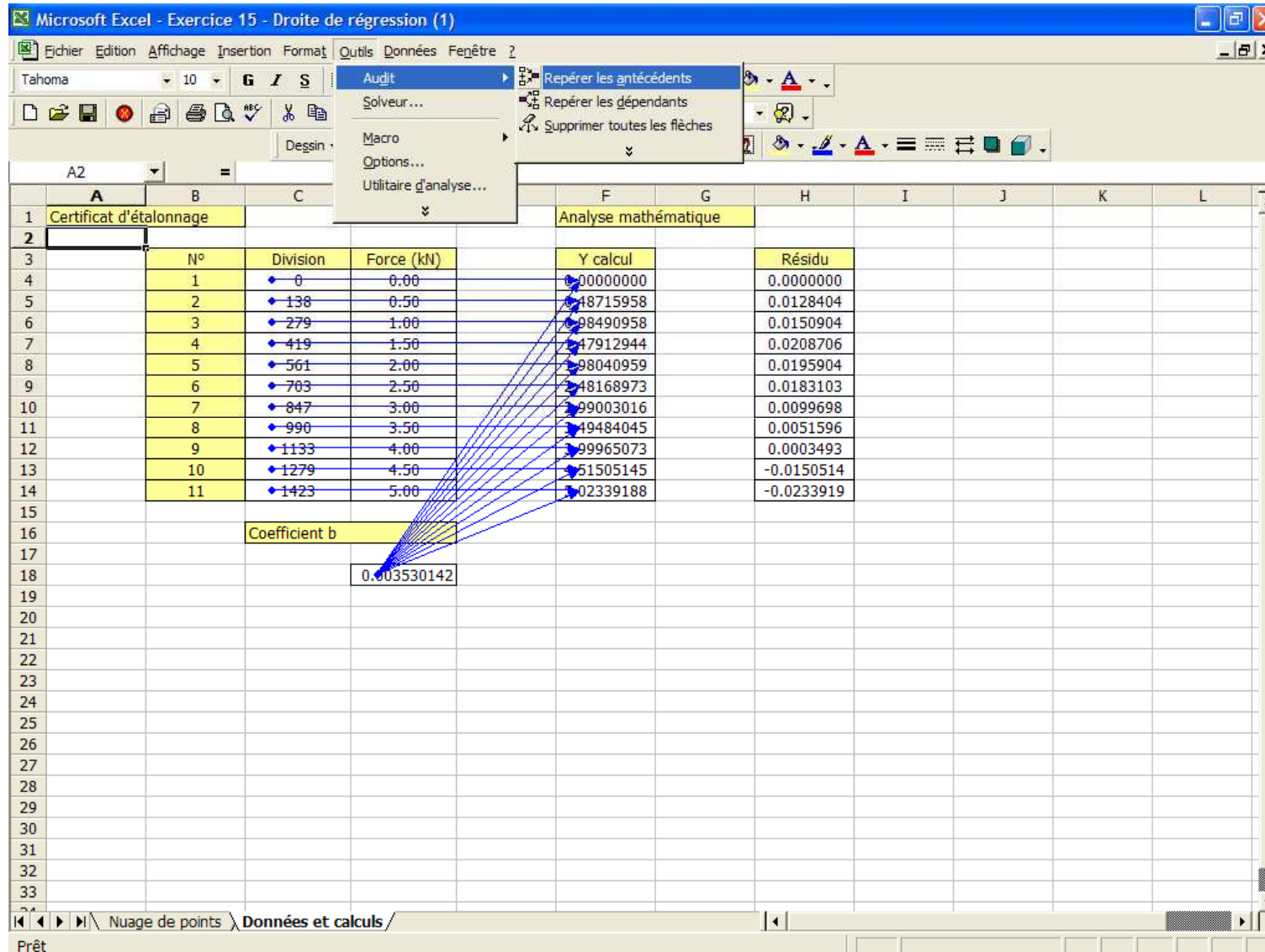
Résultat = 0.003530142

Renvoie une matrice qui décrit une droite de corrélation pour vos données, calculée avec la méthode des moindres carrés.

Constante est une valeur logique: la constante b est calculée normalement si Constante = VRAI ou omise; b est égale à 0 si Constante = FAUX.

OK Annuler

L'anneau dynamométrique



L'anneau dynamométrique

The screenshot shows an Excel spreadsheet titled 'Microsoft Excel - Exercice 15 - Droite de régression (1)'. The spreadsheet contains data for a linear regression analysis. The data is organized into columns: A (Certificat d'étalonnage), B (N°), C (Division), D (Force (kN)), E (Y calcul), and F (Résidu). The 'Utilitaire d'analyse' dialog box is open, showing the 'Régression linéaire' option selected. The spreadsheet also shows the calculated coefficient 'b' in cell D18, which is 0.003530142.

N°	Division	Force (kN)	Y calcul	Résidu
1	0	0.00	0.00000000	0.00000000
2	138	0.50	0.48715958	0.0128404
3	279	1.00	0.98490958	0.0150904
4	419	1.50	1.47912944	0.0208706
5	561	2.00	1.98040959	0.0195904
6	703	2.50		
7	847	3.00		
8	990	3.50		
9	1133	4.00		
10	1279	4.50		
11	1423	5.00		

Utilitaire d'analyse

Outils d'analyse

- Histogramme
- Moyenne mobile
- Génération de nombres aléatoires
- Analyse de position
- Régression linéaire**
- Échantillonnage
- Test d'égalité des espérances: observations paires
- Test d'égalité des espérances: deux observations de variances égales
- Test d'égalité des espérances: deux observations de variances différentes
- Test de la différence significative minimale (z-test)

OK
Annuler
Aide

Coefficient b
0.003530142

L'anneau dynamométrique

Certificat d'étalonnage			Analyse mathématique		
N°	Division	Force (kN)	Y calcul	Résidu	
1	0	0.00	0.00000000	0.00000000	
2	138	0.50	0.48715958	0.0128404	
3	279	1.00	0.98490958	0.0150904	
4	419	1.50	1.47912944	0.0208706	
5	561	2.00	1.98040959	0.0195904	
6	703	2.50	2.48168973	0.0183102	
7	847	3.00			
8	990	3.50			
9	1133	4.00			
10	1279	4.50			
11	1423	5.00			

Coefficient b: 0.003530142

L'anneau dynamométrique

Microsoft Excel - Exercice 15 - Droite de régression (1)

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?

Tahoma 10 G I S

Dessin Formes automatiques

A1 = RAPPORT DÉTAILLÉ

	A	B	C	D	E	F
1	RAPPORT DÉTAILLÉ					
2						
3	<i>Statistiques de la régression</i>					
4	Coefficient de détermination multiple	0.999955506				
5	Coefficient de détermination R^2	0.999911015				
6	Coefficient de détermination R^2	0.899911015				
7	Erreur-type	0.015643191				
8	Observations	11				
9						
10	ANALYSE DE VARIANCE					
11		<i>Degré de liberté</i>	<i>Somme des carrés</i>	<i>Moyenne des carrés</i>	<i>F</i>	<i>Valeur critique de F</i>
12	Régression	1	27.49755291	27.49755291	112368.1849	9.52431E-20
13	Résidus	10	0.002447094	0.000244709		
14	Total	11	27.5			
15						
16		<i>Coefficients</i>	<i>Erreur-type</i>	<i>Statistique t</i>	<i>Probabilité</i>	<i>Limite inférieure pour seuil de confiance = 95%</i>
17	Constante	0	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A
18	Variable X 1	0.003530142	5.62889E-06	627.1472292	2.6143E-24	0.0035176
19						
20						
21						
22	ANALYSE DES RÉSIDUS					
23						
24	<i>Observation</i>	<i>Prévisions pour Y</i>	<i>Résidus</i>			
25	1	0	0			
26	2	0.487159578	0.012840422			
27	3	0.984909581	0.015090419			
28	4	1.479129442	0.020870558			
29	5	1.980409587	0.019590413			
30	6	2.481689732	0.018310268			
31	7	2.990030161	0.009969839			
32	8	3.494840447	0.005159553			
33	9	3.999650734	0.000349266			

Prêt

L'anneau dynamométrique

The screenshot shows an Excel spreadsheet titled "Microsoft Excel - Exercice 15 - Droite de régression (1)". The active cell is A22, containing the text "ANALYSE DES RÉSIDUS". The spreadsheet contains a table with 11 rows of data. The first row (row 24) is the header, and the following 10 rows (rows 25-35) contain numerical data. Two red arrows point to the "Prévisions pour Y" and "Résidus" columns.

Observation	Prévisions pour Y	Résidus
1	0	0
2	0.487159578	0.012840422
3	0.984909581	0.015090419
4	1.479129442	0.020870558
5	1.980409587	0.019590413
6	2.481689732	0.018310268
7	2.990030161	0.009969839
8	3.494840447	0.005159553
9	3.999650734	0.000349266
10	4.515051447	-0.015051447
11	5.023391875	-0.023391875

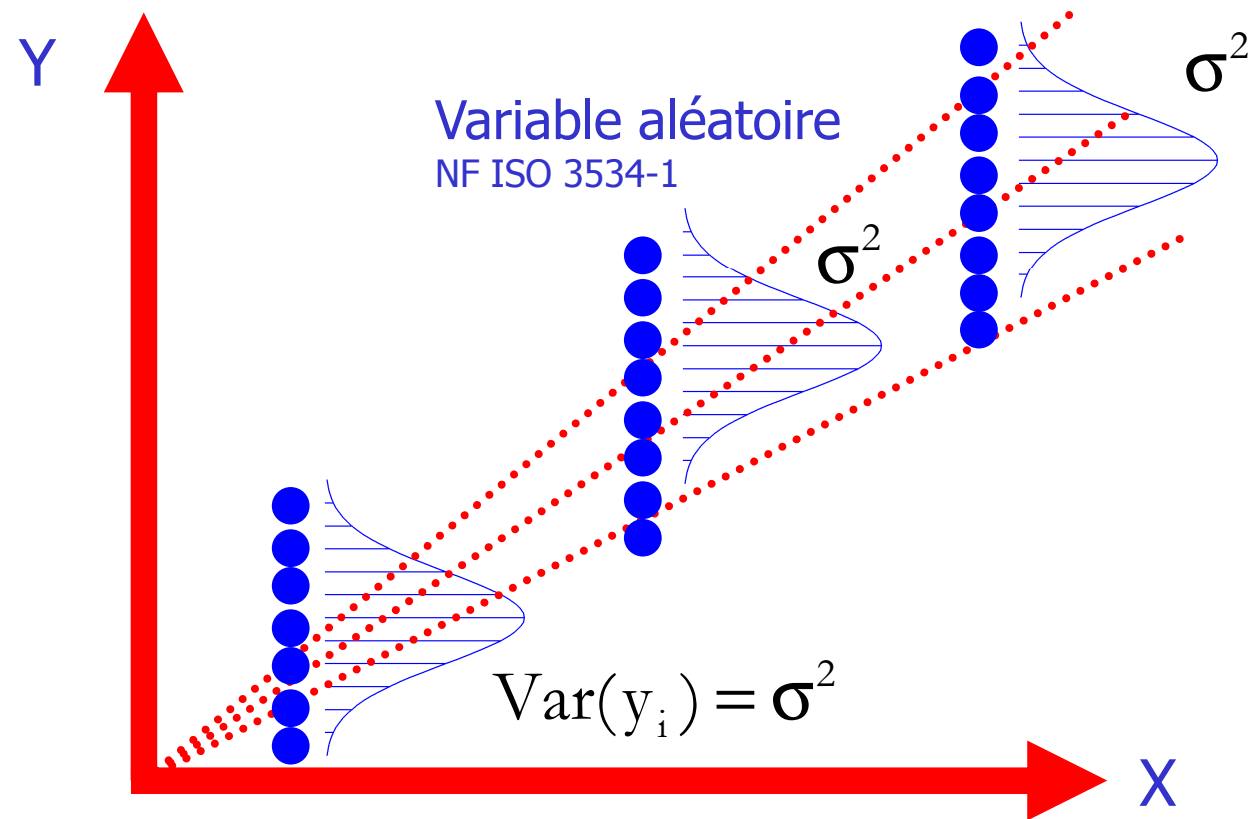
Définition ...

- Erreur-type :
 - *Ecart-type* d'un *estimateur*.

(NF ISO 3534-1)

L'anneau dynamométrique

- Contexte général



L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$



$$\text{Var}(b) = \text{Var} \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$$

L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$\text{Var}(\lambda U) = \lambda^2 \text{Var}(U)$$



$$\text{Var}(b) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)$$

L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$\text{Var}(b) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)$$



$$\text{Var}(b) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} \text{Var}\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_i y_i + \dots + x_n y_n\right)$$

L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$\text{Var}(U + V) = \text{Var}(U) + \text{Var}(V) + 2 \text{cov}(U, V)$$



$$\text{Var}(b) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2} \left[x_1^2 \text{Var}(y_1) + \dots + x_n^2 \text{Var}(y_n) \right]$$

L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$\text{Var}(y_i) = \sigma^2 \quad \forall i$$



$$\text{Var}(b) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} \left[x_1^2 \sigma^2 + \dots + x_i^2 \sigma^2 + \dots + x_n^2 \sigma^2 \right]$$

L'anneau dynamométrique

- Contexte général

$$\text{Var}(b) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^2} \sigma^2$$

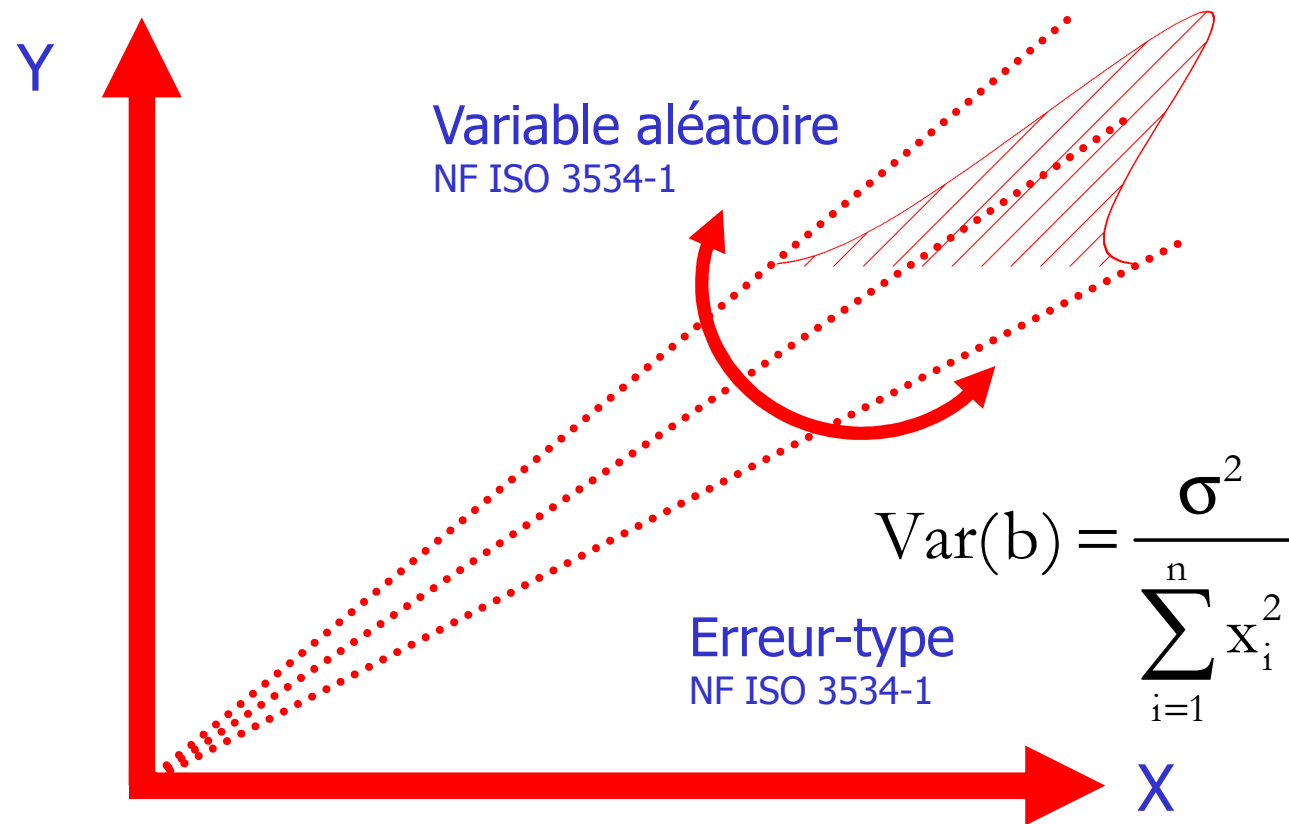


Erreur-type
NF ISO 3534-1

$$\text{Var}(b) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

L'anneau dynamométrique

- Contexte général



L'anneau dynamométrique

Microsoft Excel - Exercice 15 - Droite de régression (1)

Formule active: $=\{=DROITEREG(D4:D14;C4:C14;FAUX;VRAI)\}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Certificat d'étalonnage					Analyse mathématique				Analyse statistique		
2												
3		N°	Division	Force (kN)		Y calcul		Résidu		0.003530142		
4		1	0	0.00		0.00000000		0.00000000		5.62889E-06		
5		2	138	0.50		0.48715958		0.0128404		0.999911015		
6		3	279	1.00		0.98490958		0.0150904		112368.1849		
7		4	419	1.50		1.47912944		0.0208706		27.49755291		
8		5	561	2.00		1.98040959		0.0195904				
9		6	703	2.50		2.48168973		0.0183103				
10		7	847									
11		8	990									
12		9	1133									
13		10	1279									
14		11	1423									
15												
16			Coefficient b									

DROITEREG

Y_connus D4:D14 = {0;0.5;1;1.5;2;2.5;

X_connus C4:C14 = {0;138;279;419;561;

Constante FAUX = FAUX

Statistiques VRAI = VRAI

= {0.00353014186601037}

Renvoie une matrice qui décrit une droite de corrélation pour vos données, calculée avec la méthode des moindres carrés.

Statistiques est une valeur logique: renvoyer les statistiques de régression complémentaires = VRAI; renvoyer les coefficients m ou la constante b = FAUX ou omis.

Résultat = 0.003530142

OK Annuler

Ctrl+Shift+Enter

L'anneau dynamométrique

Microsoft Excel - Exercice 15 - Droite de régression (1)

Formules automatiques

C18 = 5.62888856307592E-06

	A	B	C	D	E	F
10	ANALYSE DE VARIANCE					
11		<i>Degré de liberté</i>	<i>Somme des carrés</i>	<i>Moyenne des carrés</i>	<i>F</i>	<i>Valeur critique de F</i>
12	Régression	1	27.4975291	27.4975291	112368.1849	9.52431E-20
13	Résidus	10	0.0002447094	0.000244709		
14	Total	11	27.5			
15						
16		<i>Coefficients</i>	<i>Erreur-type</i>	<i>Statistique t</i>	<i>Probabilité</i>	<i>Limite inférieure pour seuil de confiance = 95%</i>
17	Constante	0	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A
18	Variable X 1	0.003530142	5.62889E-06	627.1472292	2.6143E-24	0.0035176
19						
20						
21						
22	ANALYSE DES RÉSIDUS					
23						
24	<i>Observation</i>	<i>Prévisions pour Y</i>	<i>Résidus</i>			
25	1	0	0			
26	2	0.487159578	0.012840422			
27	3	0.984909581	0.015090419			
28	4	1.479129442	0.020870558			
29	5	1.980409587	0.019590413			
30	6	2.481689732	0.018310268			
31	7	2.990030161	0.009969839			
32	8	3.494840447	0.005159553			
33	9	3.999650734	0.000349266			
34	10	4.515051447	-0.015051447			
35	11	5.023391875	-0.023391875			
36						
37						
38						
39						
40						
41						
42						

Données et calculs / Nuage de points / Utilitaire d'analyse /

Prêt

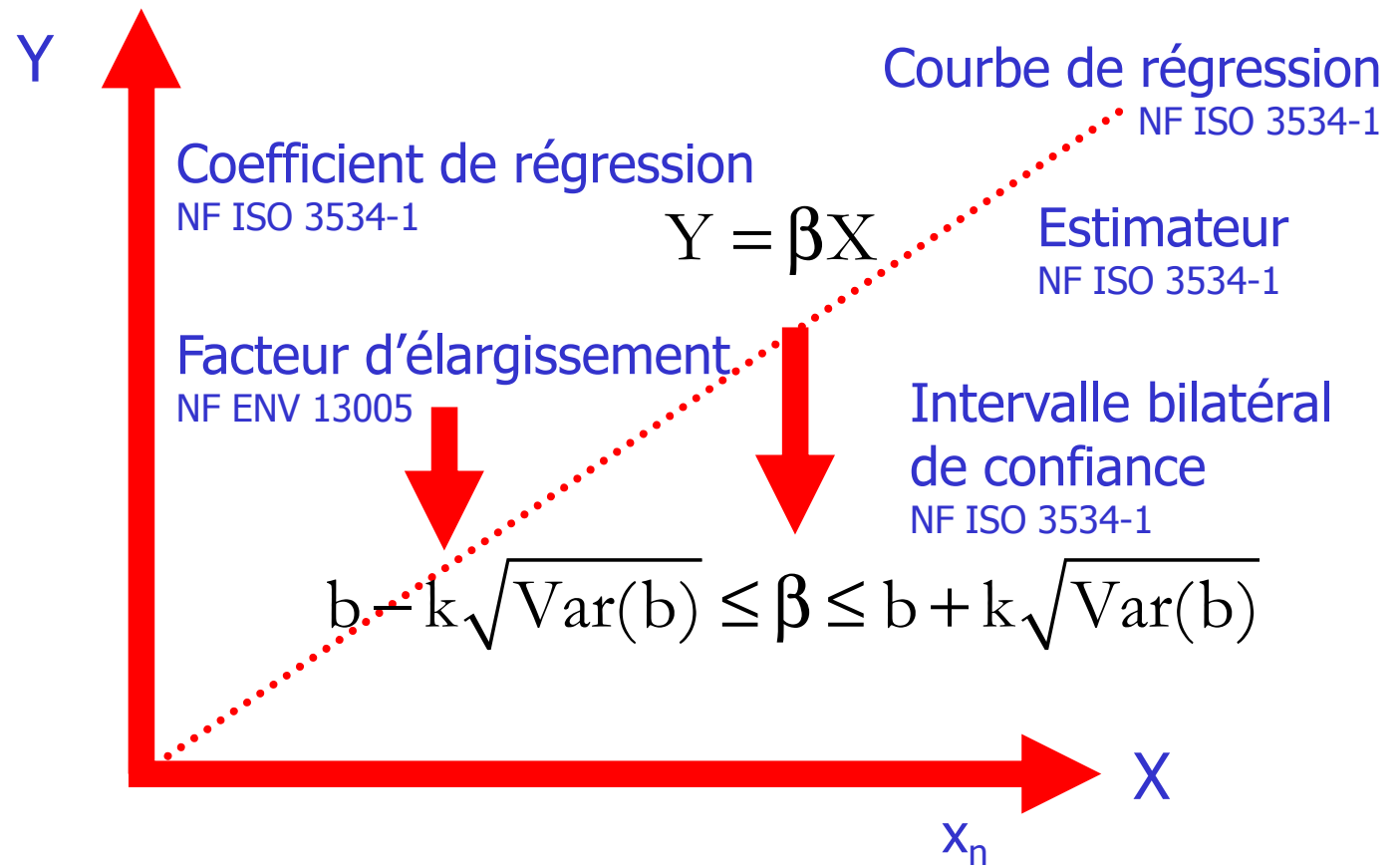
Définition ...

- Intervalle de confiance bilatéral :
 - Quand T_1 et T_2 sont deux fonctions des valeurs observées telles que, θ étant un paramètre de population à estimer, la probabilité $P_r[T_1 \leq \theta \leq T_2]$ soit au moins égale à $(1-\alpha)$, l'intervalle entre T_1 et T_2 est un intervalle de confiance bilatéral à $(1-\alpha)$ pour θ .
 - $(1-\alpha)$ étant un nombre fixé positif et inférieur à 1.

(NF ISO 3534-1)

L'anneau dynamométrique

- Contexte général



L'anneau dynamométrique

	D	E	F	G	H
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11	<i>Moyenne des carrés</i>	<i>F</i>	<i>Valeur critique de F</i>		
12	27.49755291	112368.1849	9.52431E-20		
13	0.000244709				
14					
15					
16	<i>Statistique t</i>	<i>Probabilité</i>	<i>Limite inférieure pour seuil de confiance = 95%</i>	<i>Limite supérieure pour seuil de confiance = 95%</i>	<i>Limite inférieure pour seuil de</i>
17	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A
18	627.1472292	2.6143E-24	0.0035176	0.003542684	
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					
31					
32					
33					
34					
35					

Définition ...

- Facteur d'élargissement :
 - Facteur numérique utilisé comme multiplicateur de l'*incertitude-type composée* pour obtenir l'*incertitude élargie*.
 - Un facteur d'élargissement k a sa valeur typiquement comprise entre 2 et 3.

(NF ENV 13005)