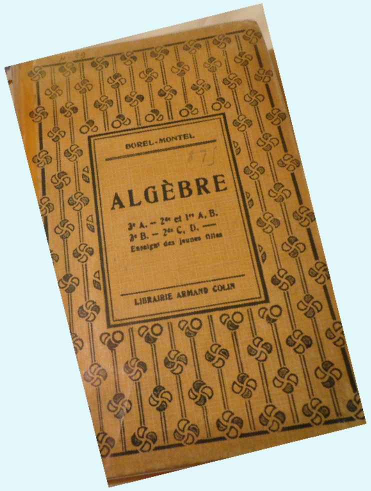
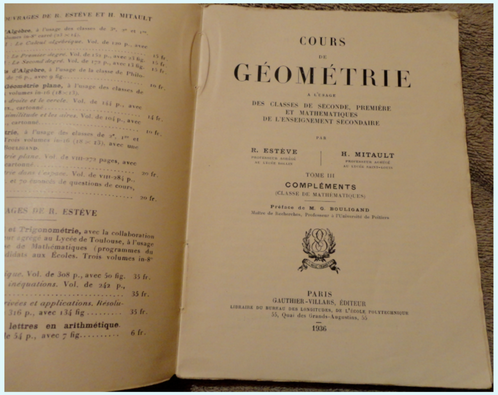
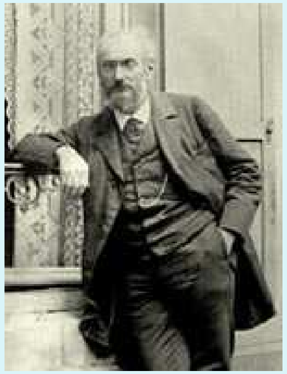
L'enseignement des mathématiques au XX° siècle. Quelques grands moments, de réforme en réforme





Anne Boyé, Limoges, 8 janvier 2014

Variations sur un même thème ?



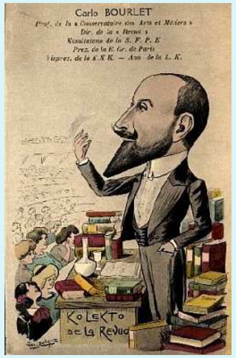
Ch. A. Laisant
(1841-1920)

- « *Le problème est éternellement le même, intéresser l'élève, le provoquer à la recherche, lui donner sans cesse le sentiment (l'illusion si l'on veut) qu'il découvre lui-même ce qui lui est enseigné.* »
  - Charles-Ange Laisant (1898).

- *Depuis le commencement de notre siècle, tous les pédagogues et les réformateurs de l'enseignement des mathématiques, comme par exemple les créateurs du programme de Méray et les partisans fervents des conceptions pédagogiques de Félix Klein, ont souligné le rôle de l'activité mathématique personnelle et multilatérale de l'élève dans son initiation au monde des idées mathématiques. (…) En réalité il existe un grand abîme entre le principe pédagogique de « l'école active » et la manière de son incorporation dans « l'enseignement des mathématiques pour tous ». L'activation des élèves très doués, groupés dans des classes sélectionnées, ne pose pas de problème difficile. Mais ce qui est plus difficile, c'est de trouver les procédés favorables à l'activation mathématique de la majorité des élèves moyens ou plus faibles.* A. Z. Krygowska, CIEM 1966, Développement de l'activité mathématique des élèves et rôle des problèmes dans ce développement.

Felix Klein(1849-1925)

1900 - 1970



Carlo Bourlet
(1866-1913)

Chacune de ces dates symbolise un moment de réforme, de rupture dans l'enseignement des mathématiques

« L'enseignement des mathématiques, dans nos lycées, collèges, gymnases de tous pays, passe actuellement par ce que d'aucuns nomment une crise et qui n'est en somme qu'une fièvre de croissance, un malaise né de la rapidité même de l'évolution du savoir humain. (…) L'industrie, fille de la science du XIX° siècle règne en maîtresse dans le monde. Notre devoir impérieux est donc de préparer nos jeunes gens, à connaître, à pratiquer et à faire progresser les sciences expérimentales.» Carlo Bourlet, CIEM 1908 (La pénétration réciproque des mathématiques pures et appliquées dans l'enseignement secondaire)

- *« Au cours du dernier demi-siècle, le paysage scientifique tout entier, et particulièrement le paysage mathématique, se sont profondément modifiés. Les mathématiques ont réfléchi sur elles-mêmes et leur ambition, leur rigueur, leur puissance manifestées à travers l'étendue et la diversité des applications, sont devenues radicalement différentes. (…) nous nous trouvons affrontés à un problème fondamental mais difficile : il nous faut désormais préparer nos enfants et nos étudiants à comprendre et à utiliser les mathématiques de notre temps. Elever le niveau mathématique moyen de ses membres et former suffisamment de mathématiciens qualifiés sont devenus des impératifs de toute nation soucieuse de son indépendance et des possibilités de son développement . » rapport préliminaire de la commission Lichnérowicz, 1967.*

André
Lichnerowicz
(1915-1998)

Quelques repères chronologiques:

- 1886 : création des Écoles Primaires Supérieures et des Cours Complémentaires.
- 1902 : réforme de l'enseignement secondaire (des garçons)
- 1911 -1919 : instauration des CAP puis des écoles d'apprentissage. *40 000 étudiants en France*
- 1925 : cursus secondaire des filles aligné sur celui des lycées de garçons.
- 1930 : Les lycées et collèges deviennent gratuits.
- 1936 : examen d'entrée en 6°.(sera supprimé en 1957).
- 1941 : Suppression du primaire supérieur, intégré au secondaire. (Collèges modernes). Les Cours complémentaires sont maintenus.
- 1941-1945 : suppression passagère de la gratuité du secondaire
- 1945 : création de la classe de sciences expérimentales.
- 1947 : Plan Langevin Wallon.
- 1952 : création d'une section M' (moderne avec une L. V.)
- 1959 : les cours complémentaires deviennent les Collèges d'Enseignement Général
- 1959 : Loi Debré : les établissements privés peuvent signer un contrat avec l'Etat ; les programmes suivis doivent être les mêmes que dans l'enseignement public, et les enseignants recrutés avec des diplômes équivalents.
- 1963 : création des CES avec des filières hiérarchisées. Le lycée fait alors suite au collège. Suppression des « petites classes » des lycées.
- 1971 : *20% d'une classes d'âge a le bac (filles et garçons)*
- 1975 : la loi Haby regroupe CEG et CES, qui deviennent les collèges. (dits collèges uniques)
- 1981 : création de la « seconde indifférenciée »
- 1985 : création des bacs professionnels.

Permanence de certaines grandes questions dans l'enseignement des mathématiques au XX° siècle

- L'enseignement « féminin », en particulier les mathématiques
- La question de « l'égalité scientifique »
- Les relations avec les autres disciplines
- La formation des enseignants : niveau d'étude, « instruction professionnelle », formation continue
- Les différents cursus (primaire supérieur, technique, secondaire « classique (filles))
- Le baccalauréat
- Les définitions de mots, de concepts
- La question des méthodes
- L'utilisation de matériels divers

Premier moment

La réforme de 1902

Le contexte international

- Début du XX° siècle, moment de crise pour l' enseignement des mathématiques dans le monde entier.
- Contexte d' internationalisation des sciences qui caractérise le passage du 19e siècle au 20e siècle
- Création de la CIEM à Rome, en 1908 (à la demande du congrès international des mathématiciens). (1910, création de l' APMESP en France)

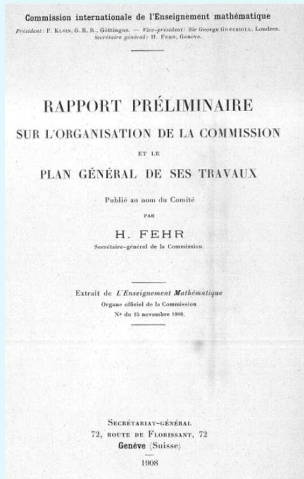
- 1899 C. A. Laisant et H. Fehr ont créé la revue *L' enseignement mathématique.*

- Projet de grande enquête internationale sur l'enseignement des mathématiques, aux différents niveaux, tant sur le plan des contenus, des méthodes, de l'organisation des enseignements.

- 1) tenir compte des domaines de la vie pratique, en particulier développer l' intérêt pour les questions techniques et économiques ;
- 2) développer les conceptions spatiales en présentant la géométrie de manière plus intuitive (ou expérimentale) et en centrant l' étude de la géométrie sur celle de transformation géométrique ;
- 3) introduire la pratique des représentations graphiques ;
- 4) introduire les éléments du calcul différentiel et intégral avec les applications.

- Nombreux échanges sur les méthodes « actives », sur l' importance à accorder à la rigueur, à l' intuition, … selon les différents niveaux d' enseignement, face à l' accroissement des élèves dans l' enseignement moyen.

Henri Fehr (1870-1954)



Commission internationale de l'Enseignement mathématique

Président : F. Klein, G. R. R., Göttingue. — *Vice-président* : Sir George Greenhill, Londres.
Secrétaire général : H. Fehr, Genève.

RAPPORT PRÉLIMINAIRE

SUR L'ORGANISATION DE LA COMMISSION

ET LE

PLAN GÉNÉRAL DE SES TRAVAUX

Publié au nom du Comité

PAR

H. FEHR

Secrétaire-général de la Commission.

Extrait de *L'Enseignement Mathématique*

Organe officiel de la Commission

N° du 15 novembre 1908.

Secrétariat-général

72, route de Florissant, 72

Genève (Suisse)

1908

Le contexte national

- Autour des années 1900 s'engage un débat national sur l'avenir de l'enseignement secondaire, sur sa mission, sur son fonctionnement.
- Commission parlementaire grande enquête,
- Il en résulte une réforme d'ensemble, en 1902, qui donnera à l'enseignement secondaire un visage qu'il conservera presque sans changement jusqu'à la fin des années 50.
- Idée centrale : adaptation de l'enseignement secondaire au monde moderne.
- Date majeure pour l'enseignement scientifique : les sciences se voient placées au même rang que les disciplines littéraires.
- Réforme importante des programmes, réaction contre un enseignement routinier, dogmatique, abstrait.
- Il faut un enseignement qui tienne compte du progrès des sciences, tout en restant accessible aux élèves, quels que soient leurs niveaux.
- Fonder des « humanités scientifiques » qui seraient aussi formatrices de l'esprit que les humanités littéraires.

- « Nous enregistrons avec plaisir la fondation d'une *Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire Public* en France. Cette association a pour but l'étude des questions intéressant l'enseignement des mathématiques et la défense des intérêts professionnels de ses membres. Elle est ouverte à tous les professeurs en fonction, en congés ou retraités. Elle se propose d'instituer ou d'encourager des réunions, des discussions, des enquêtes sur l'enseignement des mathématiques. Elle publiera un Bulletin paraissant au moins trois fois pas an.
- Voici les premières questions qui vont être mises à l'étude :

I- L'enseignement des mathématiques dans la classe de mathématiques élémentaires.

II- L'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires de jeunes filles. »

L'enseignement mathématique, vol. 12, (1910), p. 318

Organisation de l'enseignement « moyen »en France, dans la première moitié du XX° siècle
par A. Chatelet, recteur de l'Académie de Lille, 1929

- **L'enseignement technique**, de 11 à 15 ans, comprend une année de cours préparatoire et trois ans d'enseignement, moitié manuel, moitié intellectuel.
- **L'enseignement primaire supérieur** comprend une année de cours préparatoire et trois ans d'enseignement général. Il est donné dans des Écoles Primaires Supérieures ou dans des Cours Complémentaires, et sanctionné par le brevet d'enseignement primaire supérieur, ou par le brevet simple.
- **L'enseignement secondaire** qui comprend 7 années d'études (de la 6° à la 1° et classe de philosophie ou mathématiques). Il est donné dans les collèges et les lycées. Sa sanction est le baccalauréat, examen qui se passe devant les Universités, en deux ans.

- **L'enseignement technique est continué** dans les écoles d'arts et métiers (concours sévère, et titre d'ingénieur au bout du parcours).
- **L'enseignement primaire supérieur** est continué dans les écoles normales primaires, destinées à former les instituteurs par trois ans d'études générales et de pédagogie pratique.
- **L'enseignement secondaire est complété** par deux classes de préparation aux grandes écoles ou d'initiation aux études supérieures, la première supérieure pour les lettres, les mathématiques spéciales pour les sciences.
- **L'enseignement supérieur** est surtout donné dans les Facultés où l'on prépare aux licences, aux doctorats et aussi aux concours de recrutement du professorat

  - *Dans cette rapide énumération, je n'ai pas distingué jeunes gens et jeunes filles, les programmes et concours, encore différents sur quelques points tendent à devenir complètement identiques.*

La réforme de 1902

- unifie les deux enseignements secondaires classique et moderne, en y introduisant une pluralité de filières.
- La réforme de 1902 a institué deux cycles dans le secondaire.
- **Premier cycle : 6° à 3°.**

  A avec latin et grec

  B, pas de latin ni de grec, mais plus de français, de sciences, dessin, etc …
- **Second cycle :**
- 2° et 1° :

  littéraires : A latin grec

  B latin, langue vivante

  Scientifiques : C latin et plus de sciences

  D langue vivante, pas de latin, et plus de sciences

  Premier bac

Classe de philosophie ou de mathématiques.

deuxième bac.

Il y a des conférences facultatives pour ceux qui veulent faire des études scientifiques à la sortie des sections A ou B.

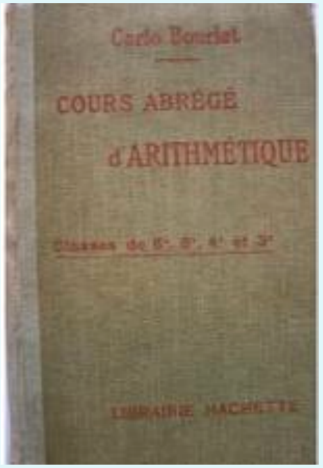
- Au lycée : les mathématiques acquièrent le statut de discipline formatrice. On y affirme l'importance de l'expérience, en partant des réalités ; les mathématiques sont l'outil nécessaire pour connaître le monde.

- Instructions relatives à l'enseignement des mathématiques (31 mai 1902).
- *« Toute latitude est laissée au professeur pour adopter tel ordre qui lui conviendra, pour employer les méthodes qui lui paraîtront les plus profitables aux élèves qu'il dirige. »*
- *« S'il est indispensable de laisser au maître une grande liberté dans le choix des méthodes, il convient néanmoins de bien préciser l'esprit dans lequel doit être donné cet enseignement, afin de lui conserver, dans son ensemble, une direction unique et d'éviter que le passage d'une classe à une autre ne soit pour l'enfant une cause de trouble dans ses études. »*
- 1° cycle et 2° cycle A et B
- *« Les exercices pratiques devront être multipliés et porter sur des données réelles et non factices. La théorie sera réduite à des explications faites sur des exemples concrets, tout au moins au début ; ce n'est que peu à peu que l'on pourra avec de grandes précautions habituer les élèves aux notions abstraites les plus simples, en montrant sur des exemples la nécessité d'une définition précise, d'un raisonnement purement logique, en insistant à l'occasion sur les erreurs que l'on peut commettre si l'on raisonne sur des objets mal définis, sur des figures dont on n'a pas déterminé exactement les éléments et leur position. »*
- *« Les recueils d'exercices amusants fourniront de nombreux exemples qui frapperont l'esprit des élèves. Citons au hasard la démonstration de l'égalité de 64 et de 65, d'un angle droit et d'un angle obtus, etc. »*

- On ajoute :
- *« Les démonstrations ne seront données qu'autant qu'un nombre suffisant d'élèves seront en état de les comprendre. »*
- *« Le programme sera considéré comme maximum. Mieux vaut que les enfants acquièrent des connaissances précises de peu d'étendue plutôt que d'avoir des idées vagues sur des sujets variés. » (premier cycle)*
- *« Dans les conférences (facultatives) destinées aux élèves qui désirent faire des études scientifiques après avoir suivi les cours des 2° cycles A et B, la plus grande liberté est laissée au professeur. Ayant devant lui des élèves intelligents et travailleurs, il sera seul juge du développement qu'il peut donner à son cours. L'important est qu'il forme des élèves pouvant comprendre les mathématiques ; qu'ils en sachent beaucoup n'est pas nécessaire, ce qui est indispensable c'est qu'ils aient compris les principes et qu'ils soient habitués au raisonnement logique. »*

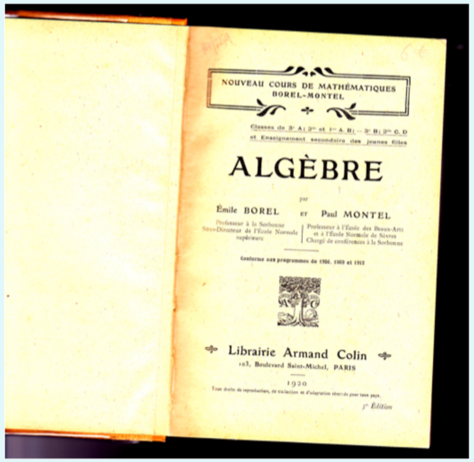
- 2° cycle C et D
- « *Les programmes ont été conçus pour permettre aux élèves de posséder à fond les éléments de géométrie, d'algèbre et de trigonométrie.* »
- « *Les études faites dans le premier cycle ayant préparé les élèves à recevoir un enseignement logique, on ne perdra pas de vue que c'est en faisant de nombreux exercices que l'on habitue les élèves à manier avec sûreté les éléments dont ils disposent.* »

- Classe de mathématiques :
- « *Une heure au moins par semaine doit être consacrée exclusivement aux problèmes, aux épreuves pratiques de calcul, de géométrie descriptive, de mécanique et aux exercices sur le cours.* »



- D' un côté :
- « *On peut signaler bien des moyens qui pourraient être employés pour introduire plus de vie et de sens du réel dans notre enseignement mathématique. (…)Il est nécessaire de mettre les points de contact entre les mathématiques et la vie moderne en évidence pour tous. C'est le seul moyen d'empêcher que les mathématiques soient un jour supprimées comme inutiles par voie d'économie budgétaire ; cette économie coûterait cher à la nation qui la ferait ; mais pendant quelques dizaines d'années les choses continueraient de marcher tout de même, par routine. Et il serait ensuite très long et très difficile de regagner le terrain perdu.* »
- Mais :
- « *Ne risque –t-on pas de diminuer cette valeur éducative en y rendant plus pratique et moins théorique l'enseignement des mathématiques ?* » E. Borel, Les exercices pratiques dans l' enseignement secondaire, conférence au musée pédagogique, 1904.

Emile Borel
(1871-1956)



Questions relayées et posées dans la communauté internationale

- *«La pédagogie doit se réformer elle-même et aussi réformer ses méthodes, principalement en ce qui touche les premiers éléments. Simplifier, en appeler à l'intelligence de l'enfant plutôt qu'à sa mémoire, satisfaire sa curiosité, donner de la vie et de l'attrait à l'initiation scientifique, au lieu de rendre rebutantes des notions qui par elles-mêmes sont tout le contraire, telle est la tâche à accomplir, et qui s'accomplira, car cette refonte des méthodes est dans la nécessité des choses. Tant mieux pour les nations qui en comprendront les premières l'inévitable nécessité. »*
- *« Plus les moyens d'enseignement se perfectionneront en s'adaptant de mieux en mieux au cerveau de l'enfant et en prenant un caractère concret, et plus universellement se diffusera la science.* » C. A. Laisant, L' enseignement mathématique, 1904. Le rôle de la science. D

- *Rôle et influence des recherches en psychologie de l'enfant.*

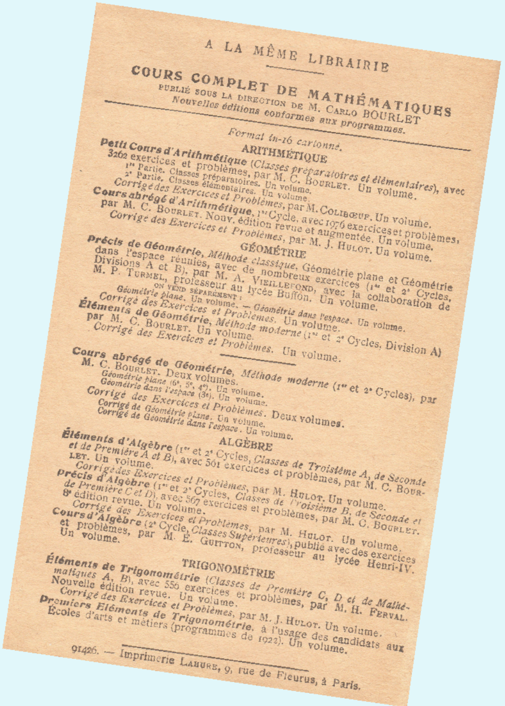
John Dewey
(1859-1952)

Edouard Claparède
(1873-1940)

- En particulier sur deux enseignements, l'un nouveau celui des fonctions, l'autre complètement transformé, celui de la géométrie.
- En géométrie, on entend adopter la méthode de Charles Méray, qui a été expérimentée et plébiscitée, à l'étranger et dans plusieurs établissements avant d'être l'objet des nouveaux programmes de 1902 :
- « *L'enseignement simultané de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace fait gagner un temps très sensible sur la durée totale de l'enseignement géométrique ;*
- *Elle fait appel à l'intelligence des élèves plutôt qu'à leur mémoire ;*
- *Elle les habitue à penser par eux-mêmes et non plus seulement par leur professeur ou par un livre.* » Rapport de E. Perrin sur la méthode de M. Meray pour l'enseignement de la géométrie, 1903.

Charles Méray(1835-1911)

- *« Enfin, la fusion de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace permet des rapprochements ingénieux et suggestifs entre des notions que la géométrie euclidienne tient soigneusement séparées. (…) La méthode géométrique de M. Ch. Méray est donc essentiellement éducative. »*



A LA MÊME LIBRAIRIE

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE M. CARLO BOURLET

Nouvelles éditions conformes aux programmes.

Format in-16 cartonné.

ARITHMÉTIQUE

Petit Cours d'Arithmétique (*Classes préparatoires et élémentaires*), avec 3262 exercices et problèmes, par M. C. BOURLET. Un volume.
1re Partie. Classes préparatoires. Un volume.
2e Partie. Classes élémentaires. Un volume.
Corrigé des Exercices et Problèmes, par M. COLIBŒUF. Un volume.

Cours abrégé d'Arithmétique, 1er Cycle, avec 1976 exercices et problèmes, par M. C. BOURLET. Nouv. édition revue et augmentée. Un volume.
Corrigé des Exercices et Problèmes, par M. J. HULOT. Un volume.

GÉOMÉTRIE

Précis de Géométrie, *Méthode classique*, Géométrie plane et Géométrie dans l'espace réunies, avec de nombreux exercices (1er et 2e Cycles, Divisions A et B), par M. A. VIEILLEFOND, avec la collaboration de M. P. TURMEL, professeur au lycée Buffon. Un volume.
ON VEND SÉPARÉMENT :
Géométrie plane. Un volume. — *Géométrie dans l'espace*. Un volume.
Corrigé des Exercices et Problèmes. Un volume.

Éléments de Géométrie, *Méthode moderne* (1er et 2e Cycles, Division A) par M. C. BOURLET. Un volume.
Corrigé des Exercices et Problèmes. Un volume.

Cours abrégé de Géométrie, *Méthode moderne* (1er et 2e Cycles), par M. C. BOURLET. Deux volumes.
Géométrie plane (6e, 5e, 4e). Un volume.
Géométrie dans l'espace (3e). Un volume.
Corrigé des Exercices et Problèmes. Deux volumes.
Corrigé de Géométrie plane. Un volume.
Corrigé de Géométrie dans l'espace. Un volume.

ALGÈBRE

Éléments d'Algèbre (1er et 2e Cycles, *Classes de Troisième A, de Seconde et de Première A et B*), avec 561 exercices et problèmes, par M. C. BOURLET. Un volume.
Corrigé des Exercices et Problèmes, par M. HULOT. Un volume.

Précis d'Algèbre (1er et 2e Cycles, *Classes de Troisième B, de Seconde et de Première C et D*), avec 567 exercices et problèmes, par M. C. BOURLET. 8e édition revue. Un volume.
Corrigé des Exercices et Problèmes, par M. HULOT. Un volume.

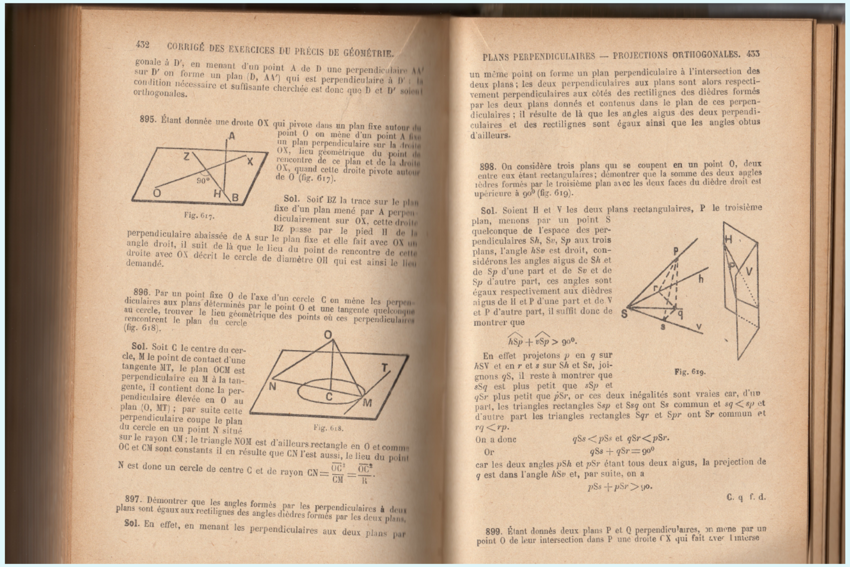
Cours d'Algèbre (2e Cycle, *Classes Supérieures*), publié avec des exercices et problèmes, par M. E. GUITTON, professeur au lycée Henri-IV. Un volume.

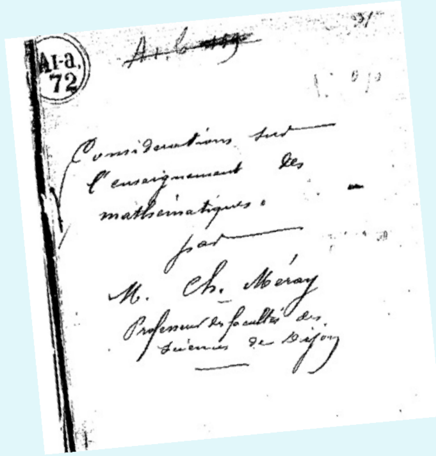
TRIGONOMÉTRIE

Éléments de Trigonométrie (*Classes de Première C, D et de Mathématiques A, B*), avec 556 exercices et problèmes, par M. H. FERVAL. Nouvelle édition revue. Un volume.
Corrigé des Exercices et Problèmes, par M. J. HULOT. Un volume.

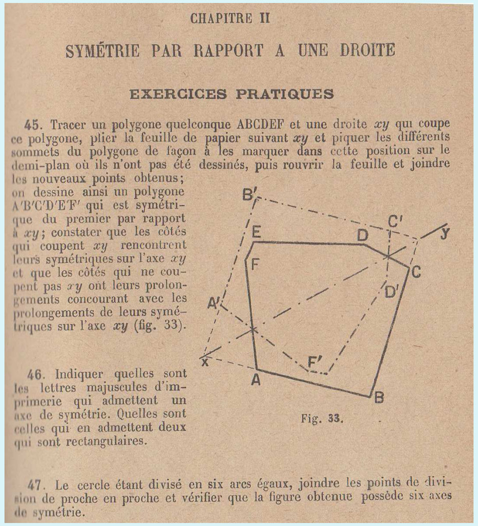
Premiers Éléments de Trigonométrie, à l'usage des candidats aux Écoles d'arts et métiers (programmes de 1922). Un volume.

91426. — Imprimerie LAHURE, 9, rue de Fleurus, à Paris.





- L'enjeu, tel que le définit Carlo Bourlet en 1908, est "*d'instituer un mode d'exposition plus concret et plus accessible, quoique parfaitement rigoureux*". Pour cela, rompant donc avec Euclide et s'inspirant de Charles Méray,et il propose de fonder la géométrie sur la notion de déplacement, instrument fondamental de la démonstration ; "*alliant sans cesse l'exercice graphique à la démonstration théorique, nous les [les déplacements] réaliserons sous les yeux des élèves (...). La théorie et l'application marcheront ainsi main dans la main*". Et la théorie en est d'autant moins exclue que, pour "l'élève curieux", cette géométrie débouche sur la théorie des groupes de transformations.
- *« M. Bourlet a fait lui-même un manuel de géométrie élémentaire en développant certaines idées de Méray. La considération des groupes de rotation, de translation et d'homothétie lui permet d'éviter l'axiome d'Euclide. Son manuel, est destiné au premier cycle. »*


CHAPITRE II

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UNE DROITE

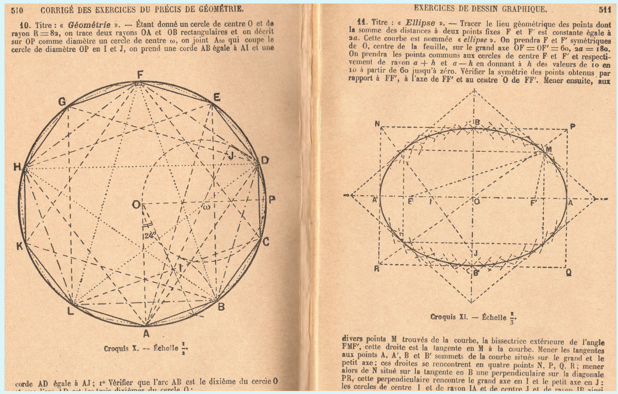
EXERCICES PRATIQUES

45. Tracer un polygone quelconque ABCDEF et une droite xy qui coupe ce polygone, plier la feuille de papier suivant xy et piquer les différents sommets du polygone de façon à les marquer dans cette position sur le demi-plan où ils n'ont pas été dessinés, puis rouvrir la feuille et joindre les nouveaux points obtenus; on dessine ainsi un polygone A'B'C'D'E'F' qui est symétrique du premier par rapport à xy; constater que les côtés qui coupent xy rencontrent leurs symétriques sur l'axe xy et que les côtés qui ne coupent pas xy ont leurs prolongements concourant avec les prolongements de leurs symétriques sur l'axe xy (fig. 33).

46. Indiquer quelles sont les lettres majuscules d'imprimerie qui admettent un axe de symétrie. Quelles sont celles qui en admettent deux qui sont rectangulaires.

Fig. 33.

47. Le cercle étant divisé en six arcs égaux, joindre les points de division de proche en proche et vérifier que la figure obtenue possède six axes de symétrie.


510 CORRIGÉ DES EXERCICES DU PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE.

10. Titre : « *Géométrie* ». — Étant donné un cercle de centre O et de rayon R = 82, on trace deux rayons OA et OB rectangulaires et on décrit sur OP comme diamètre un cercle de centre ω, on joint Aω qui coupe le cercle de diamètre OP en I et J, on prend une corde AB égale à AI et une

Croquis X. — Échelle $\frac{1}{2}$.

corde AD égale à AJ ; 1° Vérifier que l'arc AB est le dixième du cercle O

EXERCICES DE DESSIN GRAPHIQUE. 511

11. Titre : « *Ellipse* ». — Tracer le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes F et F' est constante égale à 2a. Cette courbe est nommée « *ellipse* ». On prendra F et F' symétriques de O, centre de la feuille, sur le grand axe OF = OF' = 60, 2a = 180. On prendra les points communs aux cercles de centre F et F' et respectivement de rayon $a+h$ et $a-h$ en donnant à h des valeurs de 10 en 10 à partir de 60 jusqu'à zéro. Vérifier la symétrie des points obtenus par rapport à FF', à l'axe de FF' et au centre O de FF'. Mener ensuite, aux

Croquis XI. — Échelle $\frac{1}{3}$.

divers points M trouvés de la courbe, la bissectrice extérieure de l'angle FMF', cette droite est la tangente en M à la courbe. Mener les tangentes aux points A, A', B et B' sommets de la courbe situés sur le grand et le petit axe; ces droites se rencontrent en quatre points N, P, Q, R ; mener alors de N situé sur la tangente en B une perpendiculaire sur la diagonale PR, cette perpendiculaire rencontre le grand axe en I et le petit axe en J : les cercles de centre I et de rayon IA et de centre J et de rayon JB ainsi

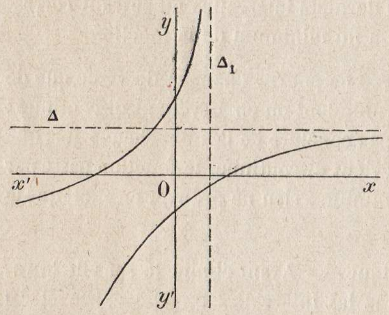
- L’enseignement des fonctions :
- C’est le plus novateur, même si C. Boulet ironise en faisant remarquer que cette notion « n’a que deux siècles d’âge » dans l’histoire des mathématiques.
- C’est une demande internationale. C’est la condition de l’adaptation au monde moderne. C’est aussi le lieu d’inventer des méthodes nouvelles.
- La France sera plutôt en pointe dans le domaine, référence expérimentale en quelque sorte.
- Lors du congrès de 1910 : **Sur l’introduction de la notion de fonction dans les écoles moyennes. Rapport de H. Fehr**
- *« La notion de fonction fait partie du fonds commun de connaissances générales que doivent fournir les différentes sections de l’enseignement secondaire. En effet, si l’on considère les progrès croissants de la science, on constate que les mathématiques pénètrent de plus en plus dans les branches les plus diverses. Et le plus souvent, c’est la notion de fonction qui joue un rôle fondamental. »*

- *Comme préparation à une première introduction il est bon de familiariser l'élève de bonne heure avec la notion de cordonnées (…) et leur application à la représentation graphique de la relation entre deux variables : temps et température, temps et pression atmosphérique, tableaux statistiques … Dès les premiers exercices l'élève exécutera lui-même quelques graphiques sur du papier quadrillé et quelquefois aussi sur du papier millimétrique.*
- *•Jusqu'ici, les élèves n'ont guère rencontré que des nombres connus et des nombres inconnus, ils acquièrent maintenant l'idée de variable, ce qui leur permettra ensuite de se familiariser avec la notion de fonction.*
- *•En dernier lieu viendra le problème inverse, celui de la détermination de la fonction primitive, et son application à la mesure d'une surface plane. (…)*
- *Ce sont ces deux applications fondamentales de la notion de fonction qui doivent former le couronnement des études mathématiques dans l'enseignement secondaire.*

cela sera possible, comme nous l'avons fait dans l'étude de la fonction $y = \dfrac{ax+b}{a'x+b'}$; nous allons préciser ce que l'on entend par asymptote :

On appelle asymptote d'une branche de courbe une droite telle que la distance d'un point de cette branche de courbe à la droite tende vers zéro quand le point s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe.

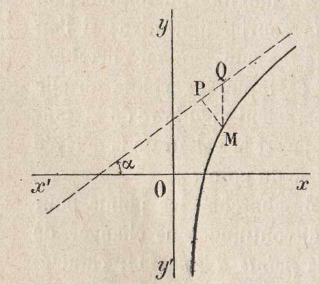
Si cette asymptote Δ existe et est parallèle à l'axe $x'Ox$, on voit que l'ordonnée du point de la branche de courbe a pour limite l'ordonnée de la droite quand x augmente indéfiniment.



Si cette asymptote Δ_1 est parallèle à $y'Oy$, son abscisse est la limite vers laquelle tend l'abscisse d'un point de la courbe quand l'ordonnée augmente indéfiniment.

Considérons enfin le cas où cette asymptote n'est pas parallèle aux axes ; si l'on mène la perpendiculaire MP d'un point de la courbe à l'asymptote et la parallèle MQ à $y'Oy$, on a

$$MP = MQ \cos \alpha,$$



α étant l'angle de l'asymptote avec $x'Ox$; cette relation montre que MP et MQ tendent vers zéro en même temps ; l'asymptote *sera donc une droite telle que la différence entre l'ordonnée d'un point de la courbe et l'ordonnée du point de même abscisse*

de la droite tende vers zéro, quand le point s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe.

398. Exemple I. — *Étudier les variations de la fonction*

$$y = x^3 - 3x + 5.$$

1° Cette fonction est définie pour toute valeur de x.

2° Elle est toujours continue.

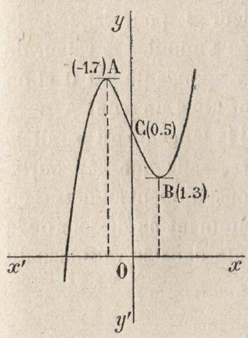
3° La dérivée

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

est continue et s'annule en changeant de signe pour $x = -1$ et $x = +1$; nous considérerons donc les intervalles $-\infty$ à -1, -1 à $+1$, $+1$ à $+\infty$.

Dans le premier intervalle, y' est positive, la fonction croît.
Dans le second intervalle, y' est négative, la fonction décroît.
Dans le troisième intervalle, y' est positive, la fonction croît.
-1 correspond donc à un *maximum*, $+1$ correspond à un *minimum*. Pour déterminer la fonction d'une façon plus précise, nous cherchons les valeurs qui correspondent aux limites des intervalles et le tableau suivant résume la discussion

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	croît	7 *max.*	décroît	3 *min.*	croît	$+\infty$



Il est alors facile de construire la courbe représentative ; aux points A$(-1, 7)$ et B $(1, 3)$, la courbe a une tangente parallèle à l'axe $x'Ox$, puisque la dérivée y' est nulle en ces points ; on pourra calculer l'ordonnée du point C situé sur $y'Oy$, en faisant $x = 0$; on a ainsi $y = 5$; la tangente en ce point a pour coefficient angulaire $y'_0 = -3$.

Traité d'algèbre,
A. Grévy,
élèves de mathématiques A et B
Programmes de 1902

Emile Borel : Algèbre, second cycle, 1904

CHAPITRE IX

NOTIONS SUR LES DÉRIVÉES

I. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

131. **Définition.** — Soit y une fonction d'une variable x; pour fixer les idées, considérons, par exemple, la fonction suivante :

$$y = 2x^2 - 5x + 4. \tag{1}$$

Désignons par $x + \Delta x$ une nouvelle valeur de la variable et par $y + \Delta y$ la valeur correspondante de la fonction; c'est-à-dire posons :

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 4. \tag{2}$$

La relation (2) se déduit de la relation (1) en y donnant à x l'*accroissement* Δx et en désignant par Δy l'*accroissement* correspondant de y.

Si nous retranchons membre à membre les relations (1) et (2) nous obtenons :

$$\Delta y = 4x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5\Delta x;$$

Définition. — *On appelle dérivée d'une fonction y ce que devient l'expression du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction y à l'accroissement correspondant de la variable x, lorsque dans ce rapport, exprimé au moyen de x et de Δx, on remplace Δx par zéro.*

132. **Signification géométrique de la dérivée.** — Représentons graphiquement la fonction y dont nous venons de calculer la dérivée. Dans ce but, traçons (fig. 56) deux axes rectangulaires Ox, Oy, choisissons une unité de longueur OA pour les abscisses et une unité *égale* OB pour les ordonnées. Soit M le point de la courbe qui correspond à l'abscisse x et l'ordonnée y; M′ le point de la courbe qui correspond à l'abscisse $x + \Delta x$ et à l'ordonnée $y + \Delta y$. Nous savons que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal à la *pente* de la droite MM′; si nous supposons que Δx devienne de plus en plus petit le point M′ se rapprochera de plus en plus de M; la sécante MM′ prendra la position MM″ et viendra finalement se confondre avec la tangente MT au point M de la courbe considérée; c'est la

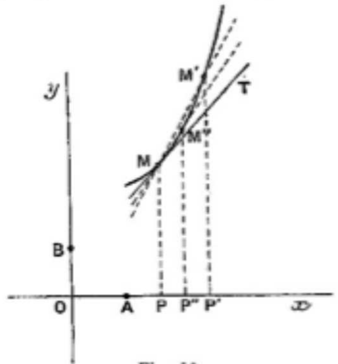


Fig. 56.

- **Les résultats obtenus dans lʼintroduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires par E. Beke**

CIEM, Paris 1-4 avril 1914

- *Nous pouvons, je crois, conclure qu'il nʼexiste pas dʼEtats, ni parmi les états mentionnés ni parmi les autres, où les aspirations tendant à introduire dans lʼenseignement la notion de fonction et la représentation graphique, nʼaient acquis une force considérable. Il nʼexiste pas de manuel scolaire récent, ni dʼécole où les réformes nʼaient trouvé quelques applications. En constatant ce fait comme un des succès les plus éclatants de notre propagande, nous pouvons dire que nos personnalités dirigeantes ont compris lʼesprit des temps nouveaux et elles ont donné lʼimpulsion à la marche naturelle du progrès.*
- *Le point le plus difficile sera dʼunir aux raisonnements intuitifs la rigueur au sujet de laquelle M. Picard dit avec raison « que la vraie rigueur est féconde, se distinguant par là dʼune autre purement formelle et ennuyeuse qui répand lʼombre sur les problèmes quelle touche ».*

La question : intuition/ rigueur, dans l' enseignement secondaire

- *Des classements sont proposés en 1911*
- A) Méthode entièrement logique (Peano, Hilbert 2, Halsted). —Tous les axiomes sont posés; on discute leur indépendance; le développement ultérieur est rigoureusement logique. On ne fait aucun appel à l'intuition ; les notions primitives (point, etc.) sont assujetties à la seule condition de satisfaire aux axiomes.
- B) Fondements empiriques, développement logique. — De l'observation de l'espace réel l'on déduit les propositions primitives sur lesquelles est fondé le développement logique qui suit.
- C) Les considérations intuitives s'alternent avec la méthode déductive (Borel, Behrendsen-Gôtting). — On recourt à l'évidence toutes les fois qu'il convient, sans qu'il résulte d'une manière précise ce que l'on admet et ce que l'on démontre.
- D) Méthode intuitive-expérimentale (Perry). — On présente les théorèmes comme des faits qui ont un caractère intuitif ou peuvent être démontrés par l'expérience, sans qu'on aperçoive le lien logique qui unit ces faits.

- *M. Bourlet apporte des renseignements objectifs sur ce qui se fait en France ; l'enseignement dépend de la classe. Pendant le premier cycle (Quatrième et Troisième) les élèves voient les faits géométriques, qu'ils étudient ensuite avec plus de précision pendant le deuxième cycle (Seconde et Première) puis une troisième fois dans la classe de mathématiques.*
- *Aujourd'hui on fait largement appel à l'intuition des élèves et aux exemples de la vie pratique. Les imitateurs des programmes français n'ont pas toujours su se tenir dans de justes limites.*
- *En France l'enseignement oral prévaut, le livre permet au professeur de donner des problèmes; c'est surtout sur les professeurs que le livre a une influence.*
- *Toutefois, en France, des livres excellents traitent des éléments de mathématiques. On n'y connaît pas ces horribles entassements de théorèmes et de problèmes, souvent écrits dans une langue incompréhensible et choquant par leur ton autoritaire. Cependant, le régime intérieur des lycées et collèges nécessite en général la distribution gratuite des livres scolaires par l'administration qui a ainsi le plus grand intérêt à conserver les mêmes manuels le plus longtemps possible. Ce fait et les hautes qualités des professeurs français qui ne renoncent jamais à un enseignement très personnel, nous font comprendre que les manuels n'ont qu'une place secondaire dans l'enseignement, soit pour aider les jeunes professeurs dans la préparation des classes, soit pour faciliter la répétition des leçons données, soit pour mettre à la disposition des meilleurs élèves les notions plus élevées omises dans l'enseignement oral. E. M. 1913*

Au final

- ***•Les méthodes de l'enseignement des mathématiques de l'enseignement secondaire se sont améliorées. L'observation personnelle, les considérations d'ordre pratique, le travail simultané d'une classe entière, l'habitude du travail indépendant et l'introduction de la méthode heuristique ont transformé de fond en comble le système de l'enseignement secondaire.*** ***E. Beke - CIEM - Paris - 1914***
- Même si les changements dans l'enseignement des mathématiques ne peuvent être que lents :
- « *Les tendances conservatrices de la génération précédente d'écoliers ne se manifestent pas seulement dans la presse et dans l'opinion : à cette génération appartiennent aussi deux catégories de personnes dont l'influence sur l'enseignement est considérable : la plupart des parents d'élèves et les professeurs même.*
- *On enseigne rarement bien ce que l'on n'a pas appris*. » E. Borel, adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès de la science 1904.

Gaston Darboux (1842-1917)

Darboux, 1914 :

« Sans entrer dans le détail, on peut indiquer les points qui sont acquis en mathématiques depuis notre réforme de 1902 :

- 1° l'introduction dans l'enseignement élémentaire du calcul des dérivées et même de notion de calcul intégral
- 2° l'emploi systématique dans la géométrie des méthodes de transformations qui simplifient l'étude et apportent un principe de classification
- 3° le développement donné aux applications qui sont posées par la pratique, à l'exclusion de ces problèmes qui n'ont aucune racine dans la réalité
- 4° le développement aussi complet que possible de l'initiative personnelle chez tous les élèves qui prennent part à l'enseignement et une préoccupation incessante d'une bonne formation de l'esprit »

L'Enseignement mathématique, vol. 16, 1914, p. 197

Deuxième moment

L’égalité scientifique
1925 - 1941

L'égalité scientifique

- 1918 : souci de défendre la culture française et la nécessité de « relever les humanités agonisantes ». Campagne contre la réforme de 1902.
- 1919 succès électoral du « bloc national ». Ministre de l'instruction publique Léon Bérard. Veut abandonner la réforme de 1902 et rétablir l'obligation de la culture classique.
- 1925 instaure la réforme de « l'égalité scientifique ».
- Jusqu'en 1° inclusivement toutes les sections reçoivent les mêmes horaires et les mêmes programmes scientifiques.

- « En ce qui concerne le principe de l'égalité scientifique jusqu'à la fin de la classe de 1°, l'Association des professeurs de mathématiques déclare formellement que cette prétendue égalité, telle qu'on veut la réaliser, avec des horaires insuffisants, des programmes réduits, et un enseignement uniformément distribué à tous les élèves, sans aucune sélection de goûts, d'aptitudes ou de mérites, ne peut être une égalité que dans la médiocrité et la quasi nullité, exception faite pour quelques élèves d'élite, auxquels d'ailleurs, il ne semble nullement question de réserver l'enseignement secondaire. »

Déclaration de l'APMESP du 5 mars 1925.

- Présentation de A. Chatelet, recteur de l'Académie de Lille, en 1929

« Le programme de 1925 a parmi ses caractéristiques essentielles, celle d'imposer un programme unique de mathématiques et de sciences à tous les candidats à la première partie de baccalauréat. Des élèves de moyens parfois assez différents vont être soumis pendant 6 ans à la même discipline. Pour que l'enseignement commun porte ses fruits, il importe que les classes restent aussi homogènes que possible. On n'approchera de cette condition que si la grosse majorité des élèves est intéressée : il faut donc que l'enseignement soit mis à la portée du plus grand nombre. Cet amalgame a trouvé ses détracteurs et des défenseurs ardents. »

- « Va-t-on laisser se poursuivre cette œuvre néfaste qui entend défendre jalousement une « culture générale » étroite et fanatique ? Peut-on tolérer que ses partisans fassent supporter plus longtemps à l'ensemble de la nation française l'ignorance flagrante de la grande majorité d'entre eux à l'égard de la science moderne ? »

Union des professeurs de spéciales 1930

- *Mais, du moment que les programmes scientifiques sont les mêmes pour tous, il faut bien qu'ils soient réduits à ce qu'ils comportent d'essentiel pour la formation de l'esprit, et dégagés de toutes les connaissances qui ne sont que des connaissances, qui n'ont qu'une importance technique ou n'intéressent que des spécialistes. (...) II suit de là que l'étude des sciences,(...) ne doit jamais être la transmission mécanique et l'enregistrement passif d'un savoir, mais une gymnastique de l'esprit, l'initiation à des méthodes, l'habileté d'observer, de voir juste, de critiquer ses propres expériences. Un grand effort a été fait dans ce sens par les jeunes professeurs de mathématiques... »*
- *Aussi la méthode de « redécouverte » est-elle de plus en plus en faveur dans les classes où les horaires et les programmes permettent son application: les tâtonnements, les recherches souvent infructueuses des élèves sur une question déterminée donnent une image, évidemment sommaire, mais cependant réelle, des difficultés de la recherche scientifique; les communications entre maîtres et élèves, plus directes et plus étroites que dans l'enseignement dogmatique, fournissent au professeur des occasions fréquentes de faire comprendre que la science, loin d'être une œuvre morte, est au contraire un corps vivant, aux aspects et aux transformations multiples.*

Au final : résultats de plus en plus faibles au baccalauréat. Echec de plus en plus grand aux concours. Le niveau scientifique a baissé d'année en année, sans amélioration de la culture générale.

- Nécessité de renoncer au dogme de l'égalité scientifique en 1941.

Note sur les usages du papier quadrillé (1910)

$\overline{MA}^2$, est une somme de 2 carrés. On a ici l'égalité : $1^2 + 6^2$

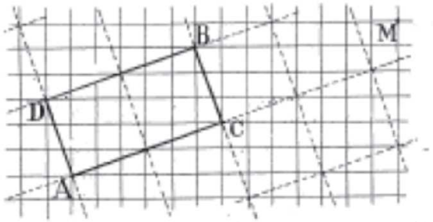


Fig. 12.

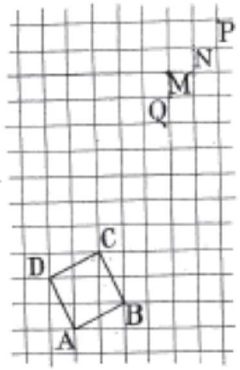


Fig. 13.

$+ 8^2 + 13^2 = 3^2 + 4^2 + 7^2 + 14^2$. Cette représentation des sommes de 4 carré… tions.

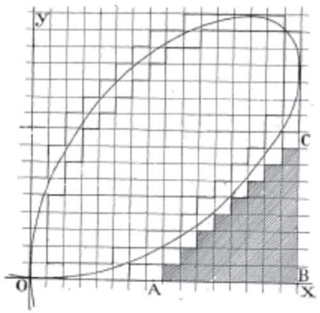


Fig. 3.

On peut encore se servir du papier quadrillé pour étudier

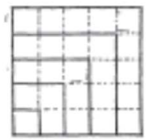


Fig. 14.

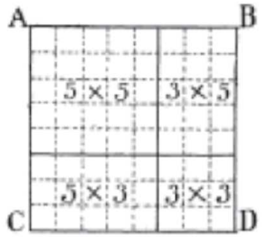


Fig. 15.

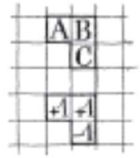
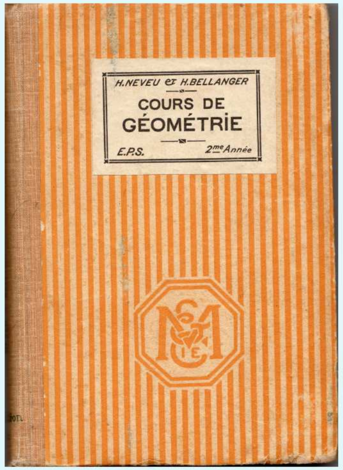
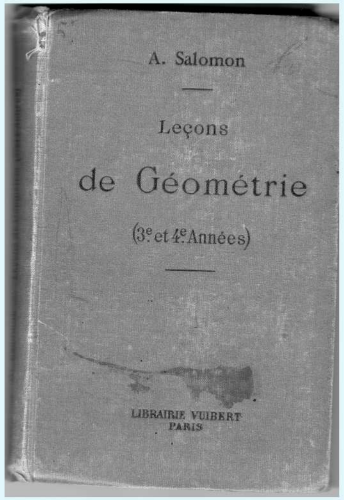


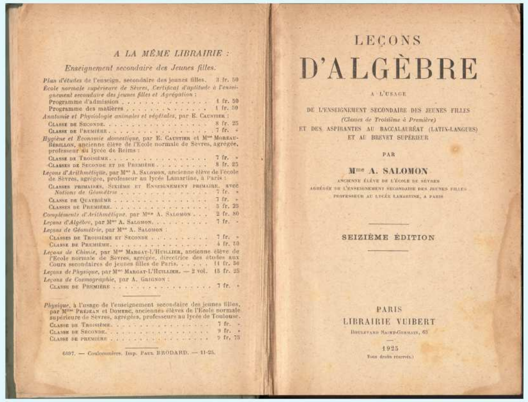
Fig. 16.

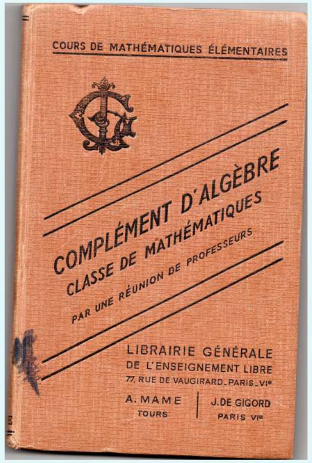
les propriétés des déterminants, des carrés magiques, du triangle arithmétique de Pascal, les mouvements des pièces d'un échiquier, etc.. ou encore pour établir certains théorèmes d'arithmétique : Exemple : *La somme des* n *premiers nombres impairs est* n^2. Dans la figure (fig. 14) les polygones

Utilisation des « nouvelles technologies », règles à calcul, tables de logarithmes ou autres, … (même des petits films mathématiques)





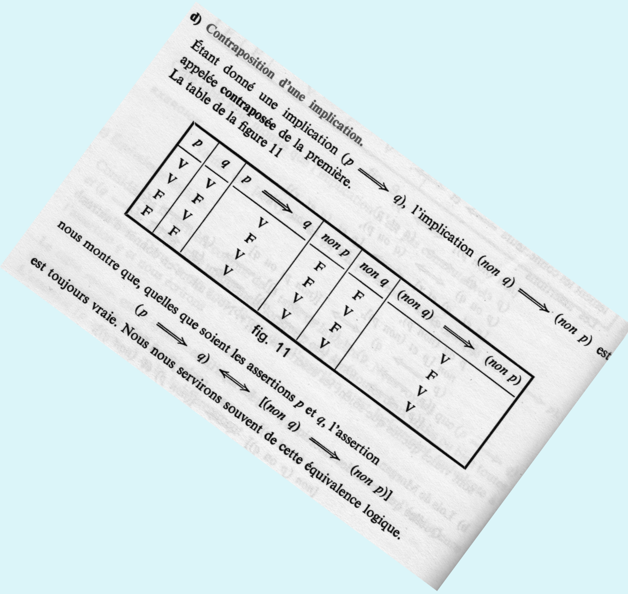




Et la formation des enseignants, et les classes surchargées, et l'enseignement des mathématiques aux filles, et dans les EPS, CC, etc…

TROISIÈME MOMENT

La réforme « des maths modernes »
1960-1980


d) Contraposition d'une implication.

Étant donné une implication ($p \Longrightarrow q$), l'implication (non q) $\Longrightarrow$ (non p) est appelée **contraposée** de la première.

La table de la figure 11

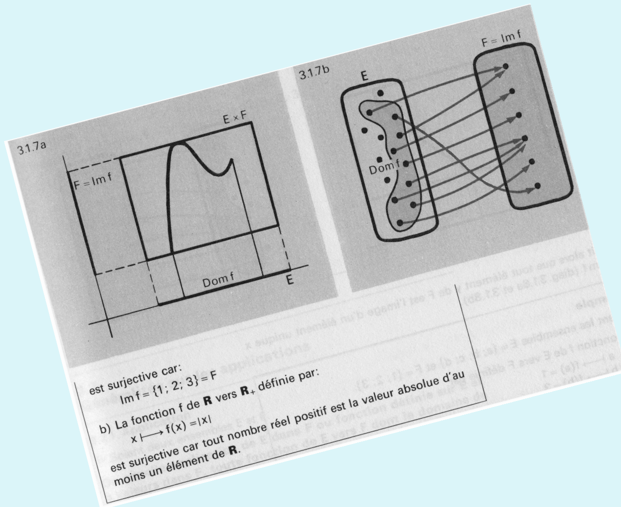
p	q	$p \Longrightarrow q$	non p	non q	(non q) $\Longrightarrow$ (non p)
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

fig. 11

nous montre que, quelles que soient les assertions p et q, l'assertion

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)]$$

est toujours vraie. Nous nous servirons souvent de cette équivalence logique.



est surjective car:

Im f = {1; 2; 3} = F

b) La fonction f de **R** vers $\mathbf{R}_+$ définie par:

x ⟼ f(x) = |x|

est surjective car tout nombre réel positif est la valeur absolue d'au moins un élément de **R**.

- « Dans le monde où nous vivons, la meilleure mesure du développement d'une société est sans doute fournie par l'éducation moyenne de ses membres et la répartition harmonieuse de cette éducation à travers disciplines et techniques. Alors que, naguère, il suffisait à un homme de savoir s'exprimer dans sa langue, de savoir la lire et l'écrire, de savoir enfin effectuer sur les nombres décimaux quelques calculs élémentaires pour se sentir pleinement intégré à la société où il vivait, il n'en est plus de même aujourd'hui. Pour se sentir citoyen de plein droit de la société des humains, un homme de la seconde moitié du XXe siècle doit savoir se localiser dans l'espace et le temps, doit pouvoir communiquer avec des communautés étrangères à la sienne, mais il doit surtout percevoir quelques-unes des méthodes de pensée et d'action qui constituent le savoir-faire qu'est notre science et notre technique.» Rapport préliminaire-commission Lichnérowicz - 1967

André Lichnérowicz (1915-1998)

- La mathématique joue là un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social. Notre mathématique sécrète, par nature, l'économie de pensée et, par-là, permet seule de classer, de dominer, de synthétiser parfois en quelques brèves formules un savoir qui sans elle, finirait par ressembler à quelque fâcheux dictionnaire encyclopédique infiniment lourd. La mathématique a été, depuis toujours, discipline auxiliaire des sciences physiques et de l'art de l'ingénieur. Elle est devenue désormais, au même titre, discipline auxiliaire, aussi bien d'une grande partie des sciences biologiques et médicales que de l'économie et des sciences humaines. »

- Les mathématiques partout, les mathématiques pour tous.

- Une légitimation scientifique
- Une légitimation économique
- Une légitimation idéologique
- Une légitimation pédagogique.

Le contexte international

1958-1959 coup d'envoi de la réforme par l'OECE (organisation européenne de coopération économique) qui devient l'OCDE (organisation de coopération et de développement économique) en 1963.

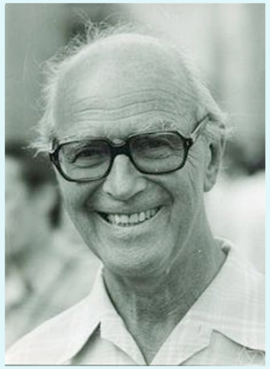
- En 1957 : premier spoutnik, soviétique. Le monde occidental, dominé par les USA, inquiet de son retard technologique.
- Modernisation industrielle prend le relais de la reconstruction d'après guerre

1958 : OCDE : bureau du personnel scientifique et technique . Un des buts : « rendre plus efficace l'enseignement des sciences et des mathématiques ».

1959 : colloque de Royaumont en Belgique. (international). Promouvoir une réforme du contenu et des méthodes de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire (12-19 ans).

Jean Dieudonné (1906-1992)

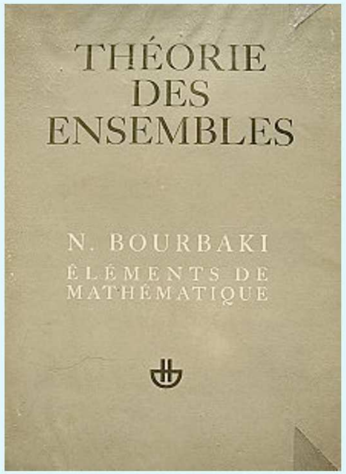
Howard Fehr (1902-1982)

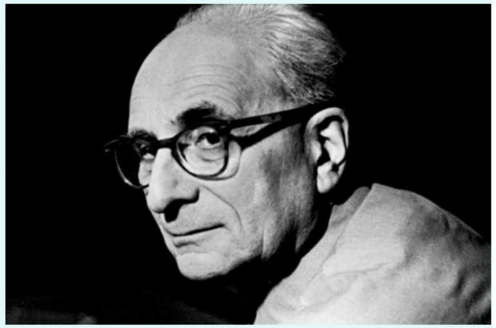


Gustave Choquet (1915-2006)

- En France particulièrement, influence du Bourbakisme en mathématiques, du structuralisme en sciences humaines et de la psychologie génétique de Piaget.
- « *Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites - les structures mathématiques ; et il se trouve - sans que l'on sache bien pourquoi – que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ses formes ; comme par une sorte de préadaptation.* » Nicolas Bourbaki, « L'architecture des mathématiques », 1947
- « *Ainsi donc, dans l'espace de quelques années, des spécialistes aussi éloignés en apparence les uns des autres que les biologistes, les linguistes, les économistes, les sociologues, les psychologues, les ingénieurs des communications et les mathématiciens, se retrouvent subitement au coude à coude et en possession d'un formidable appareil conceptuel dont ils découvrent progressivement qu'il constitue pour eux un langage commun.* » Lévi-Strauss, « Les mathématiques de l'homme », 1954.

Jean Piaget
(1896-1980)





Claude Levi –Strauss
(1908-2009)

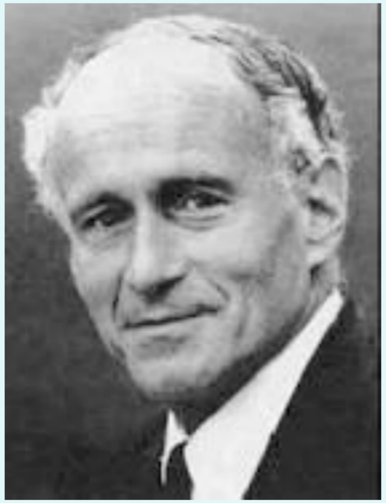
Un nouveau contexte institutionnel

- 1959 réforme Berthoin
- 1963 : réforme Fouchet
- Scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans
- L'école primaire se prolonge pour tous les élèves dans un « enseignement moyen » (CEG, CET, premiers cycle des lycées)
- « Baby boom ». Besoin croissant de professeurs. Moins de 20% des professeurs de mathématiques sont certifiés ou agrégés.
- Démocratisation ou massification ?

- 1966 mise en place de la commission ministérielle présidée par André Lichnérowicz pour réformer profondément et vite l'enseignement des mathématiques.
- Soutenu par l'Apm, qui a commencé à préparer la réforme avec des conférences et séminaires de formation pour les enseignants.

André Revuz
(1914-2008)

Henri Cartan
(1904-2008)



Laurent Schwartz
(1915-2002)

La Charte de Chambéry – APMEP-1962

- Enseigner à tous une mathématique utile au monde moderne et rendre mieux accessible un niveau d'abstraction anciennement réservé à des privilégiés.
- Enseigner une mathématique contemporaine qui doit faire partie de la culture de tous, à l'époque des ordinateurs et de l'automatisation.
- Enseigner la mathématique par une pédagogie active.
- L'introduction d'un nouveau contenu dans l'enseignement des mathématiques sera inopérante, voire néfaste, si elle ne s'accompagne d'une pédagogie appropriée, active, ouverte, la moins dogmatique possible, faisant appel au travail de groupe et à l'imagination des enfants.
- La réalisation des réformes doit commencer par une expérimentation pédagogique sérieuse et par un effort accru pour la formation des maîtres.
- (demande des IRE ; les IREM seront créés en 1969).

Les nouveaux programmes paraissent de juillet 1968 à juin 1971.

- Les grandes lignes :
- 1- Au collège : disparition des cas d'égalité des triangles et de l'initiation à la démonstration en 6° et 5° ;
- introduction d'un langage ensembliste et rationnel en 6°-5° ;
- construction des corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
- En 4° la géométrie affine est tournée vers l'algèbre linéaire.
- 2- Au lycée : lien entre le vocabulaire ensembliste et la logique.
- La géométrie affine et euclidienne est fondée sur l'algèbre linéaire
- En analyse, continuité, limites, dérivation de fonctions numériques d'une variable réelle.
- Calcul intégral en terminale
- Probabilités sur un ensemble fini.

Quelques exemples

- 4° collection Queysanne-Revuz (Fernand Nathan 1971)
- ***Définition d'une droite réelle*** :
- Un ensemble D d'éléments appelés points est une droite réelle, s'il existe une famille de bijections de D sur l'ensemble des nombres réels, appelés graduations de D, vérifiant l'axiome suivant : pour deux graduations quelconques g et g' de la même droite réelle D, il existe deux nombres réels a et b, tels que pour tout point M de D on a g(M) = a.g'(M) + b. Le nombre réel g(M) est appelé abscisse dans la graduation g du point M.

a) Espace vectoriel $\mathcal{V}_1$.

L'ensemble des vecteurs de la droite muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel possède donc les huit propriétés énoncées au § 14.7; nous reconnaissons les propriétés V_1 à V_8 qui sont les axiomes de la structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{R}$ (cf. § 13.5), d'où :

Théorème.

L'ensemble $\mathcal{V}_1$ des vecteurs de la droite muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Désignons par f la bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{V}_1$ qui a tout x de $\mathbb{R}$ associe le vecteur ayant pour mesure algébrique x (cf. 14.7), posons :

$$f(x) = \vec{X} \quad \text{et} \quad f(y) = \vec{Y};$$

par définition de $\vec{X} + \vec{Y}$ et de $\alpha\vec{X}$ nous avons quels que soient x, y, α de $\mathbb{R}$

$$f(x+y) = \vec{X} + \vec{Y} = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha\vec{X} = \alpha f(x)$$

2° C et T mathématiques tome 2, collection Queysanne-Revuz, 1969

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Considérons le nombre réel $(\vec{X} + \lambda\vec{Y})^2$, où $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont deux vecteurs quelconques et λ un nombre réel quelconque; ce nombre est $\geqslant 0$ on a donc

$$(\vec{X} + \lambda\vec{Y})^2 = (\vec{X})^2 + 2\,[\vec{X}.(\lambda\vec{Y})] + (\lambda\vec{Y})^2 \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

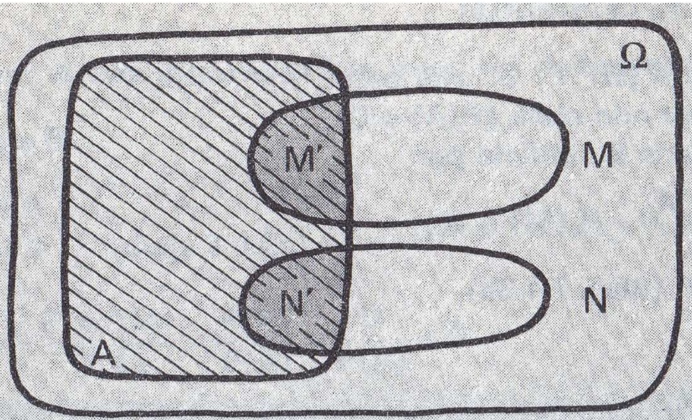
$$(\vec{X})^2 + 2\lambda(\vec{X}.\vec{Y}) + \lambda^2(\vec{Y})^2 \geqslant 0.$$

Le premier membre de cette inégalité est un trinôme en λ car $(\vec{X})^2$, $(\vec{X}\,.\,\vec{Y})$, $(\vec{Y})^2$ sont des *nombres réels*. Il est effectivement du second degré si $(\vec{Y})^2 \neq 0$ c'est-à-dire si $\vec{Y} \neq \vec{0}$. Dans ce cas ce trinôme a toujours le même signe, lorsqu'il n'est pas nul, il n'a donc pas de racines distinctes (cf. § 9.9); on a donc

$$(\vec{X}.\vec{Y})^2 \leqslant (\vec{X})^2\,(\vec{Y})^2.$$

Si $\vec{Y} = \vec{0}$ les deux membres de cette inégalité large sont nuls; elle est donc vérifiée quels que soient $\vec{X}$ et $\vec{Y}$.

7.4.3b



7.4.4 Formule des probabilités composées

7.4.6 Formule de Bayes

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega; \mathscr{P}(\Omega); P)$.
Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des événements de probabilités non nulles formant un système complet (n° 7.1.12).

Théorème 1

Pour tout événement A, on a:

$$P(A) = P(M_1) \,.\, P_{M_1}(A) + P(M_2) \,.\, P_{M_2}(A) + \ldots + P(M_n) \,.\, P_{M_n}(A)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(M_i) \,.\, P_{M_i}(A)$$

Puisque $M_1, M_2, \ldots, M_n$ forment un système complet d'événements, on a donc:

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n = \Omega$$

Mais on a:

$$(\forall A)\,(A \subset \Omega) \qquad A \cap \Omega = A$$

Par suite, on a pour tout événement A:

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right) = A$$

c'est-à-dire:

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap M_i) = A \qquad \text{(Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)}$$

Les événements M_i étant deux à deux incompatibles, il en est donc de même des événements $A \cap M_i$.
Par suite, on a (n° 7.2.5):

$$\sum_{i} P(A \cap M_i) = P(A)$$

Mathématiques terminales A et B, Bréard, 1972

Structure algébrique

On dit qu'un ensemble E est muni d'une structure algébrique, si l'on définit sur E une ou plusieurs lois de composition, internes ou externes, ces lois pouvant avoir des liens entre elles.

Si un ensemble E est muni d'une seule loi interne $*$, la structure définie est alors notée: $(E; *)$ ou $E(*)$.
Si l'ensemble E est muni de deux lois internes $*$ et $\top$, la structure définie est notée: $(E; *; \top)$ ou $E(*; \top)$.
Si l'ensemble E est muni d'une loi interne $*$ et d'une loi externe $\bullet$ à opérateurs dans Ω, on note:

$(E; *; (\bullet; \Omega))$ ou, s'il n'y a aucune ambiguïté $(E; *; \bullet)$

Si un ensemble E vérifie les axiomes d'une structure donnée, alors il possède toutes les propriétés de cette structure.

Remarque

Les structures algébriques les plus usuelles sont:

- la structure de groupe;
- la structure d'anneau;
- la structure de corps;
- la structure d'espace vectoriel sur un corps.

Voir *Loi de composition interne, Loi de composition externe, Groupe, Anneau, Corps, Espace vectoriel.*

Aperçu rapide sur l'histoire des mathématiques

L'évolution des mathématiques

Introduction

A propos de l'avenir des mathématiques, Henri Poincaré (mathématicien et philosophe français du siècle dernier) déclarait un jour: «Il y a eu, autrefois, des prophètes de malheur; ils répétaient que tous les problèmes étaient résolus, qu'après eux, il n'y aurait plus qu'à glaner... mais, les pessimistes se sont toujours trouvés forcés de reculer... de sorte qu'à présent, je crois bien qu'il n'y en a plus.»
Depuis longtemps, en effet, on laisse croire que les mathématiques sont «stabilisées» et que l'édifice mathématique est à son point culminant. En fait, leur évolution est permanente.
D'ailleurs, dans l'histoire des mathématiques, il est possible de distinguer des périodes de création féconde, des périodes de malaise, des périodes de mise au point, et des périodes de maturation.

C. — ENDOMORPHISMES. MATRICES CARRÉES

254 ***Anneau des endomorphismes de E***

Définition.

On appelle endomorphisme de l'espace vectoriel E toute application linéaire de E dans lui-même.

L'ensemble des endomorphismes de E est donc l'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$, d'après la notation déjà adoptée. On le désigne, plus simplement, par $\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{L}(E)$ n'étant qu'un cas particulier d'un ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, il possède une structure d'espace vectoriel lorsqu'on le munit de l'addition et de la multiplication par un réel que nous avons définies et étudiées.

De plus, la composition des applications est une loi interne pour $\mathcal{L}(E)$, puisque l'application composée de deux endormorphismes de E est encore un endomorphisme de E.

Des propriétés de cette loi de composition (associativité et double distributivité par rapport à l'addition), il découle la propriété suivante.

Terminale C et E, tome 3, Cossard et Théron, Bordas, 1971

VALEURS APPROCHÉES D'UN NOMBRE RÉEL

Densité de Q dans R Le second théorème du paragraphe 28 permet de voir qu'il y a des nombres rationnels « partout » dans **R**.

Soient en effet x et x' deux nombres réels distincts, avec $x < x'$. D'après le théorème cité, il existe un entier n tel que x et x' n'aient pas la même approximation décimale d'ordre n :

$$\frac{a_n}{10^n} \leqslant x < \frac{a_n + 1}{10^n}$$

$$\text{avec } a_n \neq a'_n.$$

$$\frac{a'_n}{10^n} \leqslant x' < \frac{a'_n + 1}{10^n}$$

Si on avait $a'_n < a_n$, c'est-à-dire $a'_n + 1 \leqslant a_n$, il en résulterait $x' < x$. Donc $a_n < a'_n$ ou encore $a_n + 1 \leqslant a'_n$ et par conséquent

$$x < \frac{a'_n}{10^n} \leqslant x'.$$

Tout intervalle $]x, x']$ avec $x \neq x'$ contient donc un nombre décimal. Il en est d'ailleurs de même pour l'intervalle ouvert $]x, x'[$; il suffit en effet d'appliquer le résultat précédent à l'intervalle $\left]x, \frac{x + x'}{2}\right]$: il existe un nombre décimal d tel que

$$x < d \leqslant \frac{x + x'}{2} < x'.$$

Il en est à plus forte raison de même pour l'intervalle fermé $[x, x']$, ainsi que pour $]-\infty, x[$, $]-\infty, x]$ qui contiennent $]x - 1, x[$ et pour $[x, +\infty[$ et $]x, +\infty[$ qui contiennent $]x, x + 1[$.

Nous retiendrons :

Théorème.

Tout intervalle de R contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.

On dit aussi que **Q est dense dans R.**

Structures algébriques terminales CDE, Bréard, 1971

10.3
Anneaux et corps ordonnés

10.3.1 Anneau ordonné

On considère un anneau (A; +; ×), muni d'une relation d'ordre notée ⩽.

Par définition:
On dit que (A; +; ×; ⩽) est un anneau ordonné si :
– (A; +; ⩽) est un groupe ordonné par la relation ⩽ ;
– la relation ⩽ est compatible avec la restriction de la multiplication à l'ensemble des éléments x de A tels que 0 ⩽ x.

En d'autres termes, si pour x, x′, y et y′ éléments de A, on a:

$$[x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'] \longmapsto [x + y \leqslant x' + y']$$

et

$$[0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ 0 \leqslant x',\ 0 \leqslant y',\ x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'] \longmapsto [xy \leqslant x'y']$$

Par suite pour x, y, z éléments de A:

$$[x \leqslant y] \longmapsto [x + z \leqslant y + z]$$

et

$$[0 \leqslant x \text{ et } 0 \leqslant y] \longmapsto [0 \leqslant xy \text{ et } 0 \leqslant yx]$$

et aussi:

$$[0 \leqslant z \text{ et } x \leqslant y] \longmapsto [xz \leqslant yz \text{ et } zx \leqslant zy]$$

Remarques

a) Si l'anneau (A; +; ×) est commutatif et s'il est ordonné par ⩽, on dit que (A; +; ×; ⩽) est un anneau commutatif et ordonné.
b) Si (K; +; ×) est un corps, muni d'une relation d'ordre qui en fait un anneau ordonné, on dit que (K; +; ×; ⩽) est un corps ordonné.

10.3.2 Anneau (ou corps) commutatif totalement ordonné

On considère un anneau commutatif ordonné (A; +; ×; ⩽); on suppose que la relation ⩽ est une relation d'ordre total. On dit alors que (A; +; ×; ⩽) est un *anneau commutatif totalement ordonné*.
On voit alors que (A; +; ⩽) est un groupe commutatif totalement ordonné.

Par définition:
Les éléments positifs (resp. négatifs) de l'anneau commutatif totalement ordonné (A; +; ×; ⩽) sont les éléments positifs (resp. négatifs) du groupe commutatif totalement ordonné (A; +; ⩽).

Endomorphismes bijectifs. Groupe linéaire Étudions les endomorphismes bijectifs d'un espace vectoriel E, également appelés **automorphismes** de E.

On rappelle que, pour qu'une application soit bijective, il faut et il suffit qu'elle soit injective et surjective.

Théorème.

Pour qu'un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, soit bijectif, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

— il est injectif ;

— il est surjectif ;

— son rang est égal à la dimension de E.

En effet, cela résulte directement des propriétés et théorèmes énoncés au paragraphe 247. Rappelons-les. Si f est une application linéaire de E dans F, où E et F sont de dimension finie :

- f est injective si, et seulement si son rang égal à la dimension de E ;
- f est surjective si, et seulement si son rang est égal à la dimension de F.

Dans le cas d'un endomorphisme, E et F sont confondus, d'où le théorème énoncé.

Remise en cause globale

- Protestation même des « pères » de la réforme.

1973, Choquet : « On a dit aux enseignants qu'ils étaient des minables s'ils étudiaient les triangles, que l'algèbre linéaire remplaçait l'ancienne géométrie (…) le résultat est tel que sans une saine réaction de la base, la génération actuelle ne sera préparée ni à la recherche mathématique, ni à l'utilisation des mathématiques dans la technique ou les sciences expérimentales… »

1974, Dieudonné dénonce une « nouvelle scolastique, forme encore plus agressive et stupide, placée sous la bannière du modernisme. »

- Distorsion entre la réalité et les espoirs antérieurs à 1970, ressentie

Par tous les enseignants d'abord attentifs aux modes d'appropriation du savoir mathématique

Par des enseignants perturbés par les difficultés persistantes, inquiets

Par les physiciens

Par les medias, par les parents … Les mathématiques sont considérées comme l'instrument de la sélection.

- Lichnérowicz démissionne et la commission se dissout en 1975.
- Les parties les plus contestables sont abandonnées et l'on s'achemine vers de nouveaux programmes.

La « contre réforme » de 1981-82, remaniée en 1985.

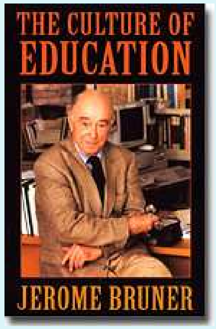
- Le présent programme est celui d'une classe de Seconde pour tous ; il convenait de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures et par conséquent de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée. Il va de soi que le professeur doit avoir une vue approfondie de la matière qu'il enseigne, et qu'il doit s'exprimer clairement : mais son idéal ne saurait être de tenir aux élèves un discours si parfait soit-il ; sa tâche essentielle est d'entraîner ses élèves, devant des situations saisies dans leur complexité naturelle, à la réflexion et à l'initiative personnelle. Instruction pour le programme de seconde (1981)

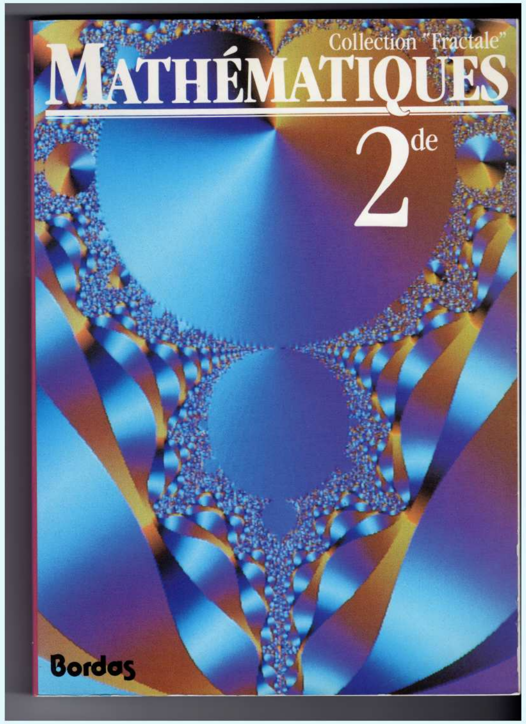
- L'utilisation systématique des calculatrices, qui dispense naturellement d'avoir recours aux instruments antérieurs (table de logarithmes, règle à calcul...) constitue une des nouveautés du programme de mathématiques : il est primordial, à notre époque, d'apprendre aux jeunes à se servir d'une machine à clavier, de les renseigner sur les contraintes imposées par la technique du constructeur, et de les mettre en garde contre les erreurs plus fréquentes qu'ils ne le pensent. Il suffit que les élèves possèdent une calculatrice scientifique non programmable. Dès le début de l'année il sera bon de vérifier que chacun sait utiliser son propre instrument, et ce sera une occasion de préciser l'usage des parenthèses et de réviser les propriétés de IR.

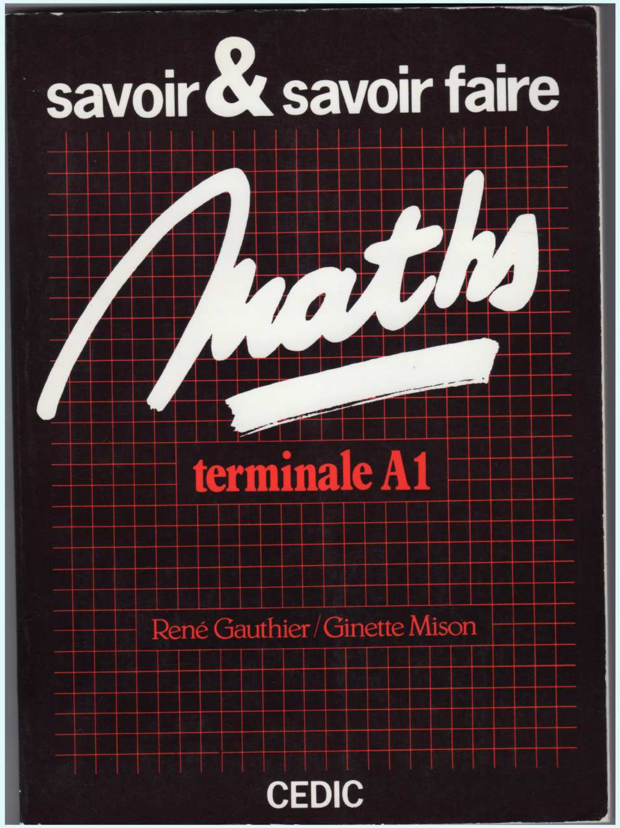
Les grandes idées

- optique d'un enseignement voulu comme activité mathématique qui, dans le cadre d'une planification minimale, s'efforce de susciter les initiatives et de les laisser se développer et veut placer l'élève en situation de chercheur
- s'intéresser prioritairement au développement des diverses capacités des élèves (manipuler, expérimenter, observer, conjecturer, faire surgir des questions, douter et s'auto-contrôler, fabriquer et utiliser une documentation, rédiger et s'exprimer, démontrer, chercher, imaginer, inventer…).
- personnalisation accrue de l'enseignement selon les élèves.

- Influence de Jérôme Bruner (1915-), fondateur de la psychologie cognitiviste




Collection "Fractale"
MATHÉMATIQUES
2de
Bordas


savoir & savoir faire
maths
terminale A1
René Gauthier / Ginette Mison
CEDIC

- L’histoire montre que les réformes de l’enseignement des mathématiques se sont voulues du côté de la modernité mathématique, sociale, économique, culturelle, et pour cela ont pu être radicalement différentes. Confrontées aux tensions provoquées par les besoins des sciences et de la société, en particulier :
- Enseignement de culture/Enseignement utile
- Enseignement théorique/Enseignement pratique.
- Ont peiné parfois à se réaliser entre ambition des réformateurs et réalité du terrain.

- « *La forte culture de ces professeurs ne leur fait pas perdre de vue leur métier, et on les trouve perpétuellement partagés entre les besoins de la rigueur mathématique, les impératifs de la logique et le souci de rester « naturels », intuitifs, presque évidents, pour se faire comprendre et surtout aimer des élèves* ». Jean Itard 1972.