

Limoges
Mercredi 21 avril 2010

Logique et raisonnement mathématique
Aspects épistémologiques et didactiques
Sur l'implication (Partie 1)

Viviane DURAND-GUERRIER

vdurand@math.univ-montp2.fr

Université de Montpellier 2
Département de mathématiques
I3M, équipe ACSIOM

Plan de la communication

- I. L'Antiquité grecque : *Mégariques, Stoïciens, Aristote*
- II. Le renouveau de la logique : *Frege, Russell*
- III. Le point de vue sémantique en logique : *Wittgenstein, Tarski*
- IV. Apports pour les analyses didactique : *le labyrinthe*
- V. Conclusion

L'ANTIQUITE GRECQUE
Mégariques, Stoïciens, Aristote

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Le conditionnel : une notion controversée

Blanché (1970, 1996, p.99) rapporte que, dans la Grèce antique, le poète Callimaque raillait les Mégariques, écrivant :

« Les corbeaux croassent sur les toits quelles sont les implications justes »

Selon Sextus Empiricus, Philon de Mégare disait *qu'un énoncé conditionnel est vrai quand il ne commence pas par le vrai pour finir avec le faux, de sorte qu'il y a pour ce conditionnel, trois façons d'être vrai, et une d'être faux.*

Cette définition a été fortement contestée par Diodore de Chronos, le maître de Philon de Mégare, qui modifiait la définition sous la forme suivante:

(...) le conditionnel est vrai lorsqu'il n'a pas pu, ni ne peut commencer par le vrai pour finir par le faux.

Cette définition introduit à la fois une nuance temporelle, et une nuance modale (le possible).

Pour les Stoïciens, la Logique est une branche de **la Philosophie.**

- La proposition est définie comme ce qui est susceptible d'être vrai ou faux. C'est l'élément de base du système.
- Il y a plusieurs sortes de propositions : proposition conditionnelle, proposition consécutive, proposition causale
- Il y a au moins quatre définitions de l'implication (Blanché 1970) dont *l'implication connexe* vraie si la *contradictoire de la conclusion est incompatible avec l'antécédent*

Leur système logique comporte trois connecteurs reliant deux propositions, dont l'**implication** et la disjonction exclusive, et cinq tropes ou **figures de raisonnement** généralement appelés *sylogismes*, et qui se présentent comme des sortes de "**moules d'inférences** »

*Si la première, la seconde; or la première; donc la seconde.
(Modus Ponens)*

*Si la première, la seconde; or pas la seconde;
donc pas la première (Modus Tollens)*

- Ils déduisent à l'aide de quatre règles supplémentaires d'autres figures de **raisonnement valide**.

Pour Aristote, la logique est un **instrument** (organon)

La notion de proposition est la même que celle des Stoïciens.

Certaines entités linguistiques ne sont pas des propositions

Sa logique est essentiellement une logique des termes et de la quantification

Il distingue explicitement deux sortes d'opposition pour les énoncés quantifiés :

La contradiction, qui échange les valeurs de vérité

Tout homme est blanc / Quelque homme n'est pas blanc

Nul homme n'est blanc / Quelque homme est blanc

La contrariété entre deux énoncés universels

Tout homme est blanc / Nul homme n'est blanc

Aristote développe une théorie du **sylogisme formel** mettant en jeu uniquement des énoncés quantifiés

Syllogismes de la première figure:

Si **A** est affirmé de tout **B** et si **B** est affirmé de tout **C**,
nécessairement A est affirmé de tout **C**.

Si **A** n'est affirmé de nul **B** et si **B** est affirmé de tout **C**, il en
résultera que **A** n'appartiendra à nul **C**.

Si **A** est affirmé de tout **B** et si **B** est affirmé de quelque **C**,
nécessairement A est affirmé de quelque **C**.

Si **A** n'est affirmé de nul **B** et si **B** est affirmé de quelque **C**,
nécessairement **A** n'appartient pas à quelque **C**.

Exemple d'interprétation du syllogisme universel

Si *mortel* est affirmé de tout *homme* et si *homme* est affirmé de
tout *grec*, alors *mortel* est affirmé de tout *grec*.

Un syllogisme concluant est universellement valide
(*vrai quelque soit l'interprétation des termes*).

L'implication est utilisé ici pour exprimer une **loi logique**

Les syllogismes de la première figure sont vrais a priori

Il s'agit ensuite de déterminer les syllogismes concluants en
marquant méthodes syntaxiques (*règles de conversion*) et
méthodes sémantiques (*interprétations fournissant un
contre-exemple*)

L'implication comme connecteur reste à un niveau **implicite**.

Elle apparaît sous forme de “règles d'action”

« Il faut examiner aussi, en ce qui concerne le sujet en question, de quelle chose donnée le sujet suit, ou bien quelle chose suit nécessairement si le sujet est donnée : quand on veut établir la thèse, il faut rechercher de quelle chose donnée la chose en question suivra, car si on a prouvé l'existence de la première, on aura prouvé l'existence du sujet en question; par contre, quand on veut réfuter une thèse, il faut rechercher quelle chose est si le sujet proposé est donné, car quand nous aurons montré que le conséquent du sujet proposé n'existe pas, nous aurons par là même ruiné la chose en question. » (Topiques II, 4, 17-22, traduction J. Tricot)

Une distinction entre **Vérité** et **Validité**

« Il peut se faire que soient vraies les prémisses qui forment le syllogisme ; il peut se faire aussi qu'elle soient fausses, ou encore que l'une soit vraie et l'autre fausse. La conclusion, elle, est nécessairement vraie ou fausse. De prémisses vraies, on ne peut tirer une conclusion fausse, mais de prémisses fausses, on peut tirer une conclusion vraie, avec cette réserve qu'elle portera non sur le pourquoi, mais sur ce qui est en fait (vérité de facto). C'est que le pourquoi ne peut faire l'objet d'un syllogisme à prémisse fausse. » (P.A., Livre 2)

Ceci conduit Aristote à distinguer trois types de vérité

- ✓ Vérité de facto : ce qui est en conformité avec les faits.
- ✓ Vérité obtenue comme conséquence de la vérité d'un autre terme (dans une interprétation donnée).
- ✓ Vérité nécessaire obtenue comme conclusion d'un syllogisme concluant à prémisses vraies.

« Mais qu'on aille pas croire sous prétexte que l'on pose A comme simple terme que d'une seule chose donnée puisse résulter nécessairement quelque chose : cela n'est pas possible. En effet, ce qui résulte nécessairement, c'est la conclusion, et on ne l'engendre qu'à l'aide d'au moins trois termes » (P. A., livre 2)

Dès l'Antiquité une notion complexe et polysémique qui met en jeu les ingrédients essentiels des systèmes modernes

Mégariques

Implication philonienne entre propositions : définie par ses valeurs de vérité

Différentes formes de conditionnels entre propositions

Stoïciens

Différentes formes de conditionnels entre propositions

Règles d'inférences portant sur les propositions, utilisation du mot « donc »

Aristote

Pas de définition explicite de l'implication entre propositions

Des règles d'actions pour la dialectique

Des prédicats, des énoncés quantifiés

L'implication comme loi logique : relation entre deux prémisses quantifiées et une conclusion quantifiée

A propos du syllogisme traditionnel

Tous les hommes sont mortels

Socrate est un homme

Donc Socrate est mortel

Ce n'est pas un syllogisme aristotélicien, car il comporte un énoncé singulier et le mot « donc » (Lukasiewicz, 1951)

Ce n'est pas un syllogisme stoïcien, car la première prémisse n'est pas donnée sous la forme d'un conditionnel articulant deux propositions.

Son interprétation nécessite d'articuler les deux points de vue : logique propositionnelle et logique des termes.

LE RENOUVEAU DE LA LOGIQUE
Frege, Russell

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Gottlob FREGE (1848 -1925)

Le projet de Frege :

- rénover la logique ;
- atteindre une parfaite rigueur dans les raisonnements mathématiques ;
- éliminer tout recours à l'évidence ;
- extirper le psychologisme de la logique ;

Il propose un symbolisme (ou idéographie) dont il dit que :

"Son premier objectif est donc de nous fournir le critère le plus sûr de la validité d'une chaîne d'inférences et de nous permettre de remonter à la source de tout ce qui y restait implicite » (Cité par Blanché, 1970, 1996, p.311)

Pour cela, il faut expliciter non seulement les principes proprement mathématiques qui fournissent à la science son contenu, mais aussi les principes logiques, ceux qui assurent sa structure formelle (Blanché, op.ci. P. 311)

Selon C. IMBERT, pour Frege,

- ✓ La logique est une source de connaissance et la conduite d'une preuve est productrice de savoirs.
- ✓ Le but assigné à la logique est l'étude du passage du vrai au vrai. L'objet de la logique est l'**inférence** plutôt que le vrai.

« Le vrai est indéfinissable pour la logique, ce qui signifie que ce n'est pas à la logique de déterminer la valeur de vérité d'une proposition particulière. » (C. IMBERT, Introduction à Frege, 1971, p.47)

Frege définit l'implication entre propositions

(si B, alors A)

sous la forme

Non ((non A) et B)

On retrouve l'implication philonienne.

Frege écrit :

« Ma définition n'a pas à se plier à l'usage quotidien, cet usage est trop confus et labile pour les besoins de la logique. » (op. cit. p. 227)

Il la distingue d'une implication comportant des termes généraux comme

« Si quelqu'un est un meurtrier, il est un délinquant »

Car

« On ne peut pas dire si le contenu de la proposition « il est un délinquant » isolée de son contexte est vrai ou faux ; car « il » n'est pas un nom propre.

(...) Cependant la composition composée peut elle exprimer une pensée. « Quelqu'un » et « il » renvoient l'un à l'autre. Par ce biais, au moyen de « si ... alors », les deux propositions sont liées intimement de manière à exprimer une pensée » (op. cit. p. 228)

Frege distingue :

l'affirmation d'un énoncé conditionnel de la forme
"si A, alors B"

et les inférences

«(Si B, alors A) vrai ; or B vrai ; Donc A vrai»

(Modus Ponens)

« (Si C, alors B) vrai ; (si B, alors A) vrai
donc (si C, alors A) vrai »

(Transitivité de la relation d'antécédent à conséquent)

« Plus d'un mathématicien s'exprime comme si l'on pouvait tirer des conséquences d'une pensée dont la vérité est encore douteuse. Quand je dis "J'infère A de B", ou "Je conclus de B la vérité de A", on entend par B une des prémisses, ou l'unique prémisse de l'inférence. Mais tant qu'on n'a pas reconnu la vérité d'une pensée (...) on ne peut rien en inférer ni conclure. Y prétendre, c'est confondre (...) la vérité d'une composition hypothétique et une inférence où on prend la condition de la proposition composée comme prémisse. Or reconnaître que le sens de (si C, alors A) est vrai, ce peut être le fruit d'une inférence, comme dans le dernier exemple ci-dessus, mais cela ne veut pas dire que A est vrai » (op. cit. p.228-229)

Dans le paragraphe sur la Négation des Recherches Logiques, Frege avait déjà abordée la question des pensées fausses

« Certes on ne conclura rien d'une pensée fausse, mais une pensée fausse peut être une partie d'une pensée vraie à partir de laquelle une conclusion est possible. Soit la proposition :

« Si l'accusé était à Rome au moment du délit, il n'a pas commis le meurtre. »

On peut reconnaître la vérité de la pensée qui y est contenue sans savoir si l'accusé était à Rome au moment du délit, ni s'il a commis le meurtre. (...)

Les pensées formées d'une condition et d'une conséquence admettent la loi suivante : on peut, sans nuire à la vérité, faire de la proposition contradictoire de la condition la conséquence et de la proposition contradictoire de la conséquence la condition. Les anglais appellent cette transformation *contraposition*. » (op. cit. p; 128)

Bertrand RUSSELL (1872-1970)

Russell se propose de fonder toutes les mathématiques sur la logique (logicisme).

Il distingue explicitement:

- la notion classique d'*énoncé conditionnel*
- *l'implication matérielle* entre propositions
- *l'implication formelle* : $(\mathbf{x}) (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{Q}(\mathbf{x}))$, \mathbf{x} étant assujettit à décrire une certaine classe d'objet.
"*c'est l'affirmation de chaque implication matérielle d'une classe donnée*"
- *l'inférence*:
"Quand nous disons par conséquent, nous énonçons une relation qui ne peut relier que deux propositions affirmées, et qui diffère donc de l'implication. "

Contrairement à Frege, il cherche à justifier le choix de la définition de l'implication matérielle

« Cette relation en vertu de laquelle il nous est possible de faire des inférences valides, je l'appelle implication matérielle.[...] Et bien que tant que l'on continuera à regarder les relations avec l'effroi que cause tout ce qui n'est pas familier, il soit naturel de se demander s'il sera jamais possible de découvrir une relation telle que l'implication, toutefois [...] il doit exister une relation qui n'unit que des propositions et qui unit deux propositions quelconques dont soit la première est fausse, soit la seconde est vraie. Des diverses relations équivalentes satisfaisant ces conditions, l'une doit être appelée implication et si une telle notion ne nous semble pas familière, cela ne suffit pas à prouver qu'elle est illusoire. (Russell, 1903, 1989, pp. 61-62)

L'implication formelle joue un rôle fondamentale pour l'inférence, bien que cela pose un problème théorique

« Pour appliquer une règle d'inférence dans ce cas, il est formellement nécessaire d'avoir une prémisse affirmant que le cas en question est une prémisse de la règle » (op. cit., p. 70)

Malgré cette difficulté, la distinction entre les deux types d'implications représente une avancée décisive sur les relations entre mathématiques et logiques.

« *[les implications matérielles qui ne sont pas le cas d'une implication formelle]* ne peuvent être connues que si l'on sait déjà que soit l'hypothèse est fausse, soit la conclusion est vraie ; et dans aucun des deux cas, elle ne nous servent à connaître la conclusion (...) Aussi les implications de ce genre ne remplissent pas ce rôle pour lesquelles les fonctions propositionnelles se révèlent particulièrement utiles, à savoir celui de nous faire connaître par déduction des conclusions que nous ignorions auparavant. » (Russell, 1910, 1989, p.248)

Implication et déduction - faits et énoncés

Des distinctions essentielles

Implication et déduction

Il ne faut pas confondre

- **Affirmer une implication** « si A , alors B »
- **Faire une déduction à partir d'une implication affirmée**

« si A , alors B ; or A ; donc B » (Modus Ponens ou règle du détachement)

« On ne comprend pas le Modus Ponens si on ne fait pas la distinction de Frege »

(Gochet & Gribomont, 1990, *Logique*, vol. 1, *méthodes pour l'informatique fondamentale*, Paris, Hermès, p.65)

Faits et énoncés

« Les propositions non logiques (i.e. qui ne sont ni des tautologies, ni des contradictions) permettent de *parler des faits du monde, de décrire des états de choses*.

Elle [la proposition non logique] est vraie si les états de choses sont tels que nous le disons par son moyen (4.062) (Wittgenstein, 1921)

« *La vérité d'une proposition consiste en son accord (ou sa correspondance) avec la réalité* » (Tarski, 1944, 1974, 270)

Ou encore

« *Une proposition est exacte si elle désigne un état de choses existant* » (Tarski, 1944, 1974, 271)

Ce sont principalement **les implications formelles** (énoncés généraux) qui permettent de prouver des résultats que l'on ne connaît pas encore (Russell)

« *Pour tout entier n , si la somme de ses chiffres est un multiple de 9, alors il est divisible par 9* ». (1)

La somme des chiffres de 675 432 684 est égale à 45 ; 45 est un multiple de 9 ; donc 675 432 684 est divisible par 9.

On a établi un fait numérique dans la théorie mathématique des entiers; il nous permet d'affirmer l'énoncé :

« La somme des chiffres de 675 432 684 est un multiple de 9 », qui peut servir de prémisse pour l'inférence. On en déduit « Ce nombre est divisible par 9 ».

On attend que ce résultat soit en conformité avec le fait numérique qu'il prétend décrire : la division effective de ce nombre par 9 produit un quotient entier et un reste nul.

Ceci est le cas.

- ✓ On peut le vérifier en faisant l'opération;
- ✓ La preuve de l'énoncé (1) dans la théorie mathématique des entiers naturels écrits dans le système de numération décimale de position nous garantit que c'est bien le cas, sans que nous ayons à faire l'opération.

Au collège, les pratiques opératoires stabilisées sur les entiers fournissent des faits numériques sur lesquels on pourra construire de nouvelles connaissances, qui en retour enrichiront les faits numériques disponibles.

On peut aussi utiliser une implication affirmée pour faire un **raisonnement indirect** (exemple inspiré de Frege)

Un fait (1) : Un crime à l'arme blanche a été commis à Paris le 24 juin 1874.

Une implication formelle posée comme vraie (quantification universelle implicite)

« *Si une personne a commis ce crime, alors elle était à Paris le jour du crime.* » (1).

Un fait (2) : Pierre est un suspect

Une implication matérielle vraie (une instance de 1)

« *Si Pierre a commis ce crime, alors Pierre était à Paris le jour du crime* » (2)

Un fait (3) : Pierre peut prouver qu'il était à Rome le jour du crime ; il a un alibi.

Une assertion : le conséquent de l'implication est faux

« *Pierre n'était pas à Paris le jour du crime.* » (3) **VRAI**

Conséquence logique : l'antécédent de l'implication est faux

« *Pierre n'a pas commis ce crime* » (4) **VRAI**

Un fait (4) : Pierre est innocenté.

Remarque 1: L'innocence de Pierre est **un fait**, *indépendant de la preuve* ci-dessus.

Remarque 2 : Produire un alibi permet de **prouver** l'innocence, qui a été mise en doute (*Pierre est suspect*). La vérité de (3) est une conséquence logique des prémisses ; le raisonnement logique porte sur les énoncés, pas sur les faits (*Aristote, Wittgenstein, Tarski*)

Remarque 3 : L'alibi peut être un "faux" : en fait Pierre était à Paris le jour du crime ; dans ce cas, le conséquent de l'implication (2) est vrai ; cela ne signifie pas que son antécédent le soit.

Remarque 4 : Pour établir la culpabilité ou l'innocence de quelqu'un, on cherche des "preuves" matérielles (autrement dit des faits) pouvant fournir des prémisses vraies.

Remarque 5 : En l'absence de telles "preuves" matérielles, on s'intéresse aux mobiles, qui peuvent conduire à identifier des suspects. Ceci fournit seulement des prémisses hypothétiques, et ne permet donc pas d'établir de preuve de la culpabilité d'un suspect.

Fin de la première partie

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010