Limoges

Mercredi 21 avril 2010

Logique et raisonnement mathématique

Aspects épistémologiques et didactiques

Sur l'implication (Partie 2)

Viviane DURAND-GUERRIER

vdurand@math.univ-montp2.fr

Université de Montpellier 2

Département de mathématiques

I3M, équipe ACSIOM

L'ESSOR DU POINT DE VUE SEMANTIQUE EN LOGIQUE
Wittgenstein, Tarski

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Une version sémantique du calcul des propositions dans le *Tractatus logico-philosophicus* (Wittgenstein, 1921)

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Un système formel non axiomatique

Le principe de **bivalence stricte** pour les variables propositionnelles.

Le principe **d'extensionalité** : la valeur de vérité d’une proposition complexe dépend exclusivement de la valeur de vérité des propositions élémentaires qui la compose.

Les **connecteurs** sont définis de manière combinatoire par leurs tables de vérité.

Elles ne renvoient à aucun objet de pensée, *mais évoquent des systèmes de possibilités pour la vérité et la fausseté des propositions qu’elles connectent* (Granger, 1990, Invitation à la lecture de Wittgenstein)

Les tautologies et les contradictions

Les tautologies sont les énoncés du système vrais pour toutes les distributions de valeurs de vérité.

Exemple : *p* ou non *p*

Les contradictions prennent la valeur faux pour toute distribution de valeur de vérité.

Exemple : *p* et non *p*

Les tautologies sont les énoncés vrais du système (au sens de la validité universelle telle que définie par Quine, 1950).

La proposition

Une proposition du discours est une entité linguistique qui porte le vrai ou le faux

N.B. Ceci en accord avec le point de vue d'Aristote, qui souligne que de nombreuses entités linguistiques ne sont pas des propositions.

Les propositions non logiques (i.e. qui ne sont ni des tautologies, ni des contradictions) permettent de *parler des faits du monde, de décrire des états de choses*.

Elle [la proposition non logique] est vraie si les états de choses sont tels que nous le disons par son moyen (4.062)

Tautologies et déduction logique

- 5.12. En particulier, la vérité d'une proposition « p » suit de la vérité d'une proposition « q » quand tous les fondements de vérité de la seconde sont fondements de vérité de la première.

- 5.131. Si la vérité d'une proposition suit de la vérité d'autres propositions, ceci s'exprime dans les relations qu'ont entre elles ces formes ; (...)

Tautologies et déduction logique

- 5.132. Si p suit de q, je puis déduire p de q : tirer de q la conséquence p.

  La manière de déduire ne peut être tirée que des deux propositions.

  Elles seules peuvent justifier la déduction.

  Des “ lois de la déduction ”, qui — comme chez Frege et Russell — doivent justifier les déductions, sont vides de sens et seraient superflues.

Tautologies et déduction logique

- 6.113. La marque particulière des propositions logiques est que l'on peut reconnaître sur le seul symbole qu'elles sont vraies, et ce fait clôt sur elle-même toute la philosophie de la logique. Et c'est de même un des faits les plus importants que la vérité ou la fausseté des propositions non logiques *ne* se laisse *pas* reconnaître sur la seule proposition.

Tautologies et déduction logique

6.1221. Si, par exemple, des deux propositions “ p ” et “ q ”

dans leur connexion “ $p \supset q$ ”

une tautologie résulte, il est alors clair que q suit de p.

Que par exemple

“ $\mathbf{q}$ ” suive de “ $\mathbf{p \supset q \,.\, p}$ ”

nous le voyons sur ces deux propositions mêmes, en les liant dans

“ $\mathbf{(p \supset q \,.\, p) \supset q}$ ”,

et en montrant alors que c’est là une tautologie. ”

Preuve logique *versus* preuve en logique

- 6.1263. (...) Il est clair d'emblée que la démonstration logique d'une proposition pourvue de sens et la démonstration *en logique* doivent être deux choses totalement différentes.

- 6.1264. La proposition pourvue de sens dit quelque chose et sa démonstration montre qu'il en est comme elle le dit ; en logique, chaque proposition est la forme d'une démonstration.

Implication matérielle et règles d'inférence

- $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ Tautologie
- Si P, alors Q ; or P; donc Q Modus Ponens

- $(\neg Q \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow \neg P$ Tautologie
- Si P, alors Q ; or non Q, donc non P Modus Tollens

- $(\neg P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow \neg Q$ Propositions non logique
- $(Q \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow P$ Pas de règle d'inférence

Raisonnement plausible de Polya

.

Sémantique et théorie élémentaire des modèles

Tarski (1936, 1944, 1955)

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Le concept de vérité dans les langages formalisés

« Construire une définition de l'expression " proposition vraie" ; définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte » (Tarski, 1936-a, 1972, *Le concept de vérité dans les langages formalisés* p.159).

« Dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « classique » de vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle *« vraiment »* signifie la même chose que *« conformément à la réalité »*. (op. cite., p. 160)

La notion de satisfaction d'une fonction propositionnelle

« *Pour tout a, a satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc » si et seulement si a est blanc* » (T36a, 193)

« Pour tout a et b, a et b satisfont la fonction propositionnelle « x voit y » si et seulement a voit b »

Lien avec la définition de la vérité

En substituant *a* à *x* dans « *x* est blanc », on obtient une proposition « *a* est blanc »

D'après la définition générale de la vérité

La proposition « a est blanc » est vraie si et seulement si a est blanc

Une extension des connecteurs logiques (1)

Négation

"La négation d'une fonction propositionnelle F(x) est satisfaite exactement par les éléments qui ne satisfont pas F(x)"

Implication

"Une implication ouverte "P(x) $\Rightarrow$ Q(x)" est satisfaite par les éléments qui satisfont P(x) et non Q(x) et par ceux qui ne satisfont pas P(x)".

Une extension des connecteurs logiques (2)

Implication

"Une implication ouverte "$P(x) \Rightarrow Q(x)$" est satisfaite par les éléments qui satisfont $P(x)$ et $Q(x)$, et par ceux qui ne satisfont pas $Q(x)$".

Exemple

« Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 qui satisfont la propriété

« si *x* est un nombre pair, alors son successeur est premier »

Réponse donnée le plus souvent

2, 4, 6, 10, 12, 16, 18

Réponse correcte en référence à la définition de l'implication en logique classique

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19

Modèle d'une formule

Un langage formalisé $\mathcal{L}$, une syntaxe, des énoncés bien formés (des formules) : *F*, *G*, *H*…

Une structure interprétative Σ (un domaine de réalité, une théorie mathématique)

Σ est *un modèle* d'une formule *F* de $\mathcal{L}$ si et seulement si l'interprétation de *F* dans Σ est un énoncé vrai

- *F* : $\forall x \forall y\ (S(\mathrm{x,y}) \wedge S(\mathrm{y,x}) \Leftrightarrow \mathrm{x=y})$
- Σ : ensemble des nombres réels ordonnés
- *S* → relation '*inférieur ou égal*'

F → « la relation '*inférieur ou égal*' est antisymétrique »

Sur le concept de conséquence

Tarski définit la notion *de conséquence logique d'un point de vue sémantique* :

La proposition X suit logiquement de la classe de propositions K si tout modèle de K est un modèle de X (Tarski, 1936-b, 1972, *Sur le concept de conséquence*)

Quelques exemples

« $\neg(\forall x(P(x)))$ » *suit logiquement* de « $\exists x(\neg P(x))$ » (1)

« $\exists x(\neg P(x))$ *suit logiquement* de « $\neg(\forall x(P(x)))$ » (2)

« q(x) » *suit logiquement* de « $p(x) \wedge (p(x) \Rightarrow q(x))$ » (3)

« $\neg p(x)$ » *suit logiquement* de « $\neg q(x) \wedge (p(x) \Rightarrow q(x))$ » (4)

(1) et (2) correspondent à l'inter définissabilité des deux quantificateurs du calcul des prédicats et à la règle du contre-exemple en mathématiques

(3) correspond au Modus Ponens dans le calcul des prédicats

(4) correspond au Modus Tollens dans le calcul des prédicats

Le théorème de la déduction en théorie des modèles

« Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie ; et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre » (…)

« Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (p.12)

Méthodologie des Sciences déductives

(Tarski, 1960, *Introduction à la logique*)

Système axiomatique formel
(sans référence à des objets)

Mini-théorie déductive

Termes primitifs

Termes définis

Axiomes

Théorèmes

Modèles

Univers du discours

Interprétation

des lettres

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Preuves par interprétation

Pour prouver qu'un énoncé donné de la théorie n'est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la formule associée à cet énoncé.

Exemple : le cinquième postulat d'Euclide et les géométries non euclidiennes

Preuves par interprétation

Un système axiomatique formel
(sans référence à des objets)
Une formule Φ associée à F

Une théorie déductive T

Axiomes

Un énoncé vrai F

Un **Modèle** M

G l'interprétation de Φ

G est un énoncé faux de M

F n'est pas une conséquence logique des axiomes de T

Une théorie féconde pour l'activité mathématique

« Tarski élargit le spectre des concepts méta mathématiques propres à permettre d'établir des rapports entre forme et contenu. Plus encore, il définit un type de rapport original où il n'est pas plus question de renoncer aux avantages de la formalisation et de l'analyse syntaxique permis par cette dernière qu'à l'exigence d'en réinvestir les résultats au niveau des contenus mathématiques, à leur donner une interprétation mathématique concrète »

(Sinaceur H. 1991a, *Corps et modèles*, Paris : Vrin, p.313)

Une théorie féconde pour **comprendre** l'activité mathématique

« La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie.(…) Une part essentielle de l'analyse épistémologique est ainsi ouvertement prise en charge par l'analyse logique. (…) En même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir.»

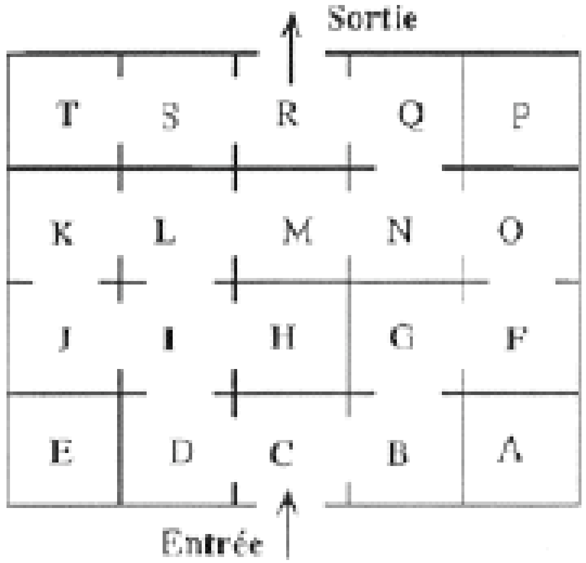
(Sinaceur, H. 1991b, Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ?, in *Hommage à Jean Toussaint Desanti*, TER)

Eléments de synthèse

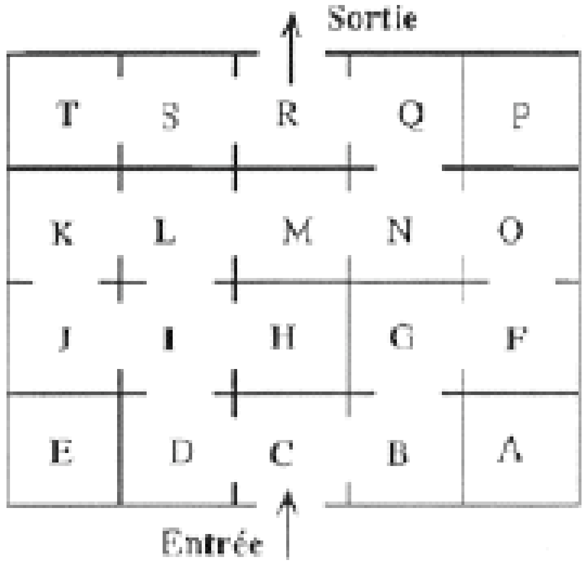
- ✓ Implication matérielle entre proposition
- ✓ Implication ouverte entre propriétés ou relations
- ✓ Cas d'une implication ouverte (*implication matérielle*)
- ✓ Implication formelle (universellement quantifiée)
- *Contre-exemple en lien avec la négation (réfutation de la vérité d'un énoncé général dans une théorie donnée)*
- ✓ Implication universellement valide (Tautologie - Conséquence logique au sens de la Théorie des modèles)
- ✓ Equivalence logique (*ex : contraposition*)
- ✓ Règle d'inférence (*associée à une tautologie, une conséquence logique)* - Mode de raisonnement valide.
- *Preuve par interprétation (réfutation de la validité d'une formule logique, vaut pour toutes les théories interprétatives)*

APPORT POUR LES ANALYSES DIDACTIQUES
Le labyrinthe

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010



Une personne que nous appellerons X a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte.



Pour chacune des phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

N°3 : « X est passé par M »

N°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

Un phénomène récurrent quelque soit le public

Une réponse unanime pour la phrase n° 3

On ne peut pas savoir car certains trajets rendent la phrase fausse, d'autre la rendent vraie

Un désaccord sur la phrase n° 6

Certains déclarent qu'elle est fausse

D'autres déclarent : *on ne peut pas savoir*

Exemples de réponses
Étudiants de licence scientifique 2ème année

- **On ne peut pas savoir**. Il existe un chemin où X passe par L et non par K et il existe un chemin où X passe par L et par K.
- **Elle peut être vraie, mais elle peut aussi être fausse**. (…) En réalité, **la construction si alors entraîne que la phrase est fausse** (car on a pas d'implication)
- **Faux** car X a pu passer par L en arrivant de I et en allant dans M (L a trois portes) et donc sans passer par K, donc **l'implication est fausse, il y a un contre-exemple** (cependant il est possible que X soit passé par L et K).
- **Faux** chemin $\Rightarrow$ X n'est pas passé par K (pour la 6, on pourrait dire « on ne peut pas savoir » mais **le alors me fait dire que c'est faux**.)

Une situation initialement proposée à des élèves de fin de Seconde en France (16 ans)

- Les professeurs considèrent que la phrase n°6 est fausse.
- Pour la phrase n°3, ils répondent « *on ne peut pas savoir* »
- Les élèves répondent majoritairement (près des deux tiers) « *on ne peut pas savoir* » pour la phrase n°6, surtout ceux qui réussissent bien l'ensemble du test et rentrent en Première scientifique

Quelques réponses d'élèves de Seconde

Vraie : X a pu passer dans la pièce K pour se rendre dans la pièce L

Faux : la réciproque de la phrase n°5 est fausse puisque X peut très bien emprunter un trajet sans passer par K

Faux : car X ne peut pas aller vers K puisqu'il doit aller vers la sortie

Faux : cette phrase est fausse car la case I est également possible pour arriver à L.

On ne peut pas savoir : En effet, X aurait pu passer soit dans la pièce K, soit dans la pièce I pour rejoindre la pièce L.

La phrase n'est ni vraie, ni fausse. On ne peut pas savoir. Car X a pu passer par K, mais X a aussi pu passer par I, pièce communiquant directement avec L, évitant le passage par K.

Le point de vue des professeurs (compte rendu d'EVAPM2-92)

En commentaires des résultats, les auteurs écrivent :

« *S'agit-il d'énoncés mathématiques, qu'il s'agirait d'appréhender de façon globale ? Dans ce cas, ce qui importe c'est la qualité d'un lien entre les deux assertions et non la véracité particulière de chacune des deux assertions* »

On reconnaît ici la distinction entre implication formelle et implication matérielle.

Quelle est la bonne notion d'implication en mathématique?

Le labyrinthe

Une situation révélatrice de divergences entre élèves, étudiants et professeurs sur l'interprétation des énoncés conditionnels dans la classe de mathématiques.

Une divergence qui se retrouve également à l'intérieur de groupes homogènes (élèves - étudiants de licence - étudiants avancés en mathématiques ou en informatique - professeurs de mathématiques - étudiants avancés en philosophie etc..

Eléments d'analyse logique

Différentes interprétations pour la lettre X

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Deux fonctions propositionnelles :

F1 : M(x) ; *x* est passé par *M*

F2 : L(x) ⇒ K(x) si *x* est passé par *M*, alors *x* est passé par *K*

Un domaine de réalité : la situation évoquée

Une personne appelée X

Trois trajets possibles pour sortir du labyrinthe :

T1 : CDILMNQR

T2 : CDIJKLMNR

T3 : CBGFONQR

Phrase n°3 : « X est passée par M »

Phrase n°6 : « Si X est passée par L, alors X est passée par K »

X est le nom propre d'une personne qui a traversé le labyrinthe sans passer deux fois par la même porte

- 1er cas : X a emprunté le trajet T1 ou X a emprunté le trajet T2 : la phrase n°3 est vraie
- 2ème cas : X a emprunté le trajet T3 : la phrase n°3 est fausse

  Celui qui doit répondre à la question ne connaît pas le trajet de X. Il ne sait pas ce qu'il en est de la vérité de la phrase n°3.

L'énoncé est contingent pour le sujet.

Le même raisonnement montre qu'il en est de même pour la phrase n°6, qui est interprété comme **une implication matérielle.**

X désigne un élément générique, n'importe quelle personne ayant traversé le labyrinthe sans passer deux fois par la même porte.

On ne sait rien sur X ; on ne peut rien dire sur le trajet associé à X. Les deux énoncés sont contingents de manière intrinsèque, et donc contingents pour le sujet.

La phrase 6 est une implication matérielle sur laquelle on ne sait rien

Ceci est le cas chaque fois que l'on considère une instance par un élément générique d'un énoncé ouvert qui n'est ni toujours vrai, ni toujours faux dans le contexte considéré.

Exemple :

« si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaire, alors c'est un losange »

La valeur de vérité dépend du quadrilatère considéré

X est une variable universellement quantifiée implicitement.

Phrase n°3 : Quelque soit la personne X, X est passée par M

Phrase n°6 : Quelque soit la personne X, si X est passée par L, alors X est passée par K

La phrase n°6 est interprété comme une implication formelle mais :

- Il n'y a pas de population de référence.
- Il se pourrait que certains trajets ne soient pas empruntés ; il y a un contre-exemple potentiel mais on n'est pas sûr qu'il soit actualisé.
- Les deux énoncés sont **contingents de manière intrinsèque**. *Ils sont dans les limbes* (Quine).

La quantification implicite porte sur la variable ‘*trajet*’

- Phrase n°3 : Quelque soit le trajet de *X*, *X* est passée par *M*
- Phrase n°6 : Quelque soit le trajet de *X*, si *X* est passée par *L*, alors X est passée par *K*
- La phrase n°6 est une implication formelle.
- Le domaine de quantification est l’ensemble des trajets possibles.
- Les deux énoncés sont **faux**, car ils admettent au moins un contre-exemple.

Conséquences didactiques

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

- La réponse majoritaire des élèves est cohérente.
- Aucune interprétation de la lettre *X* ne conduit à la réponse des professeurs.
- La pratique largement répandue de quantification implicite des énoncés conditionnels n'est pas partagée par une majorité d'élèves et un grand nombre d'étudiants scientifiques, même à des niveaux avancés. En outre, elle cache l'importance du domaine de quantification.
- Il est nécessaire de reconsidérer l'affirmation selon laquelle dans la classe de mathématiques, un énoncé serait soit vrai, sauf faux en accordant un statut aux énoncés contingents.

Conclusion

Viviane Durand-Guerrier
Limoges 21/04/2010

Conclusion (1)

Le parcours épistémologique que nous avons présenté met en évidence les multiples facettes de la notion d'implication, sa polysémie et sa complexité, alors qu'elle est souvent considérée comme transparente par les professeurs de mathématiques pour qui elle est en quelque sorte naturalisée.

On pourrait imaginer que la pratique mathématique suffit à construire cette notion, mais l'ensemble des travaux conduits sur ce sujet montrent que ce n'est pas le cas (outre nos travaux, voir en particulier les travaux de Rogalski & Rogalski, et de Deloustal-Jorrand avec les étudiants de Capes pour la France, ou Dubinski et Selden & Selden pour les USA.

Conclusion (2)

L'ensemble des travaux de didactique que nous conduisons montrent en outre que dans la classe de mathématiques, il est nécessaire de ne pas sous estimer la complexité des connecteurs logiques et des questions de quantification et de prendre en compte les relations entre *validité logique* et *vérité dans une interprétation*, telles qu'elles ont été développées par Wittgenstein et Tarski, dans la continuité d'Aristote, et popularisées par Quine (1950, 1972).

Ceci est particulièrement important dans la perspective de l'enseignement et de l'apprentissage de la preuve.

Conclusion (3)

Nos recherches nous ont conduit à mettre en évidence un certain nombre de *pratiques ordinaires* des enseignants de mathématiques tant du secondaire que du supérieur susceptibles de générer ou de renforcer des difficultés pour les élèves et les étudiants débutants, en particulier :

- ✓quantification implicite des énoncés conditionnels
- ✓non reconnaissance des énoncés contingents
- ✓absence d'explicitation du statut des lettres
- ✓absence de distinction claire entre vérité et validité
- ✓primat des procédures syntaxiques au détriment de l'articulation syntaxe et sémantique

Conclusion (4)

Nous proposons depuis plusieurs années des formations pour les enseignants du secondaire et du supérieur (CIES) visant à développer des compétences professionnelles permettant de repérer dans le cours de l'enseignement les moments et les situations appropriés pour travailler simultanément sur les aspects logiques et mathématiques des concepts en jeu. Ceci suppose en particulier une prise de distance critique par rapport à sa propre pratique qui permet de reconnaître que certaines questions des élèves et des étudiants mettent le doigt sur des difficultés inaperçues renvoyant à des questions concernant l'articulation entre logique, langage et raisonnement mathématique

Conclusion (5)

Un dernier commentaire

La logique dont nous parlons est l'héritière de la logique d'Aristote qui s'est construite sur la langue grecque. C'est une logique qui s'efforce de rester au plus près des langues ordinaires indo européennes . De ce fait, pour un locuteur de ces langues, l'articulation entre logique, langage et raisonnement apparaît comme assez naturelle.

Il est prévisible que d'autres questions se posent pour les apprentissages lorsque d'autres familles de langues sont en jeu.

.