Tournoi 2017 (corrigé lycée)

Mise en boîte

On veut répartir n boules numérotées de 1 à n dans deux boîtes de façon qu'aucune boîte ne soit vide et que, pour chaque boîte, le nombre total de boules se trouvant dans la boîte ne soit pas égal à l'un des numéros des boules qui sont dans cette boîte.
Expliquez pourquoi il n'y a qu'une possibilité pour n=3 : la boule 2 dans une boîte, les boules 1 et 3 dans l'autre.
Aucune des boîtes n'est vide donc une boîte contient une boule (par exemple la boîte A) et l'autre deux boules (la boîte B). La boule 1 est forcément dans la boîte B et la boule 2 est forcément dans la boîte A.
La boule 3 est donc dans B.

Écrivez toutes les possibilités pour n=4, n=5 puis n=6. Combien y a-t-il de possibilités pour n=7 ?
Pour n=4 : il n'est pas possible que les deux boîtes contiennent chacune 2 boules car on ne pourrait pas placer la boule 2. Donc une des boîtes contient une boule (par exemple la boîte A) et l'autre trois boules (la boîte B). La boule 1 est dans B, la boule 3 est dans A. Comme B contient 3 boules elle contient aussi les boules 2 et 4. Il y a donc une seule solution : 3 dans une boîte et 124 dans l'autre.

Pour n=5 :
Premier cas, la boîte A contient une boule, la boîte B contient 4 boules. Comme la boule 4 doit être dans A, B contient 1235.
Deuxième cas, la boîte A contient 2 boules, la boîte B contient 3 boules. 2 est dans B et 3 est dans A.
Pour compléter A on peut choisir l'une des boules 1, 4 ou 5. B se complète avec les deux boules restantes.
Il y a donc au total 4 solutions : (4, 1235), (13, 245), (34,125) et (35,124).

Pour n=6 :
Premier cas, la boîte A contient une boule, la boîte B contient 5 boules. Comme la boule 5 doit être dans A, B contient 12346.
Deuxième cas, la boîte A contient 2 boules, la boîte B contient 4 boules. 2 est dans B et 4 est dans A.
Pour compléter A on peut choisir l'une des boules 1, 3, 5 ou 6. B se complète avec les trois boules restantes.
Enfin il n'est pas possible que les deux boîtes contiennent 3 boules (on ne pourrait pas placer la boule 3).
Il y a donc au total 5 solutions : (5, 12346), (14, 2356), (34,1256), (45,1236) et (46, 1235).

Pour n=7 :
Premier cas, la boîte A contient une boule, la boîte B contient 6 boules. Comme la boule 6 doit être dans A, il n'y a qu'une possibilité.
Deuxième cas, la boîte A contient 2 boules, la boîte B contient 5 boules. 2 est dans B et 5 est dans A.
Pour compléter A on peut choisir l'une des boules 1, 3, 4, 6 ou 7 : il y a 5 possibilités.
Troisième cas, la boîte A contient 3 boules, la boîte B contient 4 boules. 3 est dans B et 4 est dans A.
Pour compléter A on doit choisir deux boules parmi 1, 2, 5, 6 et 7 : il y a 10 possibilités (12, 15, 16, 17, 25, 26, 27, 56, 57, 67).
Il y a donc au total 1 + 5 + 10 = 16 possibilités.

On répartit maintenant les n boules numérotées de 1 à n dans trois boîtes de façon qu'aucune boîte ne soit vide et que, pour chaque boîte, le nombre total de boules se trouvant dans la boîte ne soit pas égal à l'un des numéros des boules qui sont dans cette boîte.
Écrivez toutes les possibilités pour n=4, puis pour n=5.
Pour n=4 :

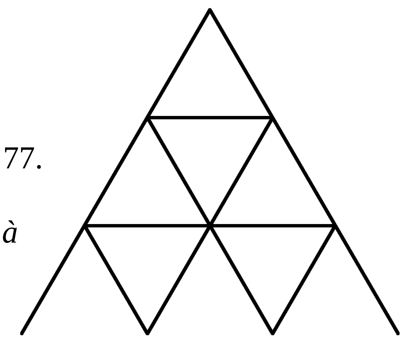
par exemple la boîte A contient deux boules (pas la boule 2) et les boîtes B et C contiennent une boule (pas la boule 1). La boule 1 est donc dans A, la boule 2 par exemple dans B. Il y a deux possibilités pour placer les boules 3 et 4 : (13, 2, 4) et (14, 2, 3).

Pour n=5 :
Premier cas, la boîte A contient 3 boules, la boîte B et la boîte C en contiennent chacune une. La boule 1 doit être dans A, la boule 3 est par exemple dans B. On place l'une des boules 2, 4, 5 dans C, les autres dans A. Cela donne 3 possibilités : (124, 3, 5), (125, 3, 4) et (145, 3, 2).
Deuxième cas, la boîte A et la boîte B contiennent 2 boules, la boîte C en contient une. 2 est dans C et 1 est par exemple dans A. Pour compléter A on choisit une boule parmi 3, 4 et 5 d'où 3 possibilités : (13, 45, 2), (14, 35, 2) et (15, 34, 2).

Combien y a-t-il de possibilités pour n=6 ?
Il ne peut pas y avoir 2 boules dans chaque boîte (on ne pourrait pas placer la boule 2).
Premier cas, la boîte A contient 4 boules, la boîte B et la boîte C en contiennent chacune une. La boule 1 doit être dans A, la boule 4 est par exemple dans B. On place l'une des boules 2, 3, 5, 6 dans C, les autres dans A. Cela donne 4 possibilités.
Deuxième cas, la boîte A contient 3 boules, la boîte B contient 2 boules, la boîte C en contient une.
2 est dans A ou C, 3 est dans B ou C, 1 est dans A ou B.
Premier sous cas, C contient 2 : 3 est donc dans B. On complète B par l'une des boules 1, 4, 5, 6 : 4 cas.
Deuxième sous cas, C contient 3 : 2 est donc dans A. On remplit B avec 2 des boules 1, 4, 5, 6, il y a 6 possibilités (14, 15, 16, 45, 46, 56).
Troisième sous cas, C ne contient ni 2, ni 3 : 2 est donc dans A et 3 est dans B.
Si on met 1 dans B, il reste 3 possibilités pour C : 4, 5 ou 6.
Si on met 1 dans A, il reste à répartir les boules 4, 5 et 6 dans les trois boîtes, une par boîte ; il y a 6 possibilités. Au total cela fait 4 + 4 + 6 + 3 + 6 = 23 possibilités.

Château de cartes

On utilise des cartes identiques pour construire un château comme ci-contre.



Château à 3 étages

1) *Combien faut-il de cartes pour construire un château à 5 étages, à 7 étages ?*

Pour 3 étages il faut 15 cartes. Pour 5 étages il en faut 40. Pour 7 étages il en faut 77.

2) *Soit n un entier positif : combien de cartes faut-il pour construire un château à n étages ?*
On rappelle que la somme des entiers de 1 à n est : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Si on ajoute n cartes à la base, cela fera au total $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ petits triangles formés chacun de 3 cartes. En retirant les n cartes à la base on obtient $\frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{n(3n+1)}{2}$ cartes pour un château à n étages.

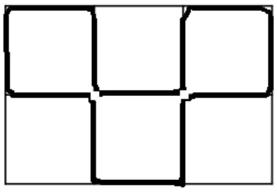
3) *On dispose de 2017 cartes. Combien d'étages comporte le plus grand château que l'on puisse faire ? Combien de cartes reste-t-il alors ? Combien en manque-t-il pour faire un étage de plus ?*

La plus grande valeur de n telle que $\frac{n(3n+1)}{2} \leq 2017$ est n = 36. Il reste alors 2017 – 1962 = 55 cartes.
Pour faire un étage de plus, le 37ème , on a besoin de 36 + 2 fois 37 = 110 cartes, donc il en manque 55.

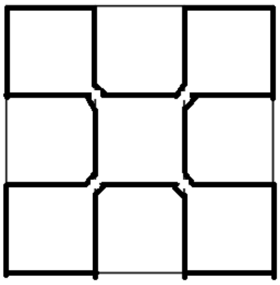
4) On souhaite réaliser un château qui mesure au moins 2017 mm de haut. On dispose de cartes dont la hauteur mesure 9 cm. Quel est le nombre minimum de cartes nécessaires ?
La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 9 cm est égale à $9\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}8\ cm$. On calcule $\frac{201{,}7}{7{,}8} \approx 25{,}9$. Il faut n = 26 étages donc 1027 cartes.

Longs-circuits

Sur chacune de ces deux grilles (2×3 avec 12 nœuds et 3×3 avec 16 nœuds) on a tracé un circuit fermé en suivant les lignes de façon que le circuit ne passe pas deux fois par le même segment (mais il peut passer deux fois par le même nœud de la grille).



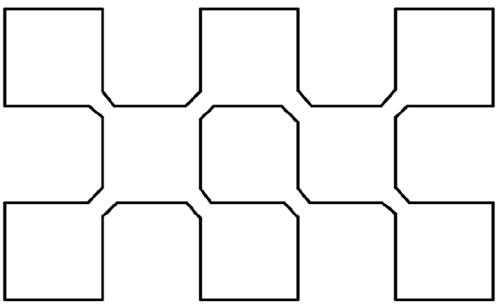
circuit de longueur 12



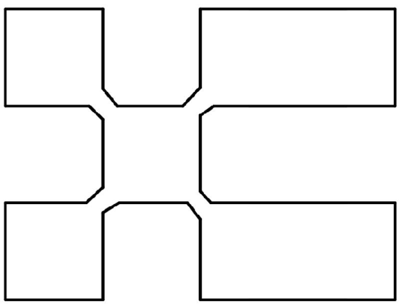
circuit de longueur 20

a) Expliquez pourquoi, sur ces grilles, on ne peut pas tracer de circuit fermé plus long ne passant pas deux fois par le même segment.
Pour un tel circuit, chaque nœud sur le bord de la grille est extrémité d'au maximum 2 segments parcourus par le circuit, chaque nœud à l'intérieur de la grille est extrémité d'au maximum 4 segments parcourus par le circuit.
Pour la grille 3×3 cela fait au maximum $12 \times 2 + 4 \times 4 = 40$ extrémités de segment, donc au maximum 20 segments parcourus par le circuit.
Mais pour la grille 2×3 il y a un nombre impair de nœuds sur deux des côtés.
Soit on relie tous les nœuds d'un de ces côtés mais alors un des nœuds à l'intérieur ne sera pas relié à ce côté, soit un des nœuds sur ce côté n'est pas extrémité d'un segment. Dans tous les cas il faut retirer 4 au maximum théorique, c'est-à-dire qu'il y a au maximum $10 \times 2 + 2 \times 4 - 4 = 24$ extrémités de segment donc au maximum 12 segments parcourus par le circuit.

b) Tracez un circuit fermé le plus long possible ne passant pas deux fois par le même segment sur une grille 3×5 avec 24 nœuds, puis sur une grille 3×4 avec 20 nœuds. Quelles sont les longueurs de ces circuits ? Expliquez pourquoi on ne peut pas tracer de circuit fermé plus long ne passant pas deux fois par le même segment sur ces grilles.



grille 3 x 5 avec un circuit de longueur 32



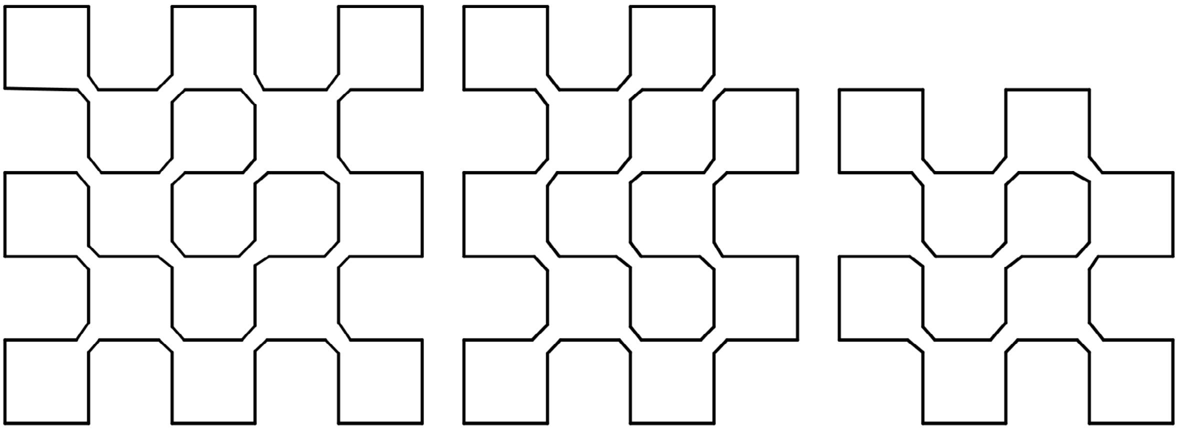
grille 3 x 4 avec un circuit de longueur 24

Pour la grille 3×5 cela fait au maximum $16 \times 2 + 8 \times 4 = 64$ extrémités de segment, donc au maximum 32 segments parcourus par le circuit.
Mais pour la grille 3×4 il y a un nombre impair de nœuds sur deux des côtés, par suite il faut retirer 4 au maximum théorique. Cela fait donc au maximum $14 \times 2 + 6 \times 4 - 4 = 48$ extrémités de segment donc au maximum 24 segments parcourus par le circuit.

c) On veut généraliser à une grille $a \times b$ avec $(a+1)(b+1)$ nœuds, a et b étant des entiers supérieurs ou égaux à 2. Quelle est la longueur maximale d'un circuit fermé ne passant pas deux fois par le même segment ? (traitez d'abord le cas où a et b sont impairs)

Pour une grille $\mathrm{a} \times \mathrm{b}$ il y a $2(\mathrm{a}+\mathrm{b})$ nœuds sur le bord $(\mathrm{a}-1)(\mathrm{b}-1)$ nœuds à l'intérieur, donc au maximum $4(\mathrm{a}+\mathrm{b}) + 4(\mathrm{ab}-\mathrm{a}-\mathrm{b}+1) = 4(\mathrm{ab}+1)$ extrémités de segment, donc au maximum $\underline{2\mathrm{ab}+2}$ segments parcourus par le circuit.
Si a et b sont impairs ce maximum peut être atteint.

En revanche si a ou b est pair, il y a un nombre impair de nœuds sur au moins deux des côtés.
Soit on relie tous les nœuds d'un de ces côtés mais alors un des nœuds à l'intérieur ne sera pas relié à ce côté, soit un des nœuds sur ce côté n'est pas extrémité d'un segment. Dans tous les cas il faut retirer 4 au maximum théorique, c'est-à-dire qu'il y a au maximum 4ab extrémités de segment donc au maximum <u>2ab</u> segments parcourus par le circuit. Ce maximum peut être atteint comme on le voit sur les exemples suivants:



grille 5 x 5 avec un circuit de longueur 52

grille 5 x 4 avec un circuit de longueur 40

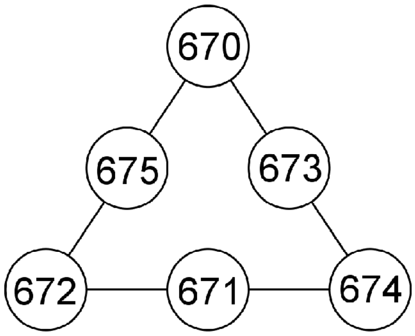
grille 4 x 4 avec un circuit de longueur 32

Triangles magiques (pour les secondes)

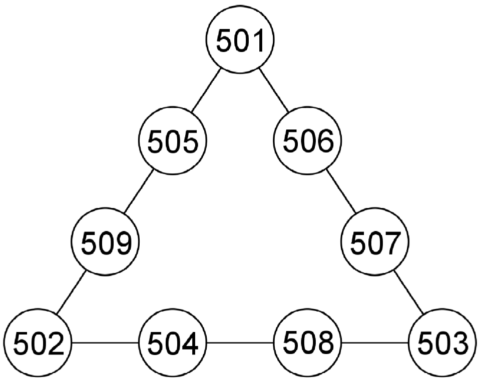
Placez six nombres entiers consécutifs dans les six cercles de façon que les sommes de trois nombres alignés soient toutes égales à 2017.

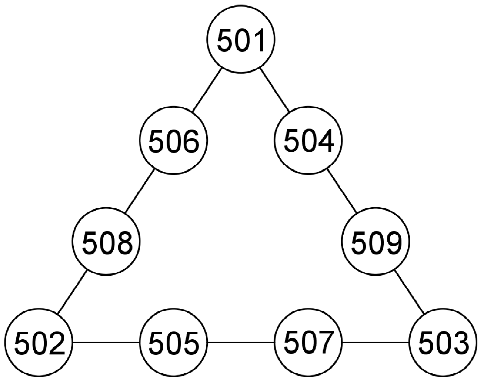
Notons x le plus petit de ces 6 nombres, les autres sont x+1, x+2, x+3, x+4 et x+5. Notons x+a, x+b et x+c les nombres placés aux sommets du triangle (a, b et c sont donc trois entiers distincts compris entre 0 et 5).
Si on ajoute les trois sommes des nombres sur chacun des trois côtés on obtient :
$3 \times 2017 = 6051 = x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) + (x+a) + (x+b) + (x+c)$ puisque les nombres placés aux sommets sont obtenus deux fois. On en déduit $a+b+c = 6036 - 9x = 9(670 - x) + 6$.
Mais a+b+c est compris entre 0+1+2=3 et 3+4+5=12, donc la seule possibilité est x = 670 et a+b+c = 6.
Il y a trois façons d'obtenir 6 avec trois entiers distincts compris entre 0 et 5 :
5 + 1 + 0, 4 + 2 + 0 et 3 + 2 + 1.

La première ne convient pas puisque le côté du triangle ayant comme extrémités 671 et 675 devrait avoir comme troisième entier 2017-671-675=671 qui ne peut pas figurer deux fois.
La troisième ne convient pas non plus puisque le côté du triangle ayant comme extrémités 672 et 673 devrait avoir comme troisième entier 2017-672-673=672 qui ne peut pas figurer deux fois.
Il y a donc une seule solution (à rotation ou symétrie près).

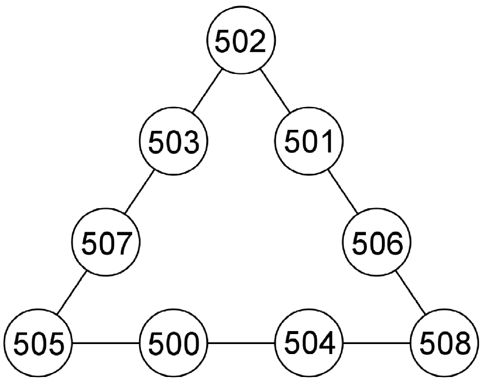


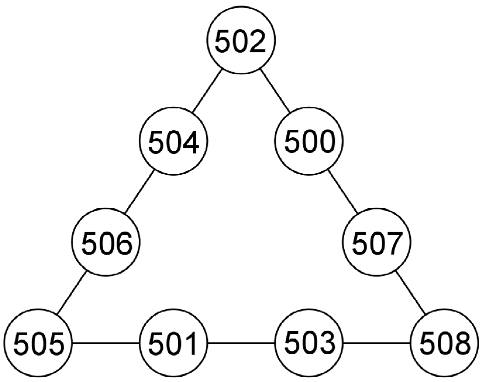
Placez neuf nombres entiers consécutifs dans les neuf cercles de façon que les sommes de quatre nombres alignés soient toutes égales à 2017.
Donnez une seule solution en expliquant bien comment vous l'avez obtenue.
Notons x le plus petit de ces 9 nombres, les autres sont x+1, x+2, … , x+8. Notons x+a, x+b et x+c les nombres placés aux sommets du triangle (a, b et c sont donc trois entiers distincts compris entre 0 et 8).
Si on ajoute les trois sommes des nombres sur chacun des trois côtés on obtient :
$3 \times 2017 = 6051$ = x + (x+1) + … + (x+8) + (x+a) + (x+b) + (x+c) puisque les nombres placés aux sommets sont obtenus deux fois. On en déduit a+b+c = 6015 – 12x = 12 (501 - x) + 3.
Mais a+b+c est compris entre 0+1+2=3 et 6+7+8=21. Il y a donc deux possibilités :
x = 501 et a+b+c = 3 ou bien x = 500 et a+b+c = 15.
Pour la première possibilité, a, b et c sont égaux à 0, 1 et 2. On obtient deux solutions (en ajoutant 501) :

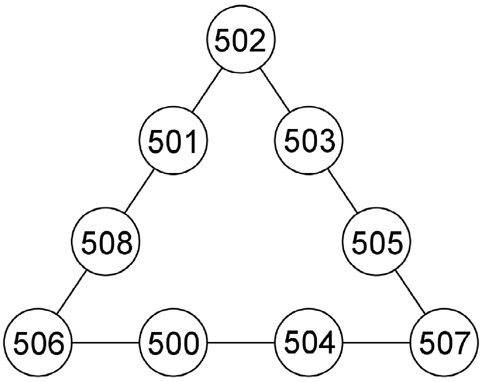


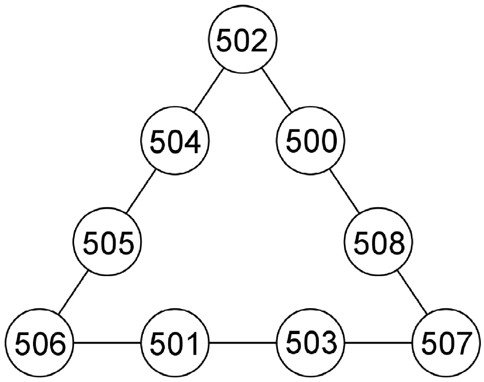


Pour la deuxième possibilité, a+b+c = 15 = 8+7+0 = 8+6+1 = 8+5+2 = 8+4+3 = 7+6+2 = 7+5+3 = 6+5+4.
Mais seulement 8 + 5 + 2 et 7 + 6 + 2 donnent des solutions (en ajoutant 500) :









Sommes d’entiers consécutifs (pour les premières et terminales)

Montrez que le nombre 30 peut s’écrire à la fois comme la somme de 3 entiers consécutifs, de 4 entiers consécutifs et de 5 entiers consécutifs.
30 = 9 + 10 + 11 = 6 + 7 + 8 + 9 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8.

Trouvez un nombre qui peut s’écrire à la fois comme la somme de 5 entiers consécutifs, de 6 entiers consécutifs et de 7 entiers consécutifs.

Un tel nombre est somme de 5 entiers consécutifs, donc il s’écrit (a-2) + (a-1) + a + (a+1) + (a+2) = 5a : il est donc multiple de 5.
D’autre part il est somme de 6 entiers consécutifs, donc il s’écrit (b-2) + (b-1) + b + (b+1) + (b+2) + (b+3) = 6b + 3 : il est donc multiple de 3.
Enfin il est somme de 7 entiers consécutifs, donc il s’écrit (c-3) + (c-2) + (c-1) + c + (c+1) + (c+2) + (c+3) = 7c : il est donc multiple de 7.
En définitive il doit être multiple de $3 \times 5 \times 7 = 105$. On vérifie que 105 convient car :
105 = 19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18.

Généralisation : Trouvez un nombre qui peut s’écrire à la fois comme la somme de 2n-1 entiers consécutifs, de 2n entiers consécutifs et de 2n+1 entiers consécutifs.
Un tel nombre est somme de 2n-1 entiers consécutifs, donc il s’écrit (a-(n-1)) + (a-(n-2)) + … + (a+(n-2)) + (a+(n-1)) = (2n-1)a : il est donc multiple de 2n-1.
D’autre part il est somme de 2n entiers consécutifs, donc il s’écrit (b-n) + (b-(n-1)) + … + (b+(n-2)) + (b+(n-1)) = (2b-1)n : il est donc multiple de n.
Enfin il est somme de 2n+1 entiers consécutifs, donc il s’écrit (c-n) + (c-(n-1)) + … + (c+(n-1)) + (c+n) = (2n+1)c : il est donc multiple de 2n+1.
L’entier $n \times (2n-1) \times (2n+1) = 4n^3 - n$ convient en prenant $a = 2n^2 + n$, $b = 2n^2$ et $c = 2n^2 - n$ dans les sommes précédentes.

Existe-t-il un nombre qui peut s’écrire à la fois comme la somme de 2n entiers consécutifs, de 2n+1 entiers consécutifs et de 2n+2 entiers consécutifs ?
Un tel nombre serait somme de 2n entiers consécutifs, donc il s’écrirait (a-n) + (a-(n-1)) + … + (a+(n-2)) + (a+(n-1)) = (2a-1)n .
Il serait aussi somme de 2n+2 entiers consécutifs, donc il s’écrirait (b-(n+1)) + (b-n) + … + (b+(n-1)) + (b+n) = (2b-1)(n+1).
Mais l’égalité (2a-1)n = (2b-1)(n+1) est impossible car n et n+1 étant de parité différente, cela impliquerait l’égalité entre un nombre pair et un nombre impair. Un tel nombre n’existe donc pas.