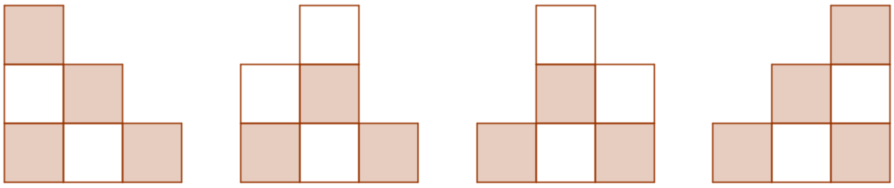
Tournoi 2017 (corrigé collège)

Jeu de cubes

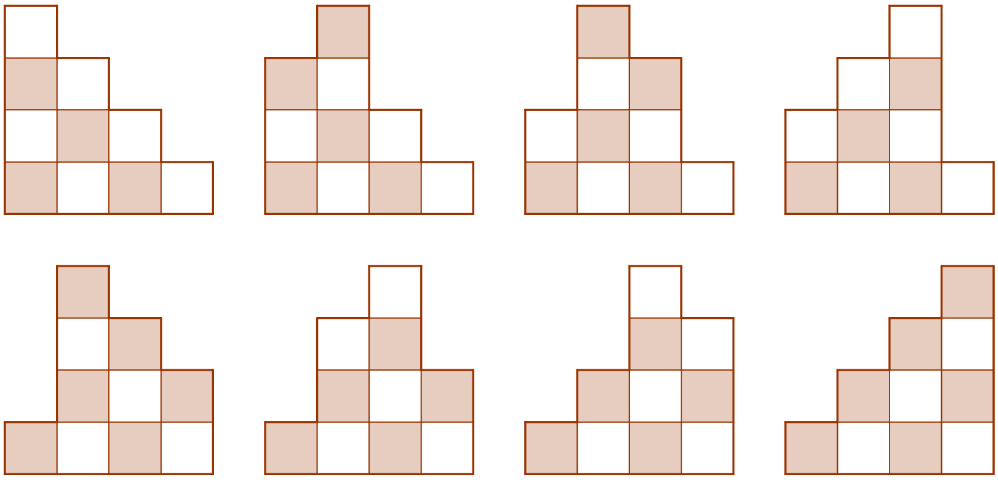
On forme un empilement de cubes à n étages en respectant les règles suivantes :

- *En bas on aligne n cubes côte à côte*
- *On surmonte chaque rangée d'une rangée possédant un cube de moins, ces cubes étant côte à côte, chaque cube étant placé exactement sur un cube de la rangée en dessous*
- *Enfin on colorie en gris un cube sur deux, comme sur un damier, en commençant par un cube gris en bas à gauche*

Voici par exemple les quatre empilements possibles pour n=3. On remarque qu'il y a 3 ou 4 cubes gris.



Dessinez sur une feuille quadrillée tous les empilements possibles pour n=4.



Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre de cubes gris ?
Il y a 4, 5 ou 6 cubes gris.

Même question avec n=6.
Pour n=6 on obtient 9 cubes gris si on place les cubes le plus à gauche possible, 12 cubes gris si on les place le plus à droite possible. En les plaçant différemment on peut aussi obtenir 10 cubes gris ou 11 cubes gris.

Pour n=4, combien de configurations ont le même nombre de cubes gris que de cubes blancs ?
Comme il y a 10 cubes au total, ce sont les configurations qui ont 5 cubes gris. Il y en a 4.

Pour quels entiers inférieurs à 10 existe-t-il des configurations avec le même nombre de cubes gris que de cubes blancs ?

Une telle configuration n'existe que si le nombre total de cubes est pair.
C'est le cas pour n=3 (6 cubes), n=4 (10 cubes), n=7 (28 cubes) et n=8 (36 cubes).

En passant par le puits

Trois boules numérotées de 1 à 3 sont alignées à droite d'un puits vertical comme indiqué sur la première figure. ***Les <u>deux seules</u> actions autorisées sont*** *:*

- *Parmi les boules qui sont à droite, faire tomber dans le puits celle qui est <u>la plus à gauche</u> (cette action sera notée T comme tomber)*
- *Faire remonter <u>à gauche</u> la boule qui est la plus haute dans le puits (cette action sera notée R comme remonter)*

On peut effectuer ces actions dans n'importe quel ordre. Dans le puits comme à droite et à gauche on ne peut pas intervertir les boules.

a) Expliquez ce qu'on obtient à gauche du puits en partant de la figure 1 et en effectuant la suite d'actions : T R T T R R.
On obtient à gauche 1, 3 et 2 (de gauche à droite).

b) Donnez une suite d'actions autorisées qui, en partant de la figure 1, conduisent à ce qu'on observe dans la figure 2.

Figure 1 :

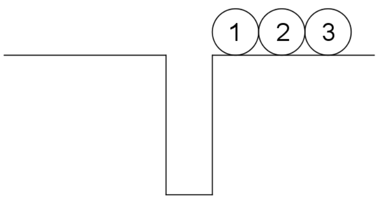
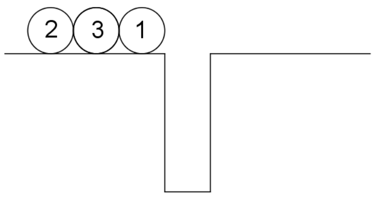


Figure 2 :



Il faut placer le 2 en premier donc on doit commencer par T, T, R.
Ensuite on fait T, R, R.

c) Dans la figure 2 les boules sont de gauche à droite dans l'ordre 2, 3, 1.
En partant de la figure 1 expliquez quels sont les ordres que l'on peut obtenir pour les trois boules à gauche du puits en respectant les actions autorisées.
La séquence TTTRRR donne l'ordre 3, 2, 1.
La séquence TTRTRR donne l'ordre 2, 3, 1.
La séquence TTRRTR donne l'ordre 2, 1, 3.
La séquence TRTTRR donne l'ordre 1, 3, 2.
La séquence TRTRTR donne l'ordre 1, 2, 3.

Quel est l'ordre que l'on ne peut pas obtenir pour les trois boules ?
On ne peut pas obtenir l'ordre 3, 1, 2 car pour placer 3 en premier il faut avoir mis dans cet ordre 1 et 2 au fond du puits, par suite 2 va remonter avant 1 et on obtient 3, 2, 1.

d) On dispose maintenant quatre boules, numérotées de 1 à 4, alignées dans cet ordre à droite du puits.
En utilisant les mêmes actions autorisées, quels sont les ordres que l'on peut obtenir pour les quatre boules à gauche du puits et ceux qu'on ne peut pas obtenir ?

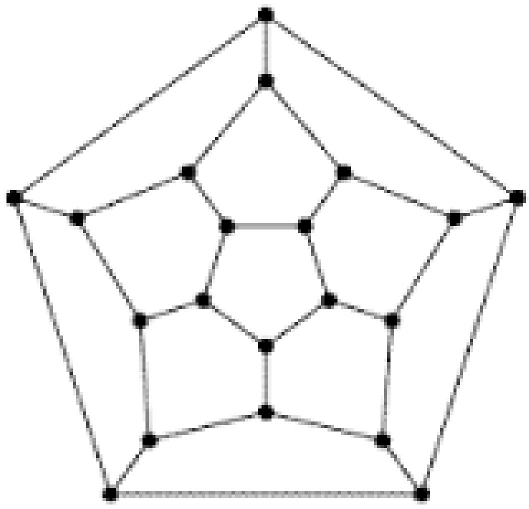
Premier cas : on place la boule 1 en premier à gauche du puits. Il reste 3 boules à droite du puits, donc on est ramené au cas précédent (en ajoutant 1 à chaque numéro) : on peut obtenir les ordres 1234, 1243, 1324, 1342 et 1432. On ne peut pas obtenir 1423.
Deuxième cas : on place la boule 2 en premier à gauche du puits, donc la boule 1 est au fond du puits. Pour la suite, c'est comme si on partait avec les boules 1, 3 et 4 à droite du puits. Par rapport au premier cas il suffit donc d'échanger le 1 et le 2. On pourra donc obtenir les ordres 2134, 2143, 2314, 2341 et 2431. On ne peut pas obtenir 2413.
Troisième cas : on place la boule 3 en premier à gauche du puits, donc les boules 1 et 2 sont au fond du puits. Elles arriveront dans l'ordre 2 suivi de 1 mais on peut intercaler la boule 4. On pourra donc obtenir les ordres 3214, 3241 et 3421. On ne peut pas obtenir 3124, 3142 et 3412.
Quatrième cas : on place la boule 4 en premier à gauche du puits. On ne peut obtenir que 4321. On ne peut pas obtenir 4123, 4132, 4213, 4231 et 4312.
Il y a donc 14 ordres que l'on peut obtenir : 1234, 1243, 1324, 1342 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2431, 3214, 3241, 3421 et 4321.
Il y en a 10 qu'on ne peut pas obtenir : 1423, 2413, 3124, 3142, 3412, 4123, 4132, 4213, 4231 et 4312.

Petite différence

Combien y a-t-il de nombres entiers à 3 chiffres (ne débutant pas par 0) tels que deux chiffres consécutifs ont une différence égale à 1 ou à -1 ? Par exemple 232 convient mais pas 243.
Notons x le premier chiffre du nombre (chiffre des centaines).
Premier cas : les autres chiffres sont x+1 (dizaines) et x+2 (unités). Il y a 7 possibilités car x doit être compris entre 1 et 7.
Deuxième cas : les autres chiffres sont x+1 (dizaines) et x (unités). Il y a 8 possibilités car x doit être compris entre 1 et 8.
Troisième cas : les autres chiffres sont x-1 (dizaines) et x (unités). Il y a 9 possibilités car x doit être compris entre 1 et 9.
Quatrième cas : les autres chiffres sont x-1 (dizaines) et x-2 (unités). Il y a 8 possibilités car x doit être compris entre 2 et 9.
Au total cela fait 32 nombres.

Même question avec des nombres à 4 chiffres.
C'est le même principe mais il y a 8 cas (en notant x le chiffre des milliers).
(x, x+1, x+2, x+3) : 6 nombres car x doit être compris entre 1 et 6.
(x, x+1, x+2, x+1) : 7 nombres car x doit être compris entre 1 et 7.
(x, x+1, x, x+1) : 8 nombres car x doit être compris entre 1 et 8.
(x, x+1, x, x-1) : 8 nombres car x doit être compris entre 1 et 8.
(x, x-1, x, x+1) : 8 nombres car x doit être compris entre 1 et 8.
(x, x-1, x, x-1) : 9 nombres car x doit être compris entre 1 et 9.
(x, x-1, x-2, x-1) : 8 nombres car x doit être compris entre 2 et 9.
(x, x-1, x-2, x-3) : 7 nombres car x doit être compris entre 3 et 9.
Au total cela fait 61 nombres.

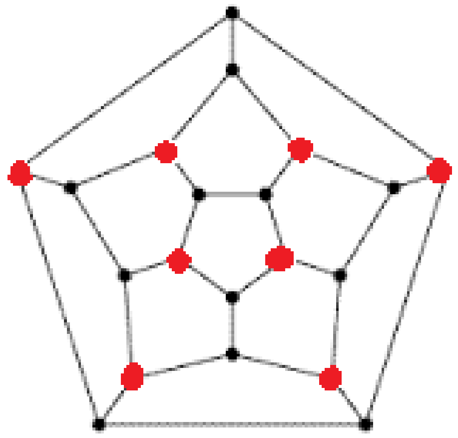
Points rouges



Sur ce dessin il y a 20 points et 30 segments (chaque segment relie deux des points).

Reproduisez ce dessin et coloriez en rouge le plus grand nombre possible de points parmi ces 20 points en respectant la

condition suivante :
il n'y a jamais deux points rouges reliés par un segment.



On obtient 8 points rouges. Il y a quatre autres solutions obtenues par rotations autour du centre du grand pentagone. Chaque solution possède un axe de symétrie joignant le centre du grand pentagone à un sommet.
NOTA : un pentagone est un polygone à 5 sommets, c'est-à-dire une ligne brisée fermée formée de 5 segments.

Pouvez-vous justifier qu'on ne peut pas en colorier davantage en respectant cette condition ?
Il ne peut pas y avoir plus de 8 points rouges. En effet, chaque pentagone de la figure a au maximum deux points rouges (s'il y en avait trois, deux des points rouges seraient reliés par un segment). Au total il y a 12 pentagones sur la figure (en comptant le grand pentagone). Cela fait au total 24 points rouges, mais chaque point rouge appartient à exactement 3 pentagones, donc est compté 3 fois. En définitive cela fait bien 8 points rouges au maximum.