TOURNOI MATHEMATIQUE du LIMOUSIN 16 en lycées Professionnels

Parcours sportif des matheux !!!

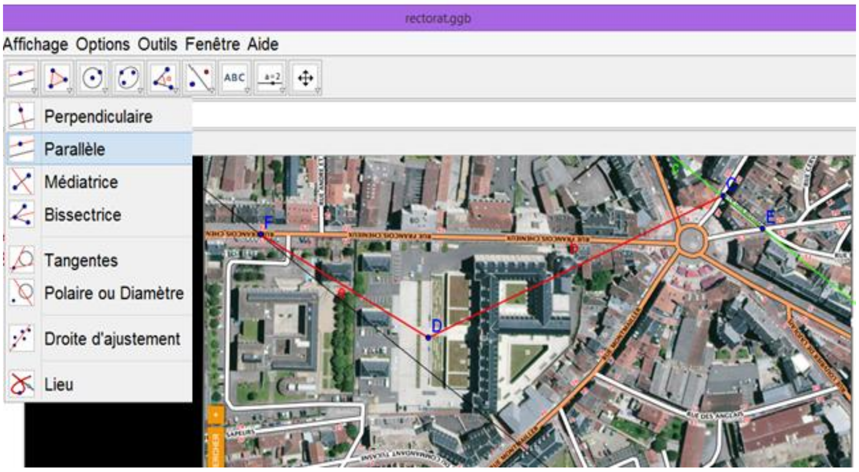
Éléments de CORRECTION

1) Le départ du Rectorat

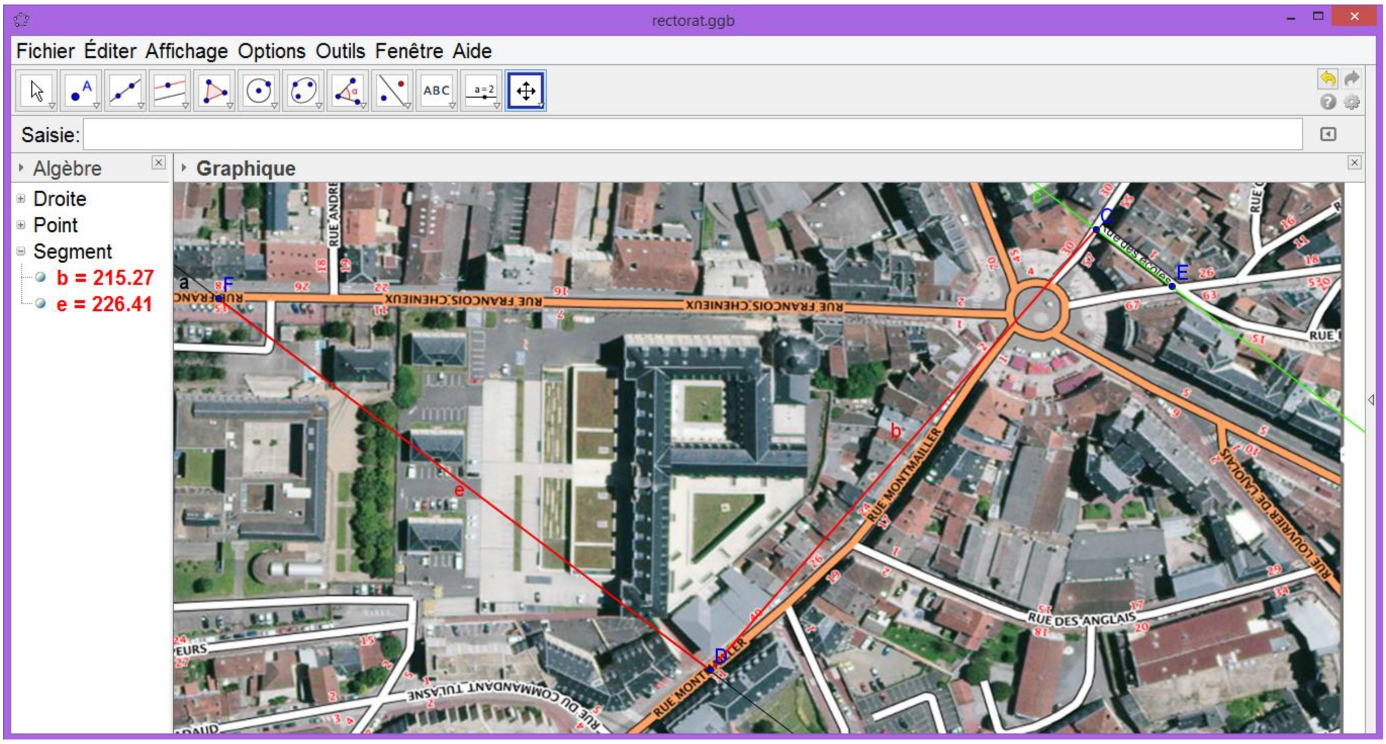
a) Méthodes expérimentales

Avec le ***fichier Géogébra*** ou sur ***la Carte*** du quartier du Rectorat, on peut construire une droite parallèle à la rue des Ecoles qui passe par le 15 rue François Chénieux, point F sur fichier :

Sur Géogébra : - Tracer une droite parallèle à la droite **(CE)** passant par le point **F**



- Déplacer le point **D** , pour l'amener à l'intersection de la parallèle et de la rue Montmailler



***ICI* , le parcours le plus court pour rejoindre la rue des Ecoles correspond à**

FD + DC = 215,27 + 226,41= 441,68 m

Sur la Carte: - Tracer la droite suivant la rue des Ecole ;

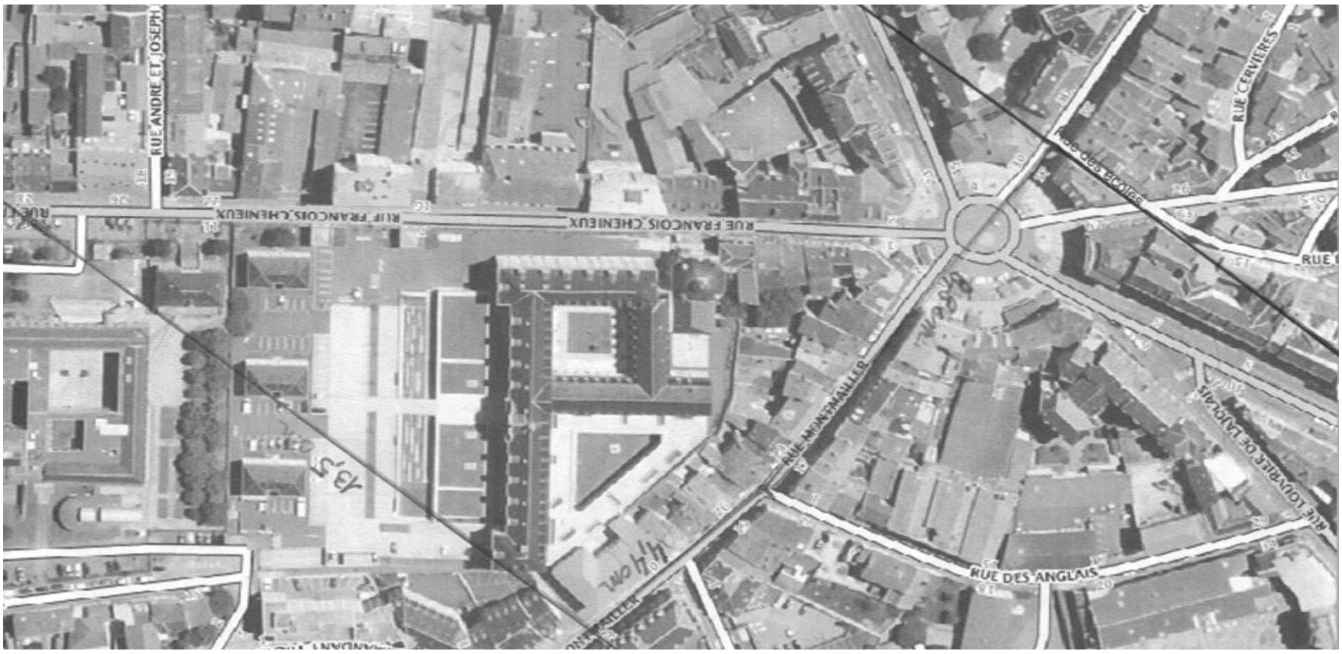
- Construire à la règle et au compas la parallèle passant par le 15 rue F. Chénieux (point **F**) et placer **D**
- On mesure **FD = 13,5 cm** et **DC = 4,4 + 8,8 = 13,2 cm** (en suivant la rue Montmailler)
- On utilise l'échelle pour calculer les longueurs réelles :

	échelle	FD	DC
Longueur sur la Carte en cm	3	13,5	13,2
Longueur en Réalité en m	50	x	y

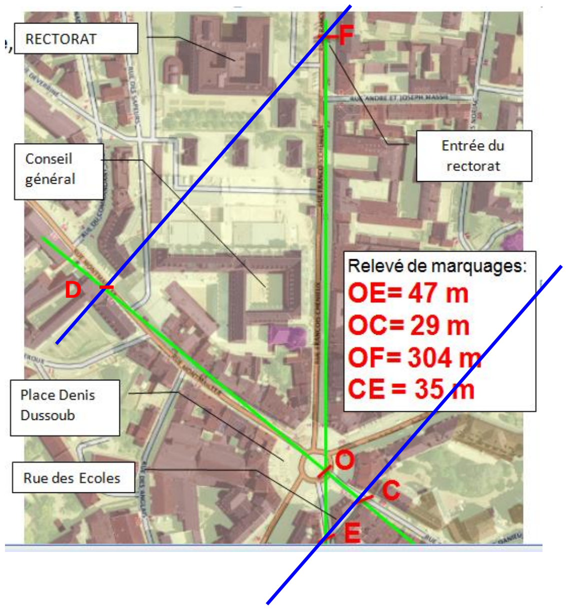
$$x = \frac{50 \times 13,5}{3} = 225$$

$$y = \frac{50 \times 13,2}{3} = 220$$

$x + y = 225 + 220 = 445$ donc **trajet de 445 m**



b) Méthode algébrique



On a (DF) // (CE) et (FE), (SC) sécantes en O, les points F,O, E alignés dans le même ordre que D,O,E

Selon le théorème de Thalès, on a la relation : $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD} = \frac{CE}{FD}$

Avec $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD} \Leftrightarrow \frac{47}{304} = \frac{29}{OD} \Leftrightarrow OD = \frac{304 \times 29}{47} \approx 187{,}6\ m$

Avec $\frac{OE}{OF} = \frac{CE}{FD} \Leftrightarrow \frac{47}{304} = \frac{35}{FD} \Leftrightarrow FD = \frac{304 \times 35}{47} \approx 226{,}4\ m$

***ICI* , le parcours le plus court pour rejoindre la rue des Ecoles correspond à**

FD + DO + OC = 226,4 + 187,6 + 29 = 443,0 m

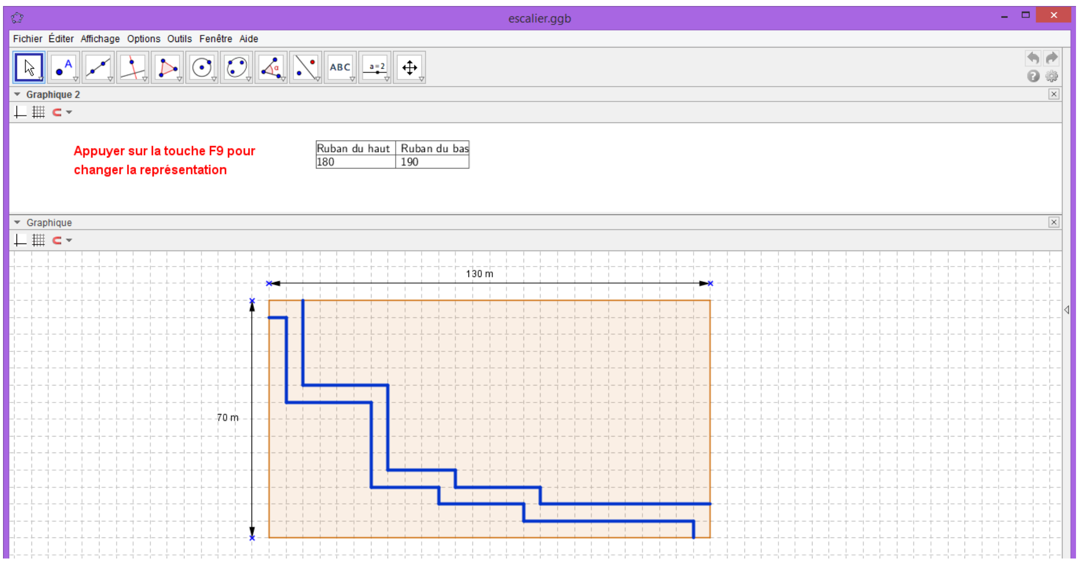
2) Au Jardin des Emailleurs

a) Préparation des lieux : Un chemin Géométrique !

Méthode expérimentale: *par essais et gestion de la contrainte de longueur du ruban du haut*

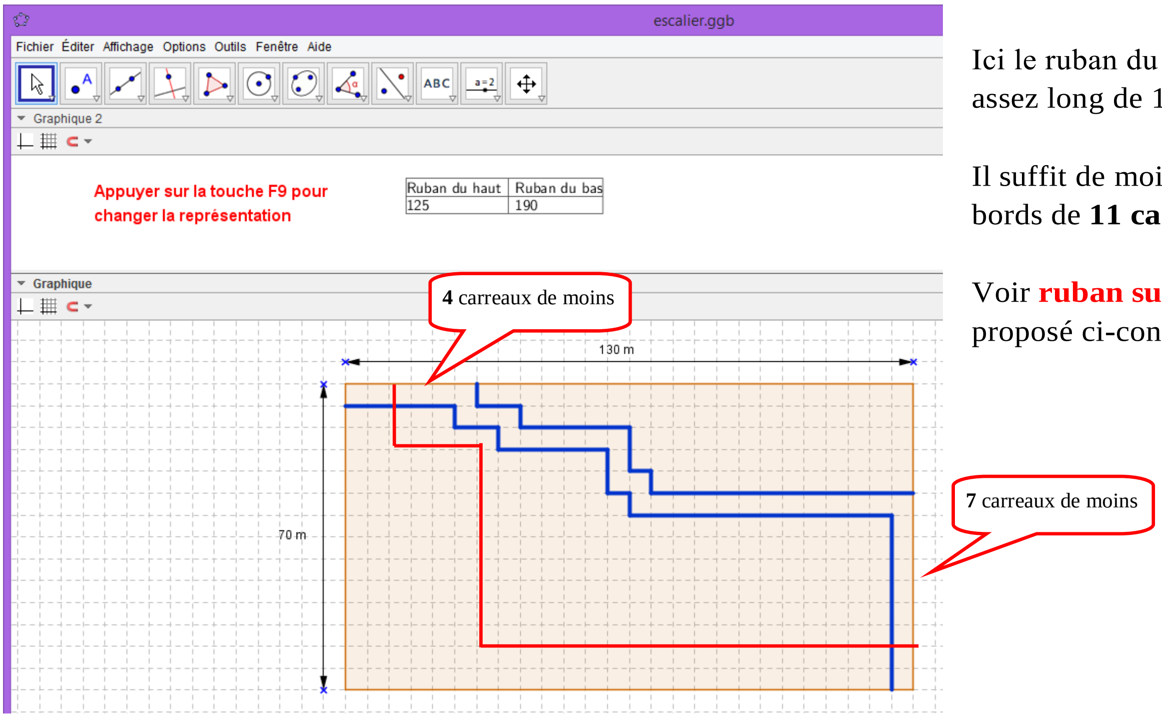
Avec le ***fichier Géogébra***, on peut faire plusieurs essais de « diagonale-escalier », ce qui permet de conjecturer que le ruban du bas garde la même longueur, **190 m**. Ainsi pour obtenir la longueur totale de ruban voulue **370m**, il faut trouver un ruban supérieur de **370 -190 = 180 m**

- Il est possible de faire de nombreux essais sur ***Géogébra***, jusqu'à obtenir l'allée de ruban supérieur de **180 m** :



- Il est aussi possible de remarquer que « *longer le bord du parc permet de diminuer d'autant la longueur du ruban supérieur* ». Ainsi à partir d'une allée obtenue sur Géogébra avec un ruban supérieur trop court, il suffit de moins longer le bord du parc en tournant plus tôt au départ (en haut à gauche) et en descendant plus bas avant de tourner à l'arrivée (en bas à droite)

Les côtés des carreaux du quadrillage représentent **5 m**

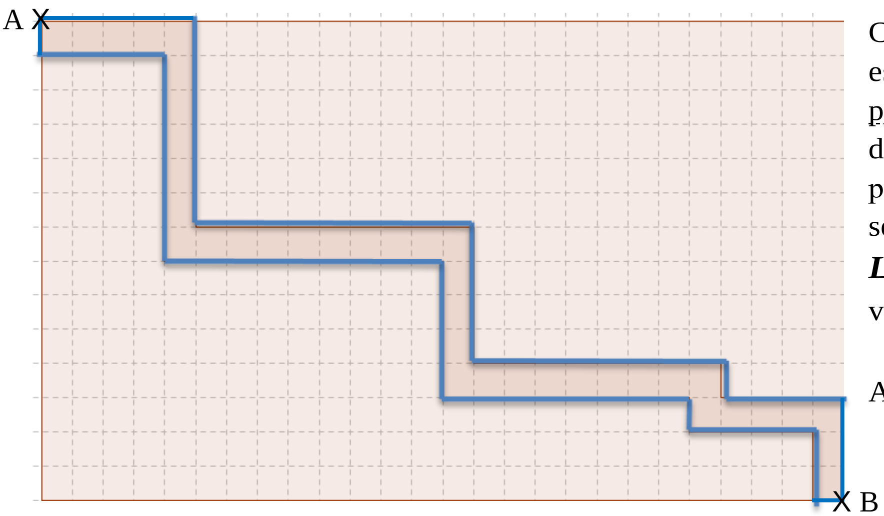


Ici le ruban du haut n'est pas assez long de 180 – 125 = **55 m**

Il suffit de moins longer les bords de **11 carreaux**

Voir **ruban supérieur ROUGE** proposé ci-contre

Méthode arithmétique:



Considérons d'abord une « diagonale escalier » avec du ruban sur tout son pourtour : Quelle que soit l'allée dessinée, le trajet de A à B par le haut, ou par le bas est constitué d'un ensemble de segments horizontaux formant la ***L***ongueur du parc (130m) et de segments verticaux formant la ***l***argeur, 70 m

Ainsi AB = ***l*** + ***L*** = 70 + 130 = 200 m

Dans la situation proposée, le ruban du bas a pour longueur AB – 5 – 5 = 200 -10 = 190m (2 largeurs d'allée enlevées) → La longueur de cette portion de ruban ne varie pas.

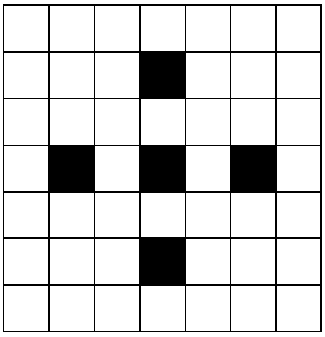
On déduit le besoin nécessaire de ruban supérieur 370- 190 = 180 m.
Comme en longeant le parc, on diminue d'autant le ruban, on cherche sur quelle distance le longer, c'est-à-dire AB – Besoin supérieur de ruban = 200 – 180 = 20 m.

Toutes les allées longeant sur 20 m le bord du parc sont celles qui permettent d'utiliser 370 m de ruban.

b) L'indice des Emailleurs

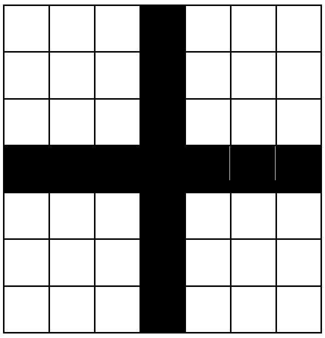
Méthode expérimentale: *Par représentation des tranches horizontales du PERFO-CUBE*

1ere tranche du bas



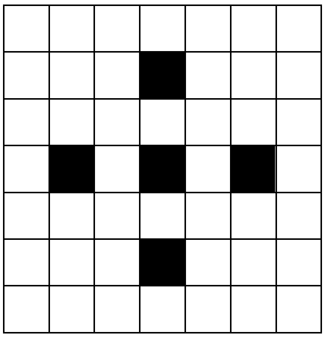
49 -5 = 44

2nde tranche



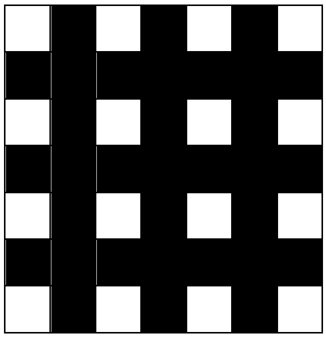
49 - 13 = 36

3ème tranche



49 -5 = 44

4ème tranche



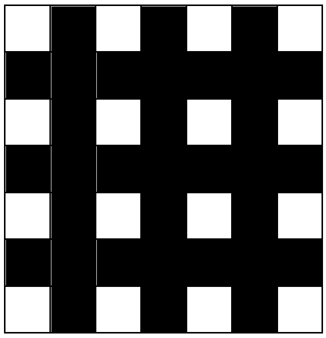
4 x4 = 16

2 fois pour les 5ème ,6eme et 7eme tranches

Donc (44+36+44) x 2 + 16 = **264 cubes forment le PERFO-CUBE**

Méthode arithmétique :

Considérons les 3 tranches médianes (2 verticales et 1 horizontale) du Perfo-cube. Leurs intersections ne sont composées que de vides (Noirs). Chaque tranche médiane est ainsi →



Donc ces 3 tranches contiennent 3x (4x4) = 48 cubes pleins.

Ces tranches partagent le Perfo-cube en 8 cubes identiques pleins de 3x3x3 = 27 cubes. En tout, ils forment 8x27 = 216 cubes pleins.

Notre PERFO-CUBE est composé de 48 + 216 = 264 cubes

3) Epreuve de la RUE du 19 mars 1962

Petit échauffement

1. *Montrez qu'avec exactement **6 fois** le nombre 1 on peut obtenir tous les entiers de 1 à 9.*

$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$	$1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$	$1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 3$
$1 + 1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 = 4$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 \times 1 = 5$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$
$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1) + 1 = 7$	$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) = 8$	$(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) = 9$

2. *Quels entiers peut-on obtenir avec exactement **7 fois** le nombre 1 ?*

En remplaçant le premier 1 par 1×1 dans les égalités précédentes on peut déjà obtenir tous les entiers de 1 9 avec exactement 7 fois 1. On a de plus : $(1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 10$

$(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) = 12$ On ne peut pas obtenir 11 ni les entiers strictement supérieurs à 12.

3. *Quel est le plus grand entier qu'on peut obtenir avec exactement **8 fois** le nombre 1*

Avec 8 fois le nombre 1 on peut obtenir $18 = (1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1)$.

Passons aux choses sérieuses: le Défi !

Pour n'utiliser que **19 UNS** , il faut remarquer que **19** = 6x3 + 1 ; c'est à dire **k= 6** et **reste 1**

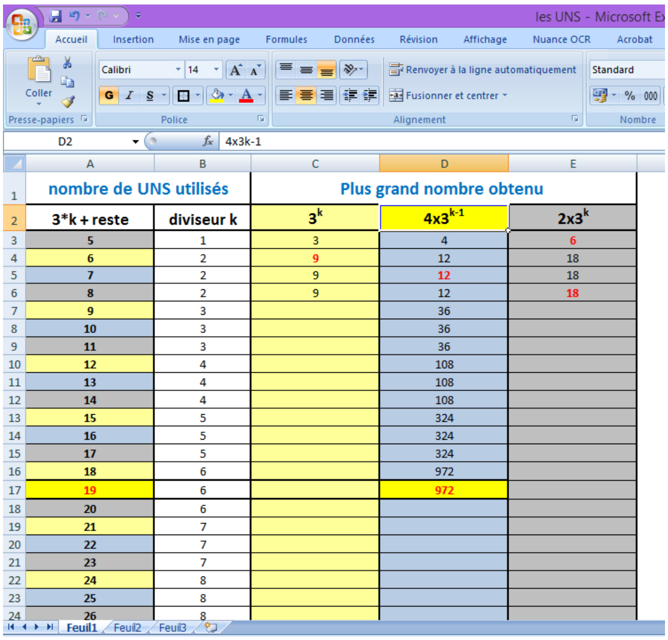
En utilisant ***le tableur* « les UNS »**, on pouvait remarquer que les nombres de UNS avec un **reste 1** étaient sur « fond Bleu »

- En regardant l'exemple traité de **reste 1** , c'est à dire 7 UNS (2x3+1) avec k =2 , on pouvait vérifier le nombre maximum atteint **12**. On retrouvait le code couleur du fond Bleu, et on peut vérifier la validité de la relation **$4x3^{k-1}$** avec k = 2 donc $4x3^{2-1}$= 4x3 = **12**

De la même manière, avec

- les exemples de **reste 2** ; 5 UNS et 8 UNS, on validait la relation **$2x3^{k}$** (sur fond gris)
- l'exemple de **reste 0**, 6 UNS on validait la relation **3^{k}** (sur fond jaune)

Pour 19 UNS, il suffisait donc d' «étendre la formule EXCEL » dans la colonne de la formule **$4x3^{k-1}$** jusqu'à obtenir la ligne du **19 UNS**



	nombre de UNS utilisés		Plus grand nombre obtenu		
	A	B	C	D	E
2	3*k + reste	diviseur k	3^k	$4x3^{k-1}$	$2x3^k$
3	5	1	3	4	6
4	6	2	9	12	18
5	7	2	9	12	18
6	8	2	9	12	18
7	9	3		36	
8	10	3		36	
9	11	3		36	
10	12	4		108	
11	13	4		108	
12	14	4		108	
13	15	5		324	
14	16	5		324	
15	17	5		324	
16	18	6		972	
17	19	6		972	
18	20	6			
19	21	7			
20	22	7			
21	23	7			
22	24	8			
23	25	8			
24	26	8			

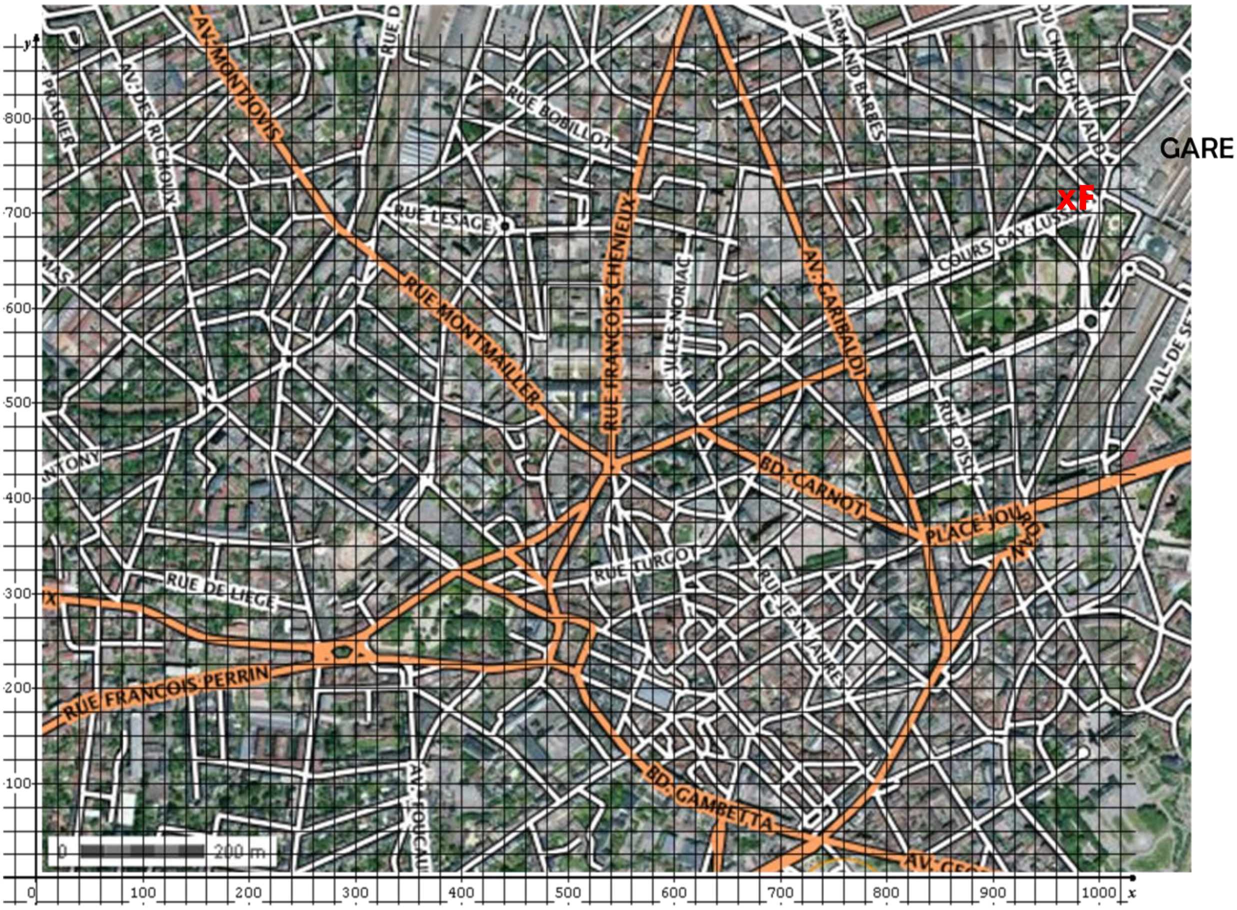
Le nombre maximum que l'on peut atteindre avec 19 UNS est 972

Ce que l'on obtient aussi par la relation avec **k= 6, $4x3^{k-1} = 4x3^{6-1} = 4x3^{5} = 4x243 = 972$**

4) LA FINALE : *exploitation des indices*

En Indice n°1, vous avez obtenu la longueur du plus court chemin du rectorat à l'arrivée : entre **441** et **445 m**
En indice n°2, vous avez trouvé le nombre de petits cubes : **264**.
En indice n°3, Le nombre maximum obtenu avec 19 UNS : **972**

Le point **F** de coordonnées (972 ; 445+ 264), **F**(972 ; 709) et en arrondissant à la dizaine près **F(970 ; 710)**



l'ARRIVEE FINALE trouve son emplacement au COURS GAY LUSSAC, qui est bien proche de la Gare