TOURNOI MATHEMATIQUE du LIMOUSIN en lycées Professionnels

Une histoire de RONDS !!!

Éléments de CORRECTION

1) Le rond-point

a) Tous les ronds-points sont-ils CIRCULAIRES ??

Méthode expérimentale: Avec le ***fichier Géogébra*** ou sur la photo du rond point, on peut par tâtonnement construire un cercle qui se superpose au contour du rond point :

Sur Géogébra : - tracer un cercle avec ajustement du rayon et du placement
- ou placer 3 points sur le contour du rond-point et faire le « cercle passant par 3 points »

Sur photo : - Tracer approximativement un diamètre du rond-point, placer son milieu, construire le cercle.

Méthode géométrique: Méthode mobilisant les propriétés des droites caractéristiques du triangle inscrit dans le rond-point

***Sur Géogébra ou sur photo* :**

placer 3 points sur le contour du rond-point ; tracer le triangle inscrit; tracer 2 des médiatrices des côtés du triangle (elle se coupent au centre du cercle circonscrit), tracer le cercle de centre le point d'intersection des médiatrices, passant par un sommet du triangle.

Conclusion: selon le support choisi, le rond point était **circulaire** sur la photo et **non circulaire** sur Géogébra

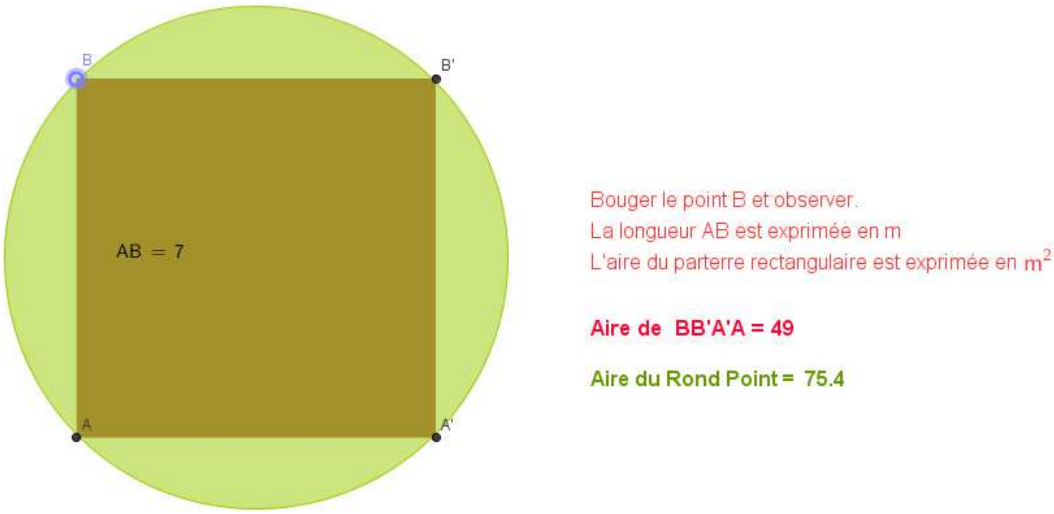
b) Pour un rond point facile d'entretien !!

Par consultation du document « département », on trouve que Chartres est le chef lieu de l'Eure et Loir, de numéro 28, donc le périmètre imposé du rectangle est de 28 m

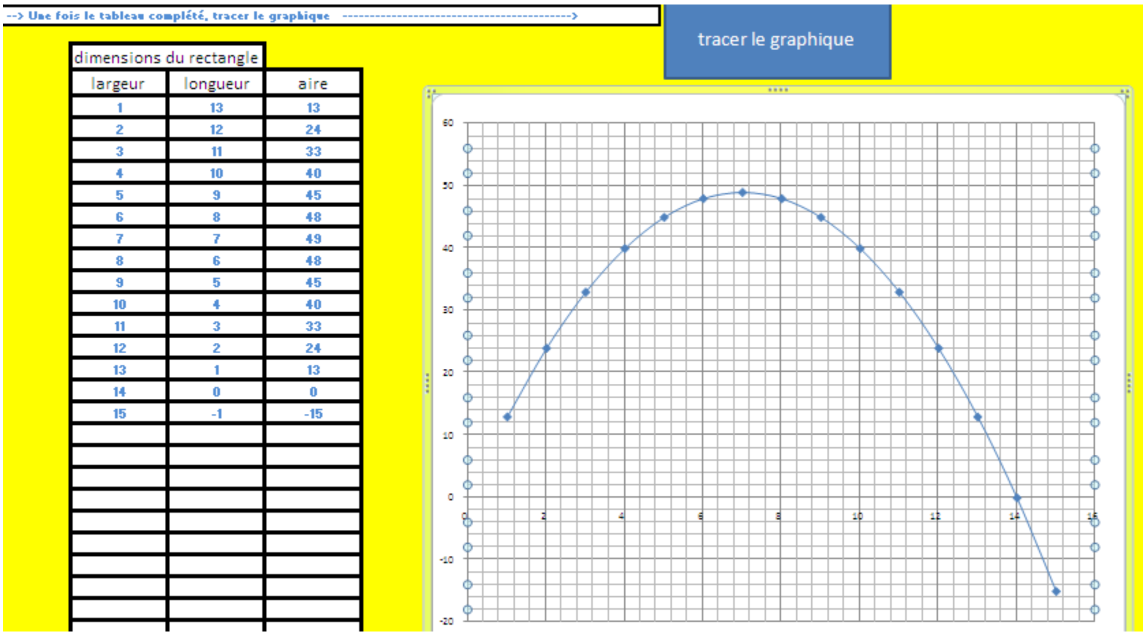
Pour avoir la tonte minimale, il faut que le parterre rectangulaire ait une aire maximale :

Méthode expérimentale: En utilisant ***le fichier Géogébra*** (gérant la contrainte du périmètre de 28 m) on obtient, sur la photo du rond point, une aire maximale de 49 m² pour un rectangle de largeur AB = 7 m . On peut en déduire que la longueur BB' mesure aussi 7m (car le périmètre vaut 2l + 2L = 28) .

Il s'agit d'un **carré de côté 7 m** avec une surface à tondre minimum de 75,4-49=26,4 m²



En utilisant ***le tableur*** (la gestion de la contrainte de périmètre 28 m revenait au candidat), le remplissage du tableau entrainait le tracé de l'aire en fonction de la largeur**. On peut lire le point (7 ; 49) correspondant à l'aire maximale**



largeur	longueur	aire
1	13	13
2	12	24
3	11	33
4	10	40
5	9	45
6	8	48
7	7	49
8	6	48
9	5	45
10	4	40
11	3	33
12	2	24
13	1	13
14	0	0
15	-1	-15

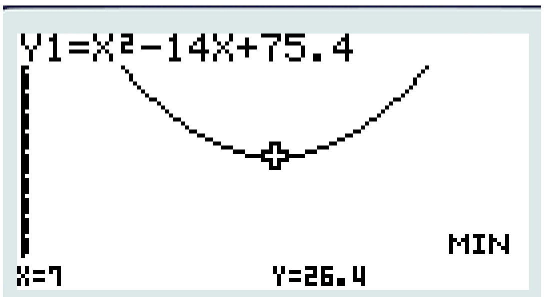
Les formules utilisées doivent être clairement écrites et la méthode de calcul de la longueur explicitée.
Il est important d'expliquer la méthode utilisée pour réaliser les conjectures.

Méthode algébrique:

Mise en équation du problème :
La largeur du rectangle du parterre est l = x. Comme le périmètre mesure 28 m, on a $2l + 2L = 28$, donc sa longueur est $L = 14 - x$
L'aire du parterre est S= x × (14 – x) = $14x - x^2$ donc l'aire de pelouse est égale à $75{,}4 - 14x + x^2 = x^2 - 14x + 75{,}4$.

La détermination de la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale peut se faire à l'aide d'une méthode correspondant au niveau de formation du candidat ou à l'aide d'une expérimentation (calculatrice, logiciel, choix de valeurs pour l *et* L et calcul de l'aire)

Etude de fonction ***à la calculatrice***

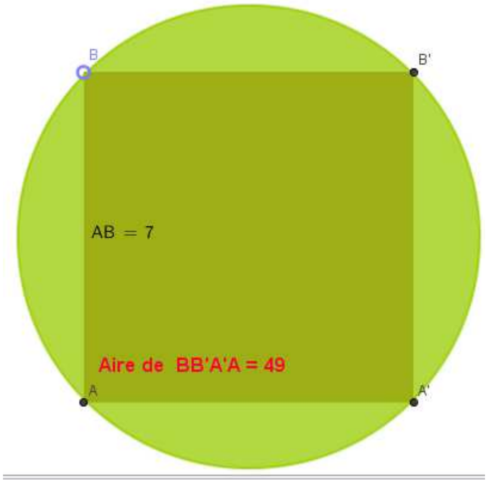


En première ou terminale, avec la connaissance des équations du second degré, on trouve que l'aire de tonte admet un minimum (puisque a= 1 est positif) qui se situe en $x = x_0 = -b/2a = 14/(2\times1) = 7$

Toute méthode utilisée doit être clairement expliquée.

Le résultat est $x = 7$ donc **l = 7 m = L** : c'est **un carré.**

c) Un parterre bien placé !



Méthode expérimentale

Avec le ***fichier Géogébra* « placement »**, on obtient le placement suivant qui conjecture que les sommets du parterre carré sont sur le cercle formé par le rond point

Méthode algébrique: qui permet de prouver la conjecture établie expérimentalement :
La diagonale du carré est égale au diamètre du cercle

Dans le triangle ABB' rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore

$AB'^2 = BA^2 + BB'^2$

$AB'^2 = 7^2 + 7^2 = 98$

$AB = \sqrt{98} = 9{,}899\ldots \approx 9{,}90$ m arrondi au cm. On retrouve le diamètre du cercle (9,80 m) à 10 cm près.

On peut conclure **qu'à 5 cm près, chaque sommet du parterre est sur le cercle du rond point**

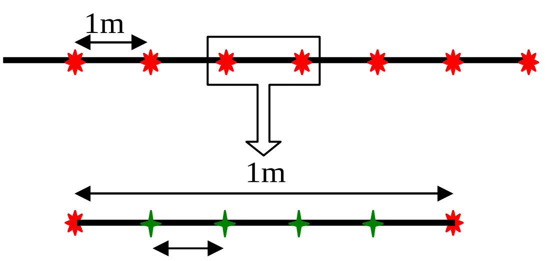
d) Un parterre bien fleuri !

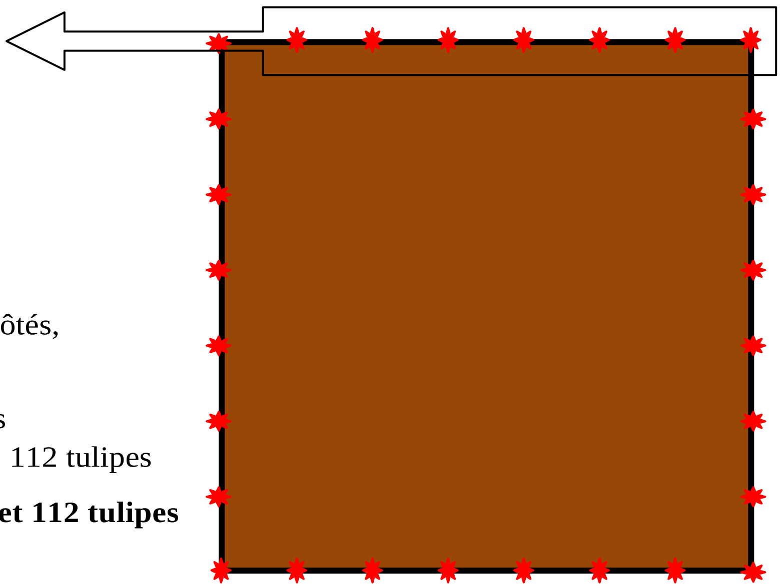
La difficulté ici pouvait résider dans la compréhension de la situation : SEUL le pourtour du parterre était garni de fleurs.
Ce pourtour mesure le périmètre, c'est-à-dire 28 m

Méthode expérimentale :

Il peut s'agir de réaliser un schéma de la situation soit sur un mètre du pourtour soit sur son ensemble :
Cela amènera à dénombrer ensuite les fleurs de chaque sorte ✸ rosier tige ✦ tulipe

Pour chaque côté :





Il y a 7 rosiers par côté, cela fait donc sur 4 côtés,
4×7 = 28 rosiers

Entre 2 rosiers espacés d'1 m, il y a 4 tulipes
Cela fait sur les 28 m du périmètre : 28 × 4 = 112 tulipes

Pour fleurir le pourtour, il faut 28 rosiers et 112 tulipes

Méthode arithmétique:

Comme le nombre de rosiers correspond au n° du département, il y aura **28 rosiers** (placés tous les mètres car p=28)

Le nombre total de fleurs sera de 140 soit (périmètre en m) /(largeur de l'espacement en m) = 28 / 0,20 = 140

Ainsi le nombre de tulipes correspond au nombre de fleurs moins le nombre de rosiers, soit 140 – 28 = **112 tulipes**

2) Comment gagner des « ronds »

Prix de vente potentiel (en €)	Nombre d'acheteurs	bénéfice pour 1 produit	**Bénéfice**
5	230	5-4 = 1	**1×230 = 230**
10	210	10- 4 = 6	**6×210 = 1260**
15	260	15 – 4 = 11	**11×260 =2860**
20	200	20 – 4 = 16	**16×200 =3200**
25	160	25 – 4 = 21	**21×160 =3360**
30	80	30- 4 = 26	**26×80 = 2080**

Méthode expérimentale:

Avec le ***fichier Tableur*** , on peut compléter le tableau par tâtonnement en calculant pour chaque valeur

ou en ***entrant les formules*** :

Bénéfice pour un produit = prix de vente –coût d'achat = prix de vente – 4

Bénéfice total : bénéfice pour un produit multiplié par le nombre d'acheteurs

Pour le prix de vente égal à x et le nombre d'acheteurs égal à y, on a **Bénéfice** = $(x-4)\times y$

D'après le tableau, le bénéfice est maximum pour **un prix de vente potentiel de 25€.**

3) Jouer avec des « ronds »

Avec 10 et 11 jetons, la méthode expérimentale était accessible par la manipulation des jetons (à découper sur l'énoncé)

En 4 étapes avec 10 jetons

A la première étape on retourne 3 jetons noirs : il y a ensuite 7 jetons noirs et 3 blancs sur la table.
A la deuxième étape on retourne 3 jetons noirs : il y a ensuite 4 jetons noirs et 6 blancs sur la table.
A la troisième étape on retourne 2 jetons noirs et un blanc: il y a ensuite 3 jetons noirs et 7 blancs sur la table.
A la quatrième étape on retourne 3 jetons noirs: il y a ensuite 10 jetons blancs sur la table.

En 5 étapes avec 11 jetons

Aux trois premières étapes on retourne 3 jetons noirs : il y a ensuite 2 jetons noirs et 9 blancs sur la table.
A la quatrième étape on retourne 1 jeton noir et 2 blancs: il y a ensuite 3 jetons noirs et 8 blancs sur la table. A la cinquième étape on retourne 3 jetons noirs: il y a ensuite 11 jetons blancs sur la table.
Une variante :
Aux deux premières étapes on retourne 3 jetons noirs : il y a ensuite 5 jetons noirs et 6 blancs sur la table.
A la troisième étape on retourne 2 jetons noirs et un blanc: il y a ensuite 4 jetons noirs et 7 blancs sur la table.
A la quatrième étape on retourne 2 jetons noirs et un blanc: il y a ensuite 3 jetons noirs et 8 blancs sur la table.
A la cinquième étape on retourne 3 jetons noirs: il y a ensuite 11 jetons blancs sur la table.

Montrons que le nombre minimum d'étapes est 5.

Il faut au moins 4 étapes puisque 3 étapes donnent au maximum 9 jetons blancs.
Examinons de combien peut varier le nombre de jetons noirs au cours d'une étape.
Si on retourne 3 jetons noirs, le nombre de jetons noirs diminue de 3.
Si on retourne 2 jetons noirs et 1 blanc, ces 3 jetons deviennent 2 blancs et 1 noir, donc le nombre de jetons noirs diminue de 1.
Si on retourne 1 jeton noir et 2 blancs, ces 3 jetons deviennent 1 blanc et 2 noirs, donc le nombre de jetons noirs augmente de 1.
Si on retourne 3 jetons blancs, le nombre de jetons noirs augmente de 3.
On observe que dans tous les cas, le nombre de jetons noirs varie d'un nombre impair au cours d'une étape. Pour passer de 11 jetons noirs à 0 jetons noirs, il faut donc un nombre impair d'étapes : 4 étapes ne suffisent pas et il en faut au moins 5.

Généralisation avec 2015 jetons

Puisque 2015 = 3 * 671 + 2, il faut au moins 672 étapes. Pour la même raison que pour 11 jetons, 2015 est impair donc il faut un nombre impair d'étapes pour arriver à 0 jetons noirs. Le minimum est donc 673 étapes. C'est possible : les 670 premières étapes consistent à retourner 3 jetons noirs, il y a ensuite 5 noirs et 2010 blancs sur la table ; on termine avec les trois mêmes dernières étapes que dans le cas de 11 jetons.