TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

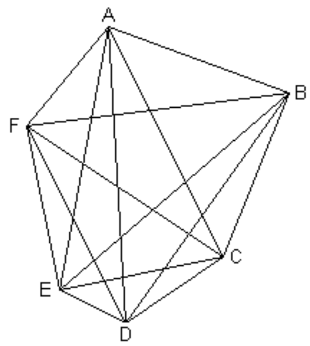
LIMOUSIN

1996

Les sujets LYCÉE

Bicolore

Je dispose de deux crayons, un rouge et un vert.
Je repasse en couleur les côtés et les diagonales de cet hexagone ; un côté ou une diagonale ne peut avoir qu'une couleur. J'obtiens ainsi un coloriage.



Expliquez pourquoi, à partir de A, il y a au moins trois segments de même couleur dans n'importe quel coloriage.
Trois sommets de l'hexagone déterminent un triangle.
Montrer qu' il existe toujours au moins un triangle unicolore dans n'importe quel coloriage.
Ce résultat est-il encore vrai si on remplace l'hexagone par un pentagone ?

Au fait, combien y a-t-il de coloriages différents de la figure initiale ?

Au carré

Observez, continuez ...

$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2$
$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11^2$
$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 19^2$
....
....

Ecrivez la dixième ligne.

Y a-t-il une ligne sur laquelle on trouve 1996^2 ?
Généralisez

Adam et Zoé

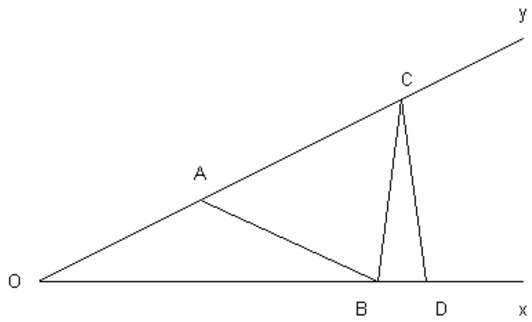
Adam et Zoé s'opposent dans un jeu simple. Devant eux un tas de jetons ; chacun retire tour à tour un nombre de jetons de son choix , à condition d'en prendre au moins un et d'en laisser au moins la moitié. Par exemple s'il reste 7 jetons, ou 6, on peut en retirer 1, 2 ou 3. Celui qui ramasse le dernier jeton a perdu.

Au départ il y a 5 jetons et Zoé joue la première.
Peut-elle gagner quelle que soit la défense d'Adam ?

On recommence une autre partie avec au départ 1996 jetons. Zoé joue encore la première.
Peut-elle gagner quelle que soit la défense d'Adam ? Comment et en combien de coups ?

Dans l’angle

Dans un angle $\widehat{xOy}$*, on veut insérer des triangles isocèles successifs AOB (base OB), BAC (base AC), CBD (base BD), ...*



Justifier que si l'angle $\widehat{xOy}$ *mesure 10° ou 20° on peut insérer exactement 8 triangles isocèles, alors qu'on peut en insérer exactement 5 s'il mesure 27° (on peut "revenir" vers le sommet O de l'angle).*

Pour quels angles ne peut-on insérer aucun triangle isocèle ?
Comment choisir l'angle pour insérer exactement

- *1 triangle isocèle ?*
- *2 triangles isocèles ?*
- *5 triangles isocèles ?*
- *10 triangles isocèles ?*
- *n triangles isocèles ?*

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

1997

Les sujets LYCÉE

Les caméléons

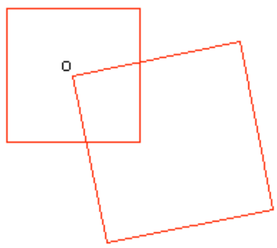
Dans un archipel étrange les caméléons sont gris, bruns ou rouges.

Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent ils prennent tous les deux la troisième couleur.

- *Sur une île il y a un caméléon gris, sept bruns et cinq rouges.*
  Montrer qu'il est possible qu'au bout d'un certain temps il n'y ait plus que des caméléons rouges.

- *Sur une autre île il y a treize caméléons gris, quinze bruns et dix-sept rouges.*
  En imaginant qu'il y ait deux rencontres gris-brun, trois rencontres brun-rouge et une rencontre gris-rouge, combien y aura-t-il de caméléons de chaque couleur sur l'île ?
  Y a-t-il une solution pour que tous les caméléons de cette île soient un jour tous de la même couleur ?

Carré tournant



Le carré de centre O et de côté a est fixe.
Le carré de côté b (b > a) a un sommet fixé en O et tourne autour de O.

Pour quelle position du grand carré le périmètre de leur partie commune est-il minimal ? maximal ?

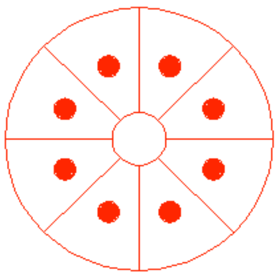
L'aire de la partie commune est constante. Pourquoi ?

Disque qui roule ...

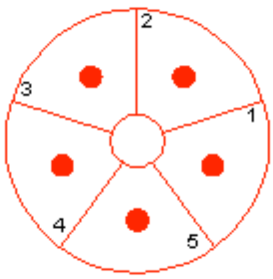
Les côtés d'un triangle mesurent respectivement 6 cm, 8 cm et 10 cm.
Un disque de rayon 1 cm roule à l'intérieur du triangle en restant toujours tangent à au moins un côté du triangle.
Lorsque le centre du disque revient à sa position de départ, après avoir fait un tour complet, quelle distance a-t-il parcourue ?

La ronde des pions

Sur une couronne on a disposé un pion par case :



A chaque coup on doit déplacer deux pions, chacun allant sur une case voisine de la case où il se trouve. On veut amener tous les pions sur la même case.
Est-ce possible avec une couronne de 5 cases ?



Est-ce possible avec une couronne de 6 cases ? de 7 cases ?
Trouvez toutes les couronnes de n cases pour lesquelles c'est possible et indiquer alors une stratégie gagnante.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

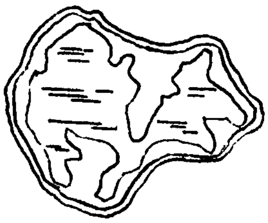
DU

LIMOUSIN

1998

Les sujets LYCÉE

Rando-math ➔ **seconde**



Martial et Valérie décident de faire à pied le tour du lac de Vassivière.

Martial tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, Valérie dans le sens contraire ; chacun marche à une vitesse constante.

Ils partent au lever du soleil d'un même endroit situé au bord du lac.

Ils se rencontrent à 9 heures, font alors une pause pour casser la croûte puis repartent tous les deux à 9 heures 30, chacun continuant dans le sens qu'il a choisi au départ et en reprenant sa vitesse initiale.

Martial est le plus rapide ; il retrouve le point de départ à 11 heures 30. Valérie n'y arrive qu'à 14 heures.

A quelle heure le soleil s'est-il levé ce jour-là ?

Esthétique mutiplicative ➔ **seconde, première, terminale.**

$$\begin{array}{c}
7\,7\,7\,7\,7\,7\,7\,7\,7\,7 \\
\times\, 7\,7\,7\,7\,7\,7\,7\,7\,7\,7 \\
\hline
4\,9 \\
4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9\,4\,9 \\
4\,9\,4\,9 \\
4\,9 \\
\hline
6\,0\,4\,9\,3\,8\,2\,7\,1\,4\,8\,3\,9\,5\,0\,6\,1\,7\,2\,9
\end{array}$$

Quelle curieuse manière de faire une multiplication ! Comment l'expliquez-vous ?

Cette méthode peut-elle s'appliquer à d'autres exemples ?

Des ronds dans l'eau ➔ **seconde, première, terminale.**

Sur les bords d'une piscine circulaire de 10 m de diamètre on a placé huit anneaux espacés régulièrement.

Un nageur part d'un anneau et doit ramasser tous les autres anneaux en nageant en ligne droite d'un anneau à l'autre.

Il décide de parcourir la plus grande distance possible.

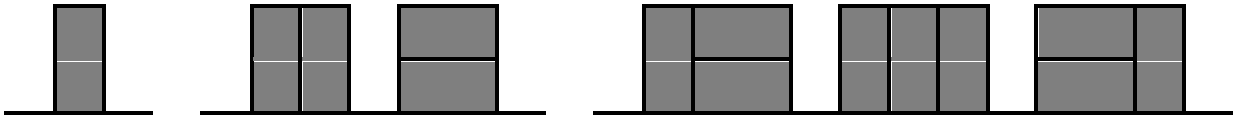
Dans quel ordre doit-il ramasser les huit anneaux,

- dans le cas où il s'arrête dès qu'il atteint le dernier anneau ?

- dans le cas où, après avoir ramassé le dernier anneau, il revient à son point de départ, toujours en nageant en ligne droite **?**

Briques et murettes ➔ **première, terminale.**

On construit des « murettes » à l'aide de briques toutes identiques, de même épaisseur, de longueur 20 cm et de largeur 10 cm.
Les « murettes » ont toutes pour hauteur 20 cm et pour épaisseur celle des briques.
En voici quelques exemples :



Combien y a-t-il de dispositions si on veut faire des « murettes » d'une brique ?
De deux briques ? de trois briques ? de quatre briques ? de cinq briques ?
Et si on utilise douze briques ?

Le pays des lacs ➔ **première, terminale.**

Au pays des lacs il y a sept lacs. Ils sont reliés par dix canaux de sorte que l'on peut se déplacer d'un lac à l'autre sur ces canaux. Les canaux ne se croisent pas et ne se ramifient pas. Une île, comme vous le savez, est entourée d'eau et dans ce pays il n'y a pas d'île au milieu des lacs.
Combien y a-t-il d'îles au pays des lacs ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

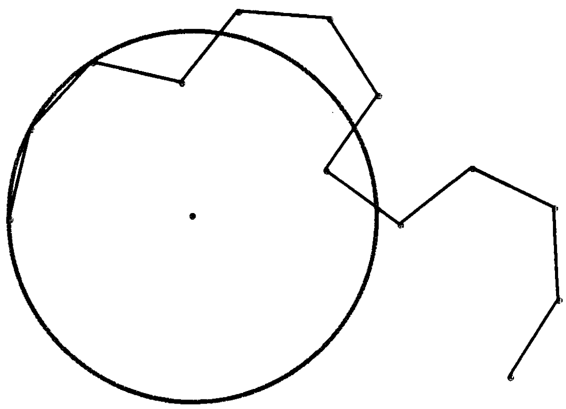
LIMOUSIN

1999

Les sujets LYCÉE

Quelle ligne ! ➔ **seconde.**

On veut inscrire à l'intérieur d'un cercle de rayon r une ligne brisée formée de 12 segments de longueur r/2, chaque extrémité de segment devant se trouver sur le cercle et deux segments ne pouvant pas se superposer.

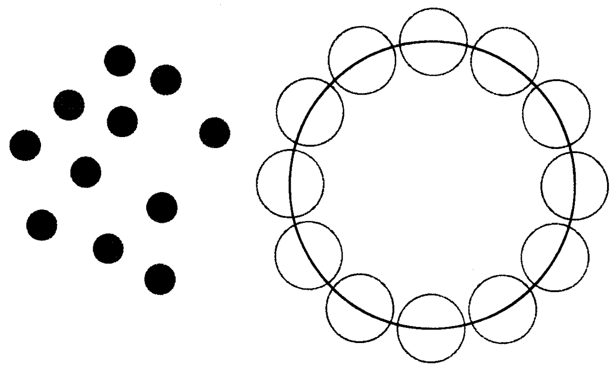


La ligne se referme-t-elle ?

Un jeu de solitaire ➔ **seconde, première, terminale.**

On dispose de 12 cases disposées en cercle et de 11 pions.
Le jeu consiste à placer les 11 pions, un par case.
Pour placer chaque pion on respecte la règle suivante :

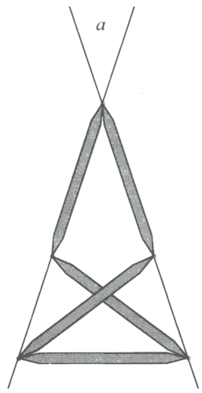
On choisit une case vide, on avance de 5 cases en tournant dans un sens ou dans l'autre et si la case est vide on pose le pion, sinon on choisit une autre case vide de départ.



On peut ainsi placer les 11 pions . Faites-le.

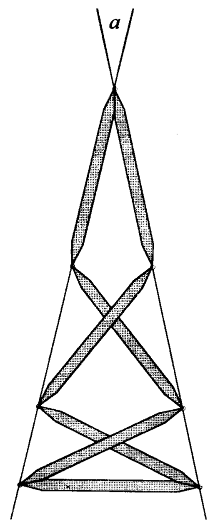
Est-il encore possible de placer les 11 pions si on avance de 4 cases au lieu de 5 ?
Et si on avance de p cases ?

Les allumettes ➔ **seconde, première, terminale.**



On a disposé 5 allumettes de longueurs égales de la manière suivante :
Que vaut l'angle a ?

Et pour 7 allumettes ?



A la queue leu leu ! ➔ **première, terminale.**

$$1999 = 999 + 1000$$

Quels sont les entiers naturels qui, comme 1999, peuvent s'écrire comme somme de deux entiers naturels consécutifs ?

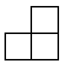
$$2000 = 398 + 399 + 400 + 401 + 402$$

Trouver tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 qui peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.

Plus généralement, quels sont les entiers naturels pouvant s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?

Triminos coudés ➔ **première, terminale.**

Un trimino coudé est formé de trois carrés de côté 1 :



On cherche à paver des rectangles dont les côtés sont des entiers supérieurs ou égaux à 2, à l'aide de triminos coudés, sans laisser de trou et sans chevauchement.

Que pouvez-vous dire de l'aire d'un rectangle pour lequel un tel pavage est possible ?

Etudiez si le pavage est possible dans le cas

- *d'un rectangle de côtés 4 et 4 ;*
- *d'un rectangle de côtés 5 et 3 ;*
- *d'un rectangle de côtés 6 et 5 ;*
- *d'un rectangle de côtés 9 et 5.*

Quels sont les rectangles pavables par de tels triminos ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

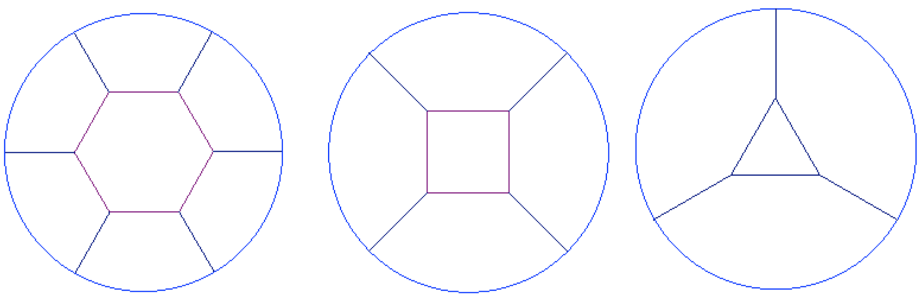
LIMOUSIN

2000

Les sujets LYCÉE

L'artiste et ses toiles

Une araignée a tissé sa toile plane dans l'anneau circulaire d'un panier de basket.
Tous les segments constituant la toile ont la même longueur.
le polygone central est régulier et les segments qui le relient au cercle sont sur des droites passant par le centre du cercle.
Pour rivaliser avec l'araignée, construisez à la règle et au compas les toiles suivantes (le cercle et son centre sont donnés) :



Des cartes, mais pas trop

Dix cartes numérotées de 1 à 10 sont posées sur la table, faces cachées.
On retourne plusieurs cartes, puis on regarde si on peut obtenir un carré en faisant le produit des nombres marqués sur deux de ces cartes.
Céline retourne quatre cartes. Elle n'obtient pas de carré. Donnez un exemple de cartes retournées.
Mickaël retourne trois cartes. Il obtient un carré. Donnez un exemple de cartes retournées.

Combien devez-vous retourner de cartes, au minimum, pour être sûr d'obtenir au moins un carré ?

Finissons bien le millénaire

On veut trouver deux fractions $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *de nombres entiers positifs tels que* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{1999}{2000}$.

- *Est-ce possible avec b = 2 et d = 1000 ?*
- *Est-ce possible avec d'autres dénominateurs dont le produit est 2000 ?*

Fête des sommes

En remplaçant les pointillés qui séparent ces nombres consécutifs, par des signes + et un seul signe =, vous pouvez obtenir une égalité de deux sommes :

4 … 5 … 6 … 7 … 8

De même avec :

9 … 10 … 11 … 12 … 13 … 14 … 15

Peut-on trouver des égalités analogues telles qu'il y ait à gauche du signe = , un entier de plus qu'à droite ?

Peut-on trouver des égalités analogues telles qu'il y ait à gauche du signe = , deux entiers (puis trois, puis quatre) de plus qu'à droite ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2001

Les sujets LYCÉE

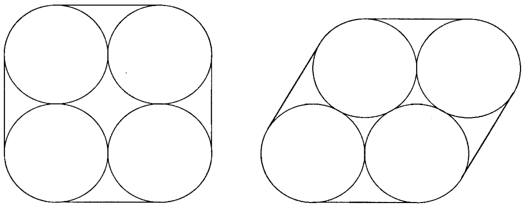
Grand Rallye Pédestre du Limousin

Claude et Dominique sont engagés dans le Grand Rallye Pédestre du Limousin. Claude, dossard bleu, en catégorie cadet et Dominique, dossard rouge, en catégorie junior. Pour chaque catégorie, la numérotation des dossards commence à 1 et on ne saute pas de numéro.
Dans l'ambiance électrique du départ, Claude observe ses adversaires et dit à Dominique :
« C'est curieux, j'ai fait la somme des numéros de dossards (bleus) qui sont plus petits que le mien et j'observe qu'elle est égale à la somme des numéros de dossards (bleus) qui sont plus grands que le mien ! ».
Dominique éclate de rire et lui dit : « Vous n'êtes même pas une douzaine dans ta catégorie, c'était facile à observer. Admire un peu, je suis dans la même situation que toi dans ma catégorie et pourtant nous sommes bien plus nombreux que vous, même si nous sommes loin d'atteindre la centaine ! ».
Alors combien y a-t-il de concurrents engagés au Grand Rallye Pédestre du Limousin en catégorie cadet et en catégorie junior ?

Gare à l'élastique !

On enserre quatre tubes cylindriques de même diamètre avec un élastique. On a le choix entre deux dispositions, en « carré » ou en « parallélogramme ».

Dans quelle disposition l'élastique aura-t-il la longueur la plus petite ?



Serrez les rangs !

On dispose à plat, sans chevauchement, des pièces de rayon 1 cm dans un carré de 22 cm de côté.

Vincent a disposé 121 pièces.

François observe la disposition de Vincent et prétend pouvoir en placer 126, toujours sans chevauchement.

Paul déclare pouvoir en mettre 2 de plus, lui aussi sans chevauchement.

Et vous autres, pouvez-vous expliquer comment réaliser ces différentes dispositions ?

Combien pouvez-vous disposer de pièces de rayon 1 cm dans un rectangle de 26 cm sur 28 cm ?
Et dans un rectangle de 80 cm sur 88 cm ?

Piles d'assiettes

2001 assiettes identiques sont réparties en 3 piles de hauteurs différentes.
Quel nombre minimum d'assiettes peut contenir la plus haute pile ?

2001 assiettes identiques sont réparties en 5 piles de hauteurs différentes.
Quel nombre minimum d'assiettes peut contenir la plus haute pile ?
Quel nombre minimum d'assiettes peut-on obtenir en réunissant les deux plus hautes piles ? (sans en casser !)
Donner une disposition réalisant ce minimum.

N assiettes identiques sont réparties en 5 piles de hauteurs différentes.
Quel nombre minimum d'assiettes peut-on obtenir en réunissant les deux plus hautes piles ?

N assiettes identiques sont réparties en n piles de hauteurs différentes.
Quel nombre minimum d'assiettes peut-on obtenir en réunissant les p plus hautes piles ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2002

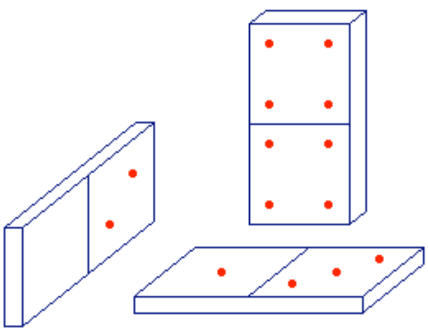
Les sujets LYCÉE

13… Très isocèles

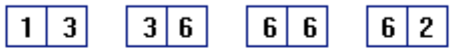
Dessinez un triangle isocèle de côtés 13, 13 et 10 cm.
Sauriez-vous construire un autre triangle isocèle, de même aire, non superposable au précédent et dont deux côtés ont pour longueur 13 cm ? Quelle est la longueur du troisième côté ? Y a-t-il d'autres solutions ?

Dominos dominés

Dans un jeu de dominos, il y a 28 dominos différents portant des nombres de 0 à 6.



Une chaîne peut être représentée ainsi :



Dans la suite, nous allons vous demander d'essayer de former des chaînes respectant certaines contraintes. Si c'est possible, vous le ferez, sinon, vous expliquerez pourquoi.

Trouvez tous les dominos que l'on peut former avec les nombres 0, 1 ou 2.
En utilisant tous ces dominos pouvez-vous former une chaîne commençant par 0 et finissant par 0 ?
En utilisant tous ces dominos pouvez-vous former une chaîne commençant par 0 et finissant par 2 ?

Trouvez tous les dominos que l'on peut former avec les nombres 0, 1, 2 ou 3.
En utilisant tous ces dominos pouvez-vous former une chaîne commençant par 0 et finissant par 0 ?
En utilisant tous ces dominos pouvez-vous former une chaîne commençant par 0 et finissant par 3 ?

Trouvez une méthode pour faire une chaîne utilisant les 28 dominos d'un jeu.

Généralisez avec tous les dominos portant les nombres de 0 à n …

Mémoires vives

Marcel aimerait prendre sa revanche dans le jeu qui l'a opposé à Rémi il y a quelque temps.

Dans chaque partie de ce jeu, le vainqueur gagne un certain nombre de points, ils ne savent plus combien, mais c'est toujours le même à chaque partie et son adversaire perd un certain nombre de points, ils ne savent plus non plus combien, mais c'est encore toujours le même à chaque partie.
Cependant ils n'ont pas tout oublié : ils se souviennent que les points gagnés ou perdus sont des nombres entiers, qu'il ne peut pas y avoir de partie nulle et qu'après plusieurs parties, Rémi avait battu Marcel par 10 points contre 3.

Aidez-les à retrouver le nombre de points qu'on peut gagner et le nombre de points qu'on peut perdre à chaque partie de ce jeu.

Bandes originales

On a deux bandes de papier, de largeurs différentes ; les largeurs sont des nombres entiers de centimètres.

On pose ces deux bandes sur une table en les croisant perpendiculairement et on constate que la partie commune a une aire en cm^2 égale à son périmètre en cm.

Peut-on trouver les largeurs de ces deux bandes si on sait que ce sont des nombres entiers inférieurs à 10 ?

Comparez l'aire et le périmètre de la partie commune quand on croise les deux bandes d'une autre façon (non perpendiculairement).

Y a-t-il d'autres bandes dont les largeurs sont encore des nombres entiers, mais qui peuvent dépasser 10 et qui auraient la même propriété que les deux bandes précédentes ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2003

Les sujets LYCÉE

X face à 10 ➔ **seconde, première et terminale**

Des personnes numérotées de 1 à n sont placées dans cet ordre autour d'une table ronde et sont régulièrement espacées.
La personne portant le numéro x est en face de la personne portant le numéro 10.

Si x = 2, quel est le nombre de personnes ?
Si x = 25, quel est le nombre de personnes ?
Peut-on remplacer x par n'importe quel autre nombre ?

Plus ou moins carré ➔ **seconde, premières et terminale**

On observe que :

$$2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 \qquad\qquad 4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$$

Ecrivez une égalité analogue pour les entiers n = 5, n = 6, n = 11 (on part de 1^2 puis on ajoute ou on retranche les carrés d'entiers consécutifs de façon à obtenir n).
Ecrivez ainsi 2003 avec le minimum de carrés.
Montrez que si l'on peut ainsi écrire n avec k carrés, on peut écrire n + 4 avec k + 4 carrés.
Prouvez alors que tout entier n (n > 7) peut s'écrire avec au maximum n carrés.

Il faut savoir partager ➔ **seconde, premières et terminale**

On veut partager un polygone régulier à n côtés en quadrilatères convexes.

Dans un premier temps, on utilise des quadrilatères superposables par glissement (sans retournement).
Proposez un partage, pour un triangle équilatéral, un pentagone régulier, un hexagone régulier.

Généralisez à un polygone régulier de n côtés en précisant le nombre de quadrilatères superposables utilisés.

Dans un deuxième temps, on utilise des quadrilatères non nécessairement superposables et on cherche à en employer le moins possible.
Proposez alors un tel partage pour un triangle équilatéral, un pentagone régulier, un hexagone régulier.
Quel est le nombre minimum de quadrilatères permettant de partager un polygone régulier à n côtés ?

Cachez ce carré que je ne saurais voir ➔ **première et terminale**

On dispose de plaques, en forme de triangle équilatéral de côté 10 cm, avec lesquelles on cherche à cacher un carré le plus grand possible (les plaques ne doivent pas se chevaucher).

Calculez le côté du plus grand carré que vous pouvez cacher avec 1 plaque, 2 plaques, 3 plaques …

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2004

Les sujets LYCÉE

Le dessous des cartes ➔ **seconde, première et terminale**

Sept cartes sont numérotées 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Marius, Sébastien et Agnès tirent chacun une carte et sans la regarder, la montrent aux deux autres.
Un observateur leur dit : « Tiens ! Le produit des trois nombres est le carré d'un nombre entier ».
Citez toutes les situations où Sébastien, voyant les cartes d'Agnès et de Marius, peut trouver le nombre inscrit sur la sienne.
Donnez une situation où tous les trois peuvent trouver la valeur de leur carte (sans la regarder). Expliquez pourquoi.

Tout juste … la moyenne ➔ **seconde, première et terminale**

Jean a écrit le nombre 421 puis il a formé tous les nombres possibles en permutant les trois chiffres, enfin il a fait la moyenne des 6 nombres ainsi obtenus.
Quelle est cette moyenne ?
Alice qui a fait de même avec un autre nombre de trois chiffres distincts non nuls a trouvé une moyenne égale au nombre dont elle est partie.
Quel est le nombre de départ d'Alice ? (Donnez toutes les possibilités)

Passe partout ➔ **seconde, première et terminale**

On joint les points d'un quadrillage par des segments horizontaux et verticaux de façon à former un polygone non croisé passant une seule fois par chacun des points du quadrillage.
Par exemple, pour un quadrillage de 3×4 points, il n'y a que 2 possibilités :

a) Dessinez tous les polygones construits avec la même règle sur des quadrillages de 3×6 points et 3×5 points ; pour chacun d'eux, calculez l'aire et le périmètre.
b) Combien peut-on dessiner de polygones sur un quadrillage de 3×n points (avec la même règle). On distinguera les cas n pair et n impair.
c) Même question qu'au a) pour des quadrillages de 4×4 points, de 4×5 points.
d) Calculez le périmètre et l'aire d'un polygone construit avec la même règle sur un quadrillage de a×b points. A quelles conditions sur les parités de a et b un tel polygone existe-t-il ?

Le bon tuyau ➔ **première et terminale**

Dans un tuyau cylindrique de diamètre 12 cm, on glisse deux câbles cylindriques identiques de diamètre maximum ; faites un dessin ; quel est ce diamètre ?

On introduit ensuite dans le tuyau deux autres câbles identiques, toujours de diamètre maximum ; complétez le dessin ; quel est ce nouveau diamètre ?
On ajoute enfin quatre nouveaux câbles identiques, toujours de diamètre maximum, quel est ce dernier diamètre ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2005

Les sujets LYCÉE

Entiers symétriques

On dira qu'un nombre entier est symétrique s'il est égal à la somme des termes d'une suite finie d'entiers strictement positifs vérifiant les 3 conditions :

- *le premier terme de la suite est 1,*
- *la suite est symétrique, c'est-à-dire que deux termes équidistants des extrêmes sont égaux,*
- *deux termes consécutifs diffèrent de 1.*

Par exemple 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 est une suite vérifiant ces trois conditions.
La somme de ses termes vaut 14 ; 14 est donc un entier symétrique.

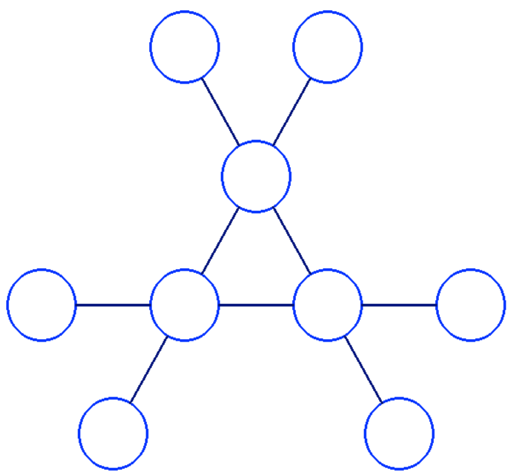
Quels sont les nombres symétriques inférieurs ou égaux à 10 ?
Montrez que si n est symétrique, n + 6 l'est aussi.
2005 est-il symétrique ?
Quels sont les entiers qui ne sont pas symétriques ?

Lignes magiques

Proposez un placement des nombres entiers de 1 à 9 dans les disques de sorte que la somme des nombres situés sur une même ligne soit la même pour les trois lignes.

Donnez une disposition pour la plus petite valeur possible de la somme et expliquez pourquoi c'est la plus petite possible.

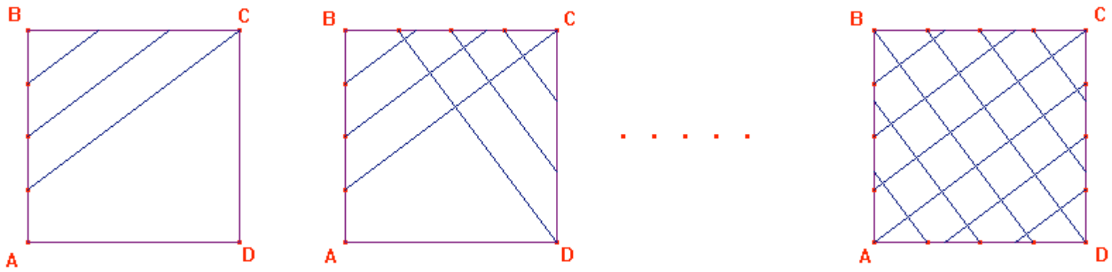
Faites de même pour la plus grande valeur possible de cette somme.



Quadrillages

On quadrille un carré ABCD, de côté 1, par la méthode suivante :

- *on partage le côté [AB] en quatre segments égaux,*
- *on trace trois droites parallèles comme sur le dessin 1,*
- *on recommence sur le côté [BC] pour obtenir le dessin 2, puis sur les côtés [CD] et [DA] pour obtenir le dessin final.*



dessin 1 dessin 2 dessin final

Sur ce quadrillage, combien y a-t-il de petits carrés entièrement tracés à l'intérieur du carré ABCD ?

Avec les autres morceaux, montrez comment on peut refaire des petits carrés.

Combien y en a-t-il ?

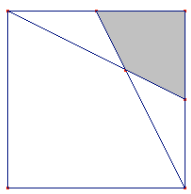
Quelle est l'aire d'un petit carré ?

Reprenez la méthode de construction du quadrillage en partageant chaque côté du carré, non plus en quatre segments égaux, mais en n segments égaux et répondez aux mêmes questions.

Jean Centaire

Les enfants de la famille Centaire doivent se partager équitablement, c'est-à-dire de façon que les parts aient toutes la même aire, un terrain carré de 100 m de côté.

Jean a dessiné sa parcelle (grisée sur le dessin) en prenant des milieux de côtés.



Combien y a-t-il d'enfants dans la famille Centaire ?

Quel est le périmètre de la parcelle de Jean ?

Terminez le partage de façon qu'il soit équitable.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

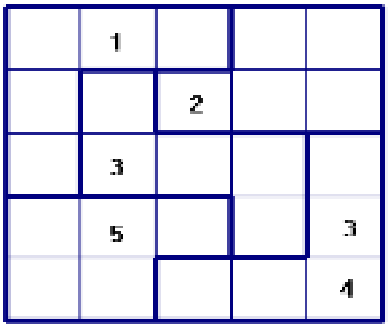
LIMOUSIN

2006

Les sujets LYCÉE

Cinq par cinq

Voici une grille 5 × 5 contenant cinq régions, délimitées par les traits épais :



On veut compléter cette grille avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 en respectant la règle suivante : chaque ligne, chaque colonne et chaque région contiennent les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 une fois et une seule.

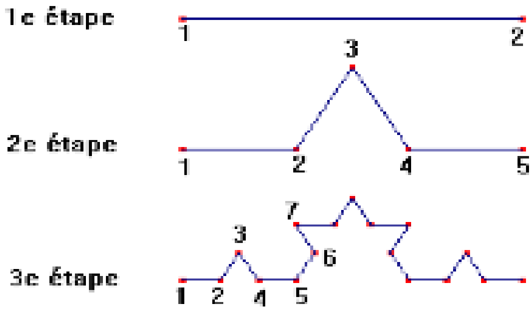
Commencez à compléter la grille, case après case, à chaque fois qu'un seul nombre convient en expliquant votre démarche pour les trois premières cases remplies.

Achevez de remplir la grille. Combien y a-t-il de grilles solutions ?

Un chemin épineux : fractal

Observez :

Pour passer d'une étape à la suivante on remplace chaque segment par quatre segments de longueur trois fois plus petite et on numérote les extrémités des segments comme indiqué ci-contre.



Y-a-t-il une étape où l'on peut obtenir 2006 au sommet central ?

A quelle étape 2006 apparaît-il pour la première fois ? Quel est alors le nombre situé au sommet central ? Dans ce cas, en supposant que le segment initial soit de longueur 10cm, quelle est la longueur du chemin allant de 1 à 2006 ?

Des carrés en sommes

Observer les égalités suivantes :

$1^2 = 1$
$3^2 = 2+3+4$
$5^2 = 3+4+5+6+7$
…

Décomposer de cette manière 19^2.
Pouvez-vous généraliser ?

Quel est le plus petit entier impair dont la décomposition du carré fait intervenir 2006 ?

Quand n est pair, n^2 *peut-il s'écrire comme somme de n entiers consécutifs ?*

L'orée du bois

Les arbres d'une forêt sont plantés sur tous les nœuds d'un quadrillage à maille carrée de un mètre de côté. Pour en devenir propriétaire, il suffit à Monsieur Lebois de les entourer avec sa corde de 50 mètres, de façon à créer un enclos fermé. Tout arbre à l'intérieur de l'enclos devient sa propriété. Monsieur Lebois n'est pas obligé d'utiliser la totalité des 50 mètres de corde, mais il ne peut en aucun cas dépasser cette longueur. Monsieur Lebois pense pouvoir devenir propriétaire de

180 arbres environ ; sa voisine, Madame Laforêt, affirme qu'il peut même dépasser 200 arbres, voire 210 arbres.

Et vous, combien d'arbres pouvez-vous entourer au maximum ? (Les arbres sont jeunes et ont un tronc très fin : on ne tiendra donc pas compte de leur épaisseur ; dans le plan du terrain, on peut les représenter par un point).

Expliquez votre méthode de recherche. Un schéma devra présenter votre solution et vous donnerez la longueur en valeurs exacte et approchée au centimètre près de la corde utilisée, ainsi que le nombre d'arbres entourés.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2007

Les sujets LYCÉE

Placez bien vos billes

6	1		
		4	

Quarante-huit billes doivent être rangées dans ce casier de 16 cases. Il doit y avoir douze billes par ligne et par colonne. De plus, aucune case ne doit être vide et sur chaque ligne, chaque colonne et même sur chacune des deux diagonales, les cases contiennent des nombres de billes tous différents. Onze des quarante-huit billes ont déjà été placées comme indiqué sur le dessin.

Proposez un rangement des billes en justifiant l'unicité de la solution.

Je vous ai apporté des bonbons

Germaine possède dix bonbons. Elle veut les répartir en sachets de sorte que le ou les sachets qui en contiennent le plus aient un bonbon de plus que le ou les sachets qui en contiennent le moins. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

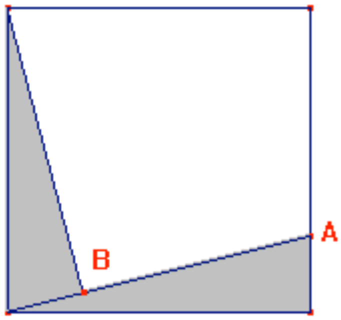
Jacques a aussi dix bonbons. Il doit : soit les mettre tous dans un même sachet, soit les répartir dans plusieurs sachets qui devront avoir le même nombre de bonbons. Combien a-t-il de possibilités d'opérer ?

Combien Germaine et Jacques ont-ils de possibilités à eux deux ? Et pour n bonbons ? Quels sont les entiers n pour lesquels Germaine et Jacques ont le même nombre de répartitions possibles ?

Huit triangles pour un carré

Proposez un découpage d'un carré en 8 triangles superposables.

Nicolas propose de trouver un autre découpage du carré en 8 triangles de même aire. Il a commencé ainsi :



Où a-t-il placé les points A et B pour que les deux triangles grisés fassent partie d'une solution ?
Complétez ce découpage, en justifiant chaque étape.

Proposez un autre découpage du carré en 8 triangles de même aire, non superposables.

Avoir la tête …aux carrés

On peut disposer à volonté de carrés de côtés 2, 3 ou 5.

Montrer qu'on peut utiliser ces carrés pour paver complètement et sans chevauchement un carré de côté 11 puis un carré de côté 13.

Quels sont les carrés que l'on peut ainsi paver ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

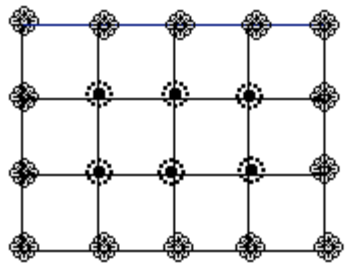
LIMOUSIN

2008

Les sujets LYCÉE

Mon beau tapis

Pour réaliser un tapis rectangulaire, on utilise des carrés de tissu, des boutons et des fleurs en feutrine.
On coud un bouton à chaque intersection intérieure, et une fleur en feutrine à chaque intersection de la bordure comme dans l'exemple ci-dessous :



12 carrés de tissu
6 boutons
14 fleurs

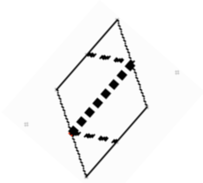
Pour fabriquer un tapis on utilise 24 carrés de tissu et 15 boutons. Combien de fleurs de feutrine faut-il pour le réaliser ? Dessinez ce tapis.

On utilise 2008 carrés de tissu et autant de boutons que l'on veut : réaliser un tapis en utilisant le plus petit nombre possible de fleurs de feutrine.

Peut-on réaliser des tapis avec autant de fleurs que de boutons ? Si oui lesquels ?

Calissons Z

Arthur veut carreler sa salle de bain. Les carreaux blancs qu'il utilise ont la forme de calissons d'Aix en Provence (losanges formés de deux triangles équilatéraux juxtaposés) sur chacun desquels est dessiné, à partir des milieux des côtés , un Z en pointillés:



Sur la feuille jointe, on a dessiné une grille dont les points sont les sommets de triangles équilatéraux et on a commencé un carrelage qui fait apparaître un trapèze dont les côtés sont en pointillés.

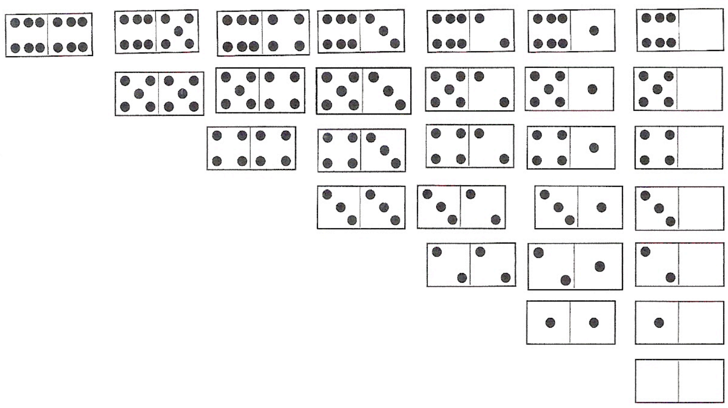
Quels sont les autres débuts de carrelage que l'on peut proposer et qui font apparaître d'autres polygones dont les côtés sont en pointillés et qui n'ont pas de pointillés à l'intérieur.

Parmi ces polygones quel est celui qui a la plus grande aire ?
Parmi ces polygones quel est celui qui a le plus petit périmètre ?

Arthur peut-il carreler sa vaste salle de bain en ne faisant apparaître qu'une sorte de polygones en pointillés ?

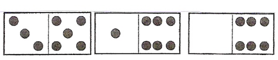
Enchaînons les dominos

Voici les 28 dominos d'un jeu de dominos :



On pose un premier domino, puis on fait une chaîne de dominos, en allant de gauche à droite, de manière à obtenir une suite de nombres entiers compris entre 0 et 6 ; chaque nombre de la chaîne est la somme, si elle est inférieure à 7, des deux nombres qui le précèdent ; si la somme est supérieure ou égale à 7, on la diminue de 7 ; on dit que c'est une somme modulo 7. On arrête quand le domino qu'il faudrait poser est déjà utilisé.

Exemples de débuts de chaînes :



etc…. qu'on notera : (3,5) (1,6) (0,6) etc…

etc…..qu'on notera : (5,3) (1,4) (5,2) etc…

Formez la chaîne commençant par le domino noté (4,2).

Une chaîne contient le domino noté (1,3) et ce domino n'est pas le premier, quel est le précédent ?

Formez une chaîne, la plus longue possible, contenant le domino formé des chiffres 3 et 5.

Quelle est la longueur maximale d'une chaîne ?

Affranchissement

Une entreprise doit expédier des objets identiques ; pour faciliter l'affranchissement, elle les répartit en paquets avec la règle suivante :
Tous les paquets contiennent exactement le même nombre d'objets, sauf peut-être un, qui en contient moins que les autres. Evidemment, aucun paquet n'est vide.

Ainsi, si l'on veut répartir 20 objets en 3 paquets, on peut obtenir les répartitions suivantes :
7 – 7 – 6 ou 8 – 8 – 4 ou 9 – 9 – 2 (trois répartitions possibles).

L'entreprise doit expédier 100 objets.

Quelles sont les répartitions possibles si on répartit ces objets en 5 paquets ? en 3 paquets ?

Peut-on répartir les 100 objets en 16 paquets ? en 17 paquets ?

Quelle est la plus petite valeur de p pour laquelle il n'est pas possible de répartir les 100 objets en p paquets ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2009

Les sujets LYCÉE

Nombres croisés

Remplir la grille, à l'aide des nombres entiers de 1 à 16, en respectant les informations suivantes :

(R1) deux nombres consécutifs ne peuvent pas être placés dans deux cases voisines (par un côté ou par un sommet).

(R2) Il y a au moins deux nombres pairs par ligne et par colonne.

	A	B	C	D
I	15			
II				
III			1	
IV				

Colonne A : nombres ordonnés du plus grand au plus petit
Colonne C : carrés de nombres entiers
Ligne I : nombres multiples de trois
Ligne III : le dernier nombre est la somme des trois premiers
Ligne IV : la différence entre le plus grand et le plus petit vaut 14.

ARA mon perroquet

Mon perroquet ARA n'utilise que les lettres A et R. Il peut remplacer un mot par un autre en respectant la règle suivante : un A peut être remplacé par RAR ou bien RAR peut être remplacé par A.
Par exemple, à partir de AA il peut construire RARA , ARAR , RARRAR , …

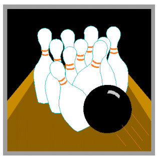
Montrez qu'il peut former RRAAA à partir de RAARA.
Pourquoi RARAR ne peut-il pas être formé à partir de RAARA ?
Est-ce que ARARA peut être formé à partir de RAARA ?

Une case en trop

Soit n un entier non multiple de 3. Avec des rectangles 1 x 3 on peut paver une grille n x n à l'exception d'un petit carré de côté 1. Dessinez un tel pavage pour n=4, n=5, n=7 et n=8.
Pour chacune de ces valeurs de n, déterminez les différentes possibilités pour la position du petit carré non pavé (indication pour une démonstration : on pourra numéroter les cases 0, 1, 2, 0, 1, 2, ….de manière judicieuse !)

Objectif dix sur dix

En lançant une boule de bowling il faut essayer de renverser les dix quilles disposées à la fin de la piste.



- Chaque partie se compose de dix FRAMES.
- Deux lancers au maximum sont autorisés par FRAME.

Le joueur qui renverse les 10 quilles au premier lancer d'une FRAME réalise un STRIKE et la FRAME est finie ; il reçoit un nombre de points égal à 10 plus le nombre de quilles qu'il renverse lors des deux lancers suivants (s'il réalise un STRIKE à la dixième FRAME il a droit à deux lancers supplémentaires).

Le joueur qui renverse les 10 quilles en deux lancers réalise un SPARE (même dans le cas où il en renverse zéro au premier lancer et dix au second) ; il reçoit un nombre de points égal à 10 plus le nombre de quilles qu'il renverse au lancer suivant (s'il réalise un SPARE au dixième lancer il a droit à un lancer supplémentaire).

1/ Une feuille de score a été partiellement effacée. Reproduisez-la en la complétant.

n°de la FRAME	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		
Score	3	5	2	8	4	0	10		10		10		7	3	0	?	?	1	8	2	6
Points acquis	8		14		?																
Total	8		22		?		56		83		?		113		118		126		?		

2/ Quel score maximal peut-on réaliser dans une partie de bowling ?

3/ A la fin d'une partie dont le score fut de 152 un joueur remarque qu'il a fait exactement 19 lancers dont l'efficacité est donnée dans le tableau ci-dessous :

Nombre de quilles tombées	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de lancers	3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	3

Quel est le score minimal et le score maximal qu'il aurait pu faire avec ces 19 lancers ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2010

Les sujets LYCÉE

Survol du Limousin

Voici une carte du Limousin :

On donne les distances à vol d'oiseau (en km) suivantes :

Villes	Limoges	Bellac	Rochechouart	Brive	Tulle	Ussel	Guéret	Aubusson
Limoges	0	34	33	77	74	88	61	73
Bellac	34	0	36	111	109	116	64	88
Rochechouart	33	36	0	92	96	120	90	106
Brive	77	111	92	0	21	74	114	100
Tulle	74	109	96	21	0	52	100	82
Ussel	88	116	120	74	52	0	76	45
Guéret	61	64	90	114	100	76	0	33
Aubusson	73	88	106	100	82	45	33	0

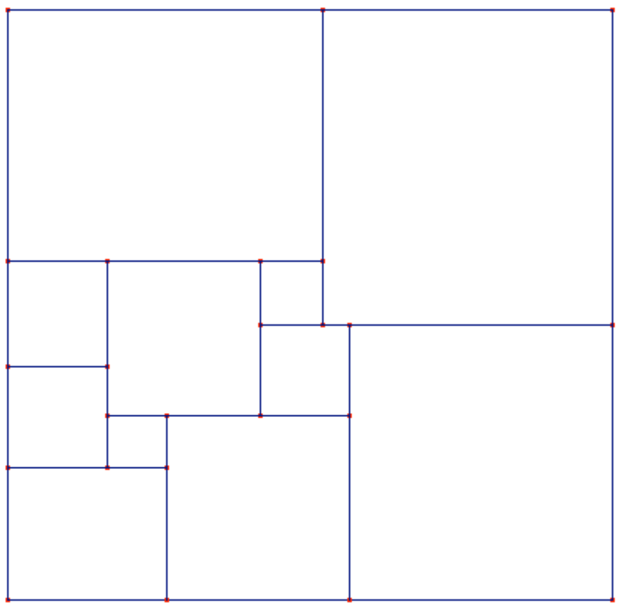
a) *Un hélicoptère partant de Limoges est chargé de desservir les villes de Guéret, Aubusson, Brive, Tulle, Ussel, Bellac et Rochechouart en passant une seule fois par chacune d'entre elle avant de retourner à Limoges. Combien y a-t-il de trajets différents possibles ? Expliquez.*

b) *Quel est le trajet le plus long ? Quel est le plus court ? Vous calculerez les distances correspondant à chaque trajet proposé.*

c) *L'hélicoptère a une autonomie de 200 km; il doit donc être rentré à Limoges avant d'avoir parcouru 200 km pour faire le plein de carburant avant de repartir. Quel devra être son parcours afin que la distance parcourue soit minimale ?*

Des carrés pour un carré

Un carré a été partagé en 11 carrés selon le schéma approximatif ci-dessous (les dimensions ne sont pas respectées). Quel est le côté du carré qui a été partagé ? (on prendra comme unité le côté du plus petit carré)
Expliquez votre démarche.



2010

Déterminez le nombre d'entiers compris entre 1 et 30 qui sont divisibles par 2, par 3 ou par 5.
Calculez la somme de tous ces entiers puis leur moyenne.

Mêmes questions avec 2010.
Comment généraliser ?

Des carrés pour un rectangle

Un rectangle de périmètre 2010 m est partagé en 594 carrés de périmètre 20 m chacun. Quelles sont les dimensions du rectangle?

De quelles autres façons peut-on partager ce rectangle en des carrés tous identiques?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2011

Les sujets LYCÉE

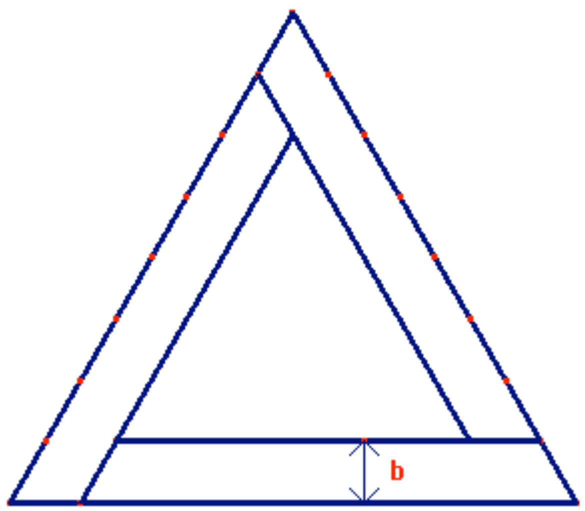
Une histoire de moyennes

Soit un ensemble de n nombres dont la moyenne est égale à M. Si on le complète avec le nombre 1 la moyenne des n+1 nombres obtenus est égale à M - 67 alors que si on le complète avec le nombre 2011 la moyenne des n+1 nombres obtenus est égale à M + 67.

Que valent n et M ?

Triangle de signalisation

Sur un triangle équilatéral de côté a, on a tracé trois segments parallèles aux côtés à la même distance b de ces côtés. On a ainsi déterminé quatre régions de même aire : trois trapèzes superposables et un triangle. Calculez son côté c en fonction de a puis le rapport a/b.



Où se cache 2011 ?

On place les nombres entiers dans un tableau triangulaire de la façon suivante :

			1			
		2	*3*	*4*		
	5	*6*	*7*	*8*	*9*	
10	*11*	*12*	…………………….			
…………………………………………………						

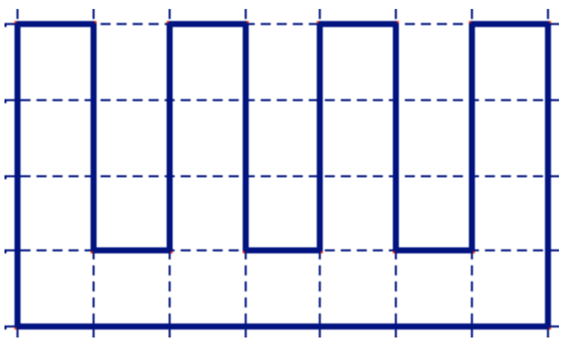
Sur ce tableau, le nombre 8 est sur la ligne commençant par 5 et sur la colonne commençant par 4.

Quel est le nombre sur la ligne commençant par 101 et sur la colonne commençant par 49 ?

Repérez le nombre 2011 en donnant le premier nombre de sa ligne et le premier nombre de sa colonne.

Passez au peigne fin !

On joint les points d'un quadrillage n x p par des segments horizontaux ou verticaux pour dessiner un peigne sans manche comme indiqué dans l'exemple ci-dessous où n=7 et p=4 (les dents, les espaces entre les dents et la base du peigne ont une largeur égale à 1).



Est-ce toujours possible ?

Calculez l'aire du peigne et son périmètre en fonction de n et p.

Trouvez toutes les valeurs possibles pour les entiers n et p de façon que l'aire soit égale à 2011 (on pourra utiliser le fait que l'entier 503 n'a que deux diviseurs positifs, 1 et 503).

Calculez le périmètre dans chacun des cas obtenus.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

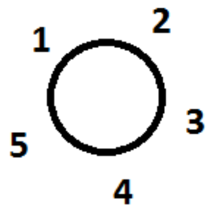
LIMOUSIN

2012

Les sujets LYCÉE

Une disposition en cercle

On a placé autour d'un cercle les entiers de 1 à 5 :



1) Vérifier que chaque nombre est un diviseur de la somme de ses deux voisins.

2) Trouver une autre disposition des entiers de 1 à 5 autour d'un cercle respectant cette propriété.

3) Trouver les dispositions avec les entiers de 1 à 7 autour d'un cercle vérifiant la même propriété.

4) Trouver des dispositions avec les entiers de 1 à 2n+1 autour d'un cercle vérifiant la même propriété.

Somme d'entiers qui diffèrent de 1

On cherche à écrire un entier comme la somme d'une suite d'entiers strictement positifs vérifiant les 2 conditions :
(a) la suite débute par un 1,
(b) deux termes consécutifs de la suite ont une différence (le plus grand moins le plus petit) égale à 1.
Par exemple 11=1+2+3+2+3 ou 11=1+2+3+2+1+2.

1) Quels sont les entiers qui ne peuvent pas s'écrire ainsi ? Justifier la réponse.

2) Quelle est la suite la plus longue qui convient pour 100 ?

3) Donner une suite la plus courte possible qui convient pour 100.

4) Reprendre les questions 2) et 3) avec un entier n quelconque pouvant s'écrire avec les conditions (a) et (b).

Pavage avec des rectangles 2 x 3

On veut paver une grille à mailles carrées a x b (a et b entiers strictement supérieurs à 1) avec des rectangles 2 x 3, sans chevauchement et en laissant le minimum de petits carrés non recouverts.

1) Dessiner un tel pavage pour les grilles 5 x 6 , 4 x 9 et 5 x 9.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour qu'il ne reste aucun petit carré non recouvert.

3) Si on ne peut pas paver complètement la grille, montrer en donnant un exemple pour chaque cas que le nombre de carrés non recouverts peut être égal à 1, 2, 3, 4 ou 5 selon les valeurs de a et b.

4) Justifier qu'on peut toujours paver la grille en ne laissant au maximum que 5 carrés non recouverts.

La demi-sphère

Un récipient muni d'un couvercle plan a la forme d'une demi-sphère. Trois boules de rayon 5 cm sont déposées dans ce récipient de telle façon que les sommets des trois boules affleurent le couvercle.

1) Faire un dessin représentant la coupe par un plan passant par les centres des trois boules puis un autre dessin représentant la coupe par un plan contenant l'axe de la demi-sphère et le centre d'une des trois boules.

2) Quel est le rayon de la demi-sphère ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2013

Les sujets LYCÉE

2 + 0 + 1 = 3

2013 est un nombre entier comportant quatre chiffres distincts tels que le plus grand des chiffres est égal à la somme des trois autres.

1) Combien y a-t-il de nombres à quatre chiffres distincts formés avec 1, 2, 3 et 6 ?

2) Combien y a-t-il de nombres à quatre chiffres distincts (compris entre 1000 et 9999) formés avec 0, 1, 2 et 3 ?

3) Combien existe-t-il de nombres à quatre chiffres distincts (compris entre 1000 et 9999) et tels que le plus grand des chiffres soit égal à la somme des trois autres?

Différence de deux carrés d'entiers

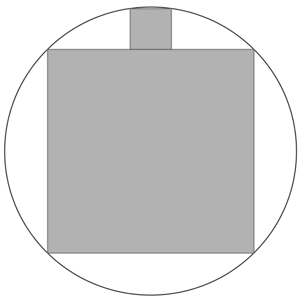
1) Quels sont les entiers compris entre 1 et 10 qui ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers ?

2) Montrer que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers.

3) Combien d'entiers entre 1 et 100 ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers ? Justifier votre résultat.

Encore des carrés

Un grand carré de côté égal à c_1 est inscrit dans un cercle.
Un petit carré de côté égal à c_2 a deux sommets sur le côté du grand carré, les deux autres sur le cercle.



Déterminer une équation vérifiée par le rapport $x = c_1 / c_2$.

En déduire la valeur de x.

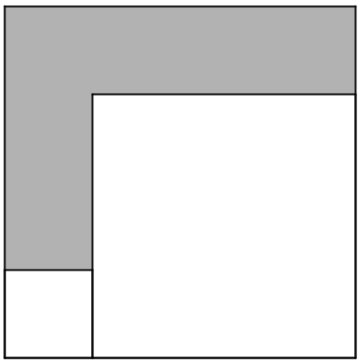
Deux pavés de même volume

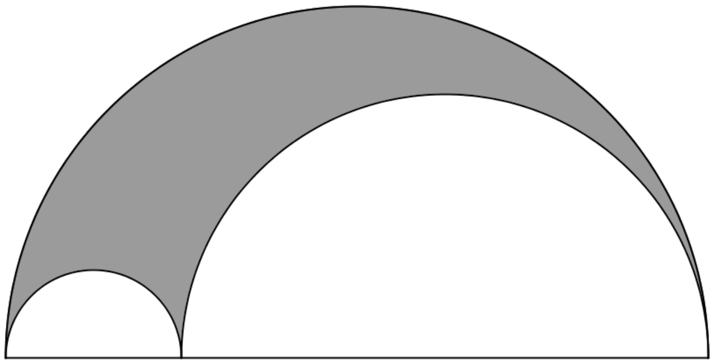
Emma possède un pavé droit dont deux faces ont chacune une aire égale à 4 cm², les 4 autres ont chacune une aire égale à x cm².

Lucas possède un pavé droit dont deux faces ont leurs diagonales de longueur égale à 4 cm, les quatre autres ont leurs diagonales de longueur égale à x cm.

Sachant que les deux pavés ont le même volume, calculer x et le volume commun aux deux pavés.

Matière grise

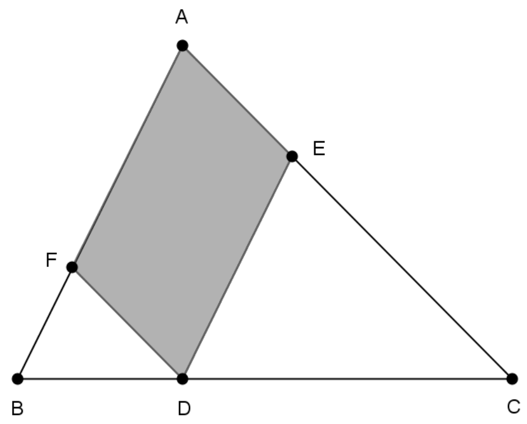




1) Les deux petits carrés ont pour aires a2 et b2. Quelle est l'aire de la partie grisée obtenue en retirant les deux petits carrés du grand carré ? Justifier votre résultat.

2) Les deux petits demi-disques ont pour aires a2 et b2. Les petits demi-cercles sont tangents entre eux et tangents au grand demi-cercle. Quelle est l'aire de la partie grisée ? Justifier votre résultat.

3) A partir d'un point D situé sur le côté [BC] d'un triangle ABC on trace deux segments parallèles aux deux autres côtés. Les triangles BDF et DCE ont pour aires respectives a2 et b ; quelle est l'aire du parallélogramme DEAF ? Justifier votre résultat.


A
E
F
B
D
C

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2014

Les sujets LYCÉE

Des carrés dans un carré

(pour les secondes)

Partager un carré en 4, 6, 7, 8, 9 carrés (pas nécessairement de même taille).
Généralisation : pour quelles valeurs de N peut-on partager un carré en N carrés (pas nécessairement de même taille) ?

A la queue leu leu

(pour les premières et terminales)

Former une suite de 3 nombres entiers distincts deux à deux, le premier terme étant égal à 1, telle que la somme de deux termes successifs soit toujours égale au carré de leur différence.
Même question avec 5 nombres.
Généraliser à N nombres et montrer qu'une telle suite est unique.

Palindromes

(pour tous)

Un palindrome est un nombre qui reste le même si on renverse l'ordre de ses chiffres (exemple 82528).
On s'intéresse aux palindromes à 5 chiffres, ne commençant pas par un 0 et divisibles par 101.
Quel est le plus petit ? Quel est le plus grand ? Combien y a-t-il de tels nombres ?

Mêmes questions en remplaçant 101 par 103.

Héritage fractionné (pour tous)

A la mort de l'oncle Picsou ses 5 neveux se partagent sa fortune S en respectant les conditions imposées par le testament : par ordre de naissance, chacun des héritiers reçoit la fraction de S la plus grande possible de la forme 1 / k où k est un entier, mais il doit laisser quelque chose aux héritiers suivants (sauf pour le dernier).
L'aîné recevra donc 1/2 de S et le deuxième 1/3 de S.
Quelles fractions de S recevront les autres héritiers ?
Et s'il y avait eu 6 héritiers ? (avec la même règle).

On suppose maintenant qu'il y a 4 héritiers et que le testament impose deux conditions : l'héritage est entièrement distribué et les parts sont toutes des fractions de S de la forme 1 / k avec k entier.
Quelle sera au maximum la plus petite part ?
Quelle sera au minimum la plus petite part ?

2014 (pour tous)

Cette grille est composée de 9 chiffres tous différents

6	4	9
5	3	0
8	1	2

On remarque que : 649 + 530 + 812 = 1991
658 + 431 + 902 = 1991

Il faut compléter la grille ci-dessous à l'aide de 9 chiffres tous différents de manière que les trois nombres écrits horizontalement aient pour somme 2014 de même que les trois nombres écrits verticalement (lus de haut en bas).

Expliquer pourquoi le chiffre 2 ne figure pas dans la grille.

Quelles sont les valeurs possibles pour la somme des chiffres de la colonne des centaines? Dans chaque cas donner les différentes possibilités pour les chiffres de cette colonne.
Mêmes questions avec la colonne des unités puis la colonne des dizaines.

Donner au moins une solution (il y en a plusieurs).

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2015

Les sujets LYCÉE

Chassez l'intrus (uniquement pour les secondes)

Arthur choisit un entier n puis il calcule la somme de tous les entiers de 1 à n : 1 + 2 + 3 +…+ (n-1) + n.
Malheureusement il est distrait et il a ajouté deux fois l'un des entiers.

Sachant qu'il n'a pas fait d'autre erreur et qu'il obtient comme total 2015, que valait n et quel est le nombre qu'il a ajouté deux fois ?

On admet que $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (bonus pour la démonstration de la formule).

Des rectangles avec des tiges (uniquement pour les premières et terminales)

On dispose de n tiges métalliques de longueurs 1, 2, 3, …, n cm et on cherche à former un rectangle en mettant bout à bout ces n tiges.

Quelles sont les deux plus petites valeurs de n permettant de former un rectangle non aplati avec les n tiges ?

Combien peut-on former de rectangles non superposables pour ces deux valeurs de n ?

Pour quels entiers n peut-on former un rectangle non aplati avec les n tiges ?

Pour quels entiers n peut-on former un carré avec les n tiges ?

Toujours par 17

(pour tous)

On dispose de 2015 jetons qui sont blancs d'un côté et noirs de l'autre. Au départ tous les jetons sont posés sur une table, le côté noir étant visible. Une étape consiste à choisir 17 jetons puis à les retourner.

Combien faut-il d'étapes au minimum pour que tous les jetons montrent leur face blanche ?

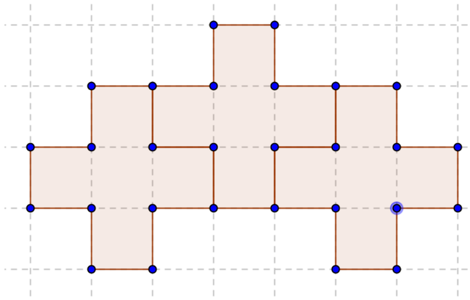
Même question en partant de 2016 jetons (en retournant à chaque étape 17 jetons).

Généralisez à un nombre n de jetons, n > 17 (en retournant à chaque étape 17 jetons).

Avec des croix

(pour tous)

On dispose de 2015 croix identiques constituées de 5 carrés de côtés de longueur 1 cm. On assemble ces croix, pour former un polygone, de façon que deux croix en contact se touchent par 3 côtés. Par exemple avec trois croix on peut former ce polygone :



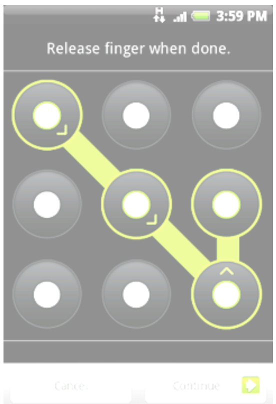
Quel est le plus grand périmètre que l'on peut obtenir pour un polygone formé de cette façon avec les 2015 croix ?

Quel est le plus petit périmètre que l'on peut obtenir pour un polygone formé de cette façon avec les 2015 croix ?

Schéma de déverrouillage

(pour tous)

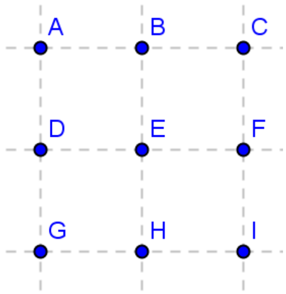
Neuf points A, B, C, D, E, F, G, H et I sont placés aux sommets de 4 carrés de côtés de longueur 1cm. Une permutation des 9 points définit une ligne brisée joignant successivement les points dans l'ordre de la permutation (un segment de la ligne peut passer éventuellement par un des 9 points).



Par exemple pour la ligne définie par la permutation A-F-G-C-D-I-B-H-E, les segments [GC] et [BH] passent par E. Quelle est la longueur de cette ligne brisée ?

Quelle est la plus petite longueur pour une ligne brisée formée à partir d'une permutation des 9 points ?

Essayez de trouver la plus grande longueur pour une telle ligne brisée.



TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2016

Les sujets LYCÉE

Les nombres triangulaires

1. Pour tous :

a) Calculez T_5, T_6, T_7, T_8.

b) Exprimez T_n en fonction de n sous la forme d'une somme d'entiers.

```
                                          o
                            o            o o
              o            o o          o o o
   o         o o          o o o        o o o o
```

$T_1=1$ $T_2=3$ $T_3=6$ $T_4=10$

Pour calculer un nombre triangulaire on utilise la formule $2T_n=n(n+1)$ schématisée pour n=4 par ce dessin :

```
   .  o  o  o  o
  .  .  o  o  o
 .  .  .  o  o
.  .  .  .  o
```

c) 2016 est-il un nombre triangulaire ?

d) Les entiers 1 et 36 sont des nombres triangulaires égaux au carré d'un nombre entier. Trouvez au moins un autre nombre triangulaire égal au carré d'un nombre entier.

2. Uniquement pour les premières et les terminales:

e) Montrez que la différence des carrés de deux nombres triangulaires consécutifs est le cube d'un entier.

f) Les nombres triangulaires peuvent-ils se terminer par n'importe quel chiffre ?

Il neige des flocons … de Von Koch !

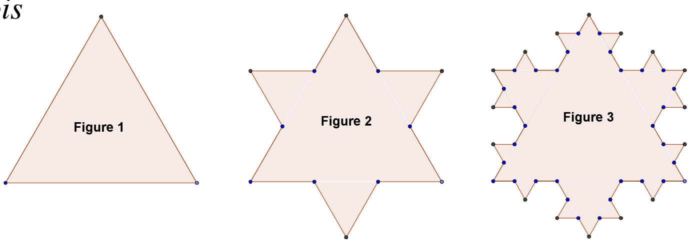
Pour obtenir un flocon de Von Koch, on considère un triangle équilatéral de 12 cm de côté sur lequel on procède au programme suivant:

- on divise chacun des segments de la figure en trois segments de même longueur

- on construit sur chaque segment médian à l'extérieur du triangle de base, un triangle équilatéral

- on supprime chacun des segments médians

- on recommence les étapes précédentes.



1. *Calculez le périmètre de chacune des trois figures.*

2. *Quel serait le périmètre de la figure 4 ? De la figure n ?*

3. *On désigne par A l'aire de la figure 1. Quelle fraction de A mesure l'aire de la figure 2 ? L'aire de la figure 3 ? L'aire de la figure n ?*

L'invasion des 1

Dans ce problème on a seulement le droit d'utiliser le nombre 1, des additions, des multiplications et des paires de parenthèses (mais on ne peut pas utiliser les nombres 11, 111, …).
En utilisant exactement 5 fois le nombre 1 on peut obtenir tous les entiers compris entre 1 et 6.
Par exemple : $1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 = 3$ *et* $(1 + 1) \times (1 + 1 + 1) = 6$.

1. *Montrez qu'avec exactement 6 fois le nombre 1 on peut obtenir tous les entiers de 1 à 9.*

2. *Quels entiers peut-on obtenir avec exactement 7 fois le nombre 1 ?*

3. *Quel est le plus grand entier qu'on peut obtenir avec exactement 10 fois le nombre 1 ?*

4. *Obtenez ainsi 2016 avec le minimum de fois le nombre 1.*

5. *Quel est le plus grand entier qu'on peut obtenir avec exactement n fois le nombre 1 ?*

C'est renversant !

En utilisant tous les chiffres de 1 à 9, Léon a formé trois nombres de trois chiffres qu'il a ajoutés pour former une somme S. Noël a renversé les trois nombres formés par Léon (par exemple 135 devient 531) et a calculé leur somme S'.

1. *Dans cette partie, Léon a obtenu S= 2016.*

a) Montrez sur un exemple que Léon peut effectivement obtenir S = 2016 et donnez pour cet exemple la valeur de S', somme obtenue par Noël.
b) Quelles sont les différentes sommes S' que Noël peut obtenir ?

2. Dans cette partie, Léon a obtenu une somme S non précisée.
a) Pour quelles sommes S, obtenues par Léon, Noël peut-il obtenir une somme S' égale à S ?
b) Pour combien de sommes S y a-t-il exactement deux possibilités pour la somme S' ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

1996

Les corrigés LYCÉE

Bicolore

Observons l'hexagone ABCDEF (fig 1)
Du point A partent 5 segments (côtés ou diagonales), on peut donc avoir :
5 rouges, ou 4 rouges et 1 vert, ou 3 rouges et 2 verts, ou 2 rouges et 3 verts, ou 1 rouge et 4 verts ou enfin 5 verts ; dans chacun de ces cas il y a au moins trois segments de même couleur.
Considérons trois segments de même couleur, par exemple rouges, issus de A ; notons- les [AX] [AY] [AZ] où X,Y, Z sont trois des points B, C, D, E, F (fig 2).
Si les trois côtés du triangle XYZ sont verts, ce triangle est unicolore ; sinon XYZ contient au moins un côté rouge, par exemple [XY], mais alors AXY est unicolore.
Pour un pentagone , du point A partent 4 segments, il est possible d'avoir 2 rouges et 2 verts, le raisonnement précédent ne s'applique pas. On peut avoir un coloriage dans lequel aucun triangle n'est unicolore. (fig 3).

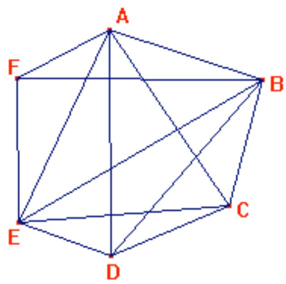


figure 1

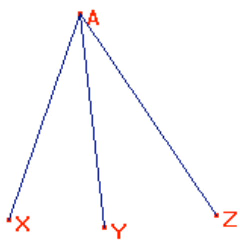


figure 2

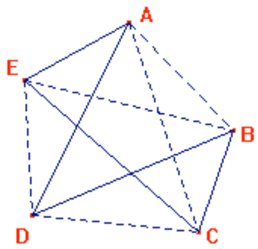


figure 3

Revenons à l'hexagone, on a dessiné 15 segments (côtés ou diagonales). Pour chacun de ces segments on a 2 choix de couleur, il y a donc 2^{15} coloriages possibles, $2^{15} = 32768$

Au carré

On vérifie facilement les égalités données par le texte :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2$$
$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11^2$$
$$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 19^2$$

La dixième ligne serait :

$$10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 = 131^2$$

Y a-t-il une ligne sur laquelle figure 1996^2 ?
A gauche de l'égalité, on a le produit de 4 entiers successifs dont 2 sont nécessairement pairs, ce produit est pair et en ajoutant 1 on obtient un nombre impair qui ne peut être égal à 1996^2 .
On observe que les égalités écrites sont toutes de la forme :

$$n \times (n + 1) \times (n + 2) \times (n + 3) + 1 = [\, n \times (n + 3) + 1 \,]^2$$

En développant, on vérifie que cette égalité est vraie pour tout entier naturel n.

Adam et Zoé

Il y a 5 jetons et Zoé joue la première, elle peut donc prendre 1 ou 2 jetons.
Examinons le cas où elle prend 1 jeton puis Adam 1 jeton, les tirages suivants sont alors obligatoires (nombres écrits en gras)

Zoé	1	**1**	**1**
Reste	*4*	*2*	
Adam	1	**1**	
Reste	*3*	*1*	

Zoé a perdu.

Examinons le cas où elle prend 2 jetons au départ, Adam doit obligatoirement prendre 1 jeton :

Zoé	2	**1**
Reste	*3*	1
Adam	**1**	**1**
Reste	*2*	

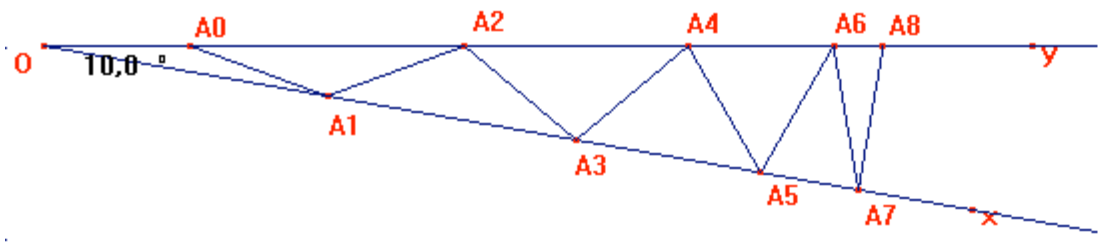
Adam a perdu.
En conclusion, si Zoé joue la première, elle peut gagner, à condition de prendre 2 jetons eu premier coup.
Si Zoé a devant elle, 5 jetons c'est une situation gagnante pour Zoé, nous la noterons Z(5) et 3 jetons devant Adam est une situation perdante pour Adam, nous la noterons a(3).
On a de même Z(4), Z(5), Z(6) car elles peuvent renvoyer à a(3), mais z(7) car elle renvoie à A(4) ou A(5) ou A(6).
On a de même Z(8), Z(9), …Z(14) car elles peuvent renvoyer à a(7), mais z(15) car elle renvoie à A(8) ou A(9) … ou A(14).
Sont perdantes pour Zoé, les situations z(1), z(3), z(7), z(15).
On remarque que : $1 = 2^1 - 1$; $3 = 2^2 - 1$; $7 = 2^3 - 1$; $15 = 2^4 - 1$.
Plus généralement : $2^n - 1 = 2 \times 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1 + 2^{n-1}$.

Si Adam a devant lui 2^n - 1 jetons, il peut prendre p jetons, p compris entre 1 et $2^{n-1} - 1$
et Zoé peut prendre $2^{n-1} - p$ jetons laissant à Adam $2^{n-1} - 1$ jetons, puis à l'étape suivante elle laisse à Adam $2^{n-2} - 1$ jetons …jusqu'à 1 jeton.
Pour gagner il suffit que Zoé laisse toujours à Adam un nombre de jetons de la forme $2^n - 1$.

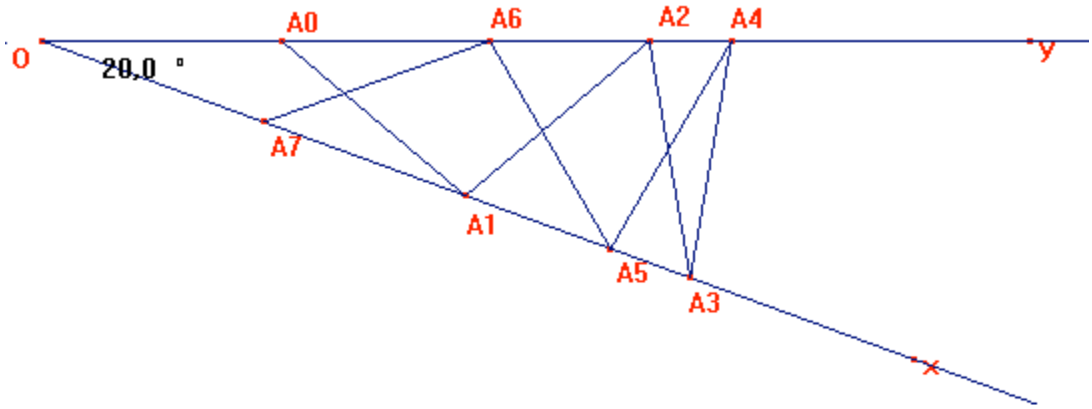
Si Zoé a devant elle 1996 jetons, elle prend 973 jetons et laisse 1023 jetons ($1023 = 2^{10} - 1$), au deuxième coup, elle laisse $2^9 - 1$, … au dixième 1 jeton et elle gagne.

Dans l'angle

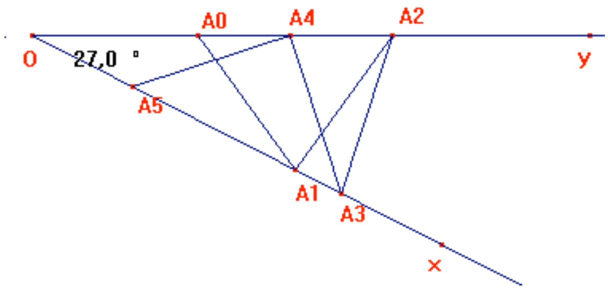
Notons θ = xOy
Pour **θ = 10 °**, en utilisant l'égalité de deux angles dans un triangle isocèle et la somme des angles d'un triangle égale à 180°, on obtient :
OA_0A_1 = 160° ; OA_1A_2 = 150° ; OA_2A_3 = 140° ; OA_3A_4 = 130° ; OA_4A_5 = 120° ; OA_5A_6 = 110° ; OA_6A_7 = 100° ; OA_7A_8 = 90° .
Le cercle de centre A_8 et de rayon OA_0 est tangent à [Ox), la construction s'arrête, on a construit 8 triangles.



Pour **θ = 20°** :
OA_0A_1 = 140° ; OA_1A_2 = 120° ; OA_2A_3 = 100° ; OA_3A_4 = 80° ; cet angle est inférieur à 90°, on revient en arrière, or on a aussi OA_4A_3 = 80° , on construit donc les points symétriques des précédents par rapport à la bissectrice des demi-droites [Ox) et [Oy) ; on a construit 8 triangles.

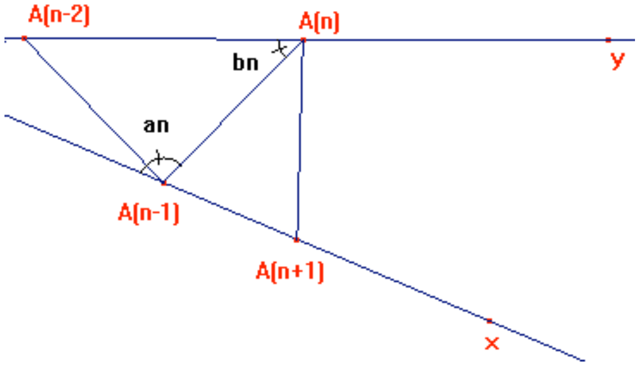


Pour **θ = 27°** :
OA_0A_1 = 126° ; OA_1A_2 = 99° ; OA_2A_3 = 72° , on revient en arrière, on construit A_4 et A_5 et on constate que $OA_5 < OA_0$, la construction s'arrête, on a construit 5 triangles.



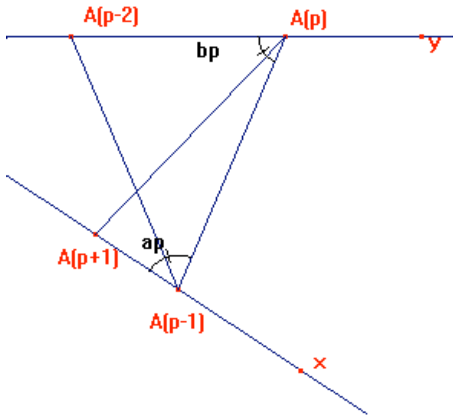
Dans un triangle isocèle, les deux angles égaux sont strictement inférieurs à 90°, donc si $\theta \geq 90°$, on ne peut construire aucun triangle.

Soit $a_n = OA_{n-1}A_n$
Si **a_n > 90°**, on peut continuer et construire A_{n+1} en avançant
($A_{n-1} \in [OA_{n+1}]$) et $OA_nA_{n-1} = 180 - \theta - a_n$ $\qquad$ $A_nA_{n-1}A_{n+1} = 180 - a_n$
$A_{n-1}A_nA_{n+1} = 180 - 2\,(180 - a_n) = 2\,a_n - 180$
$OA_nA_{n+1} = OA_nA_{n-1} + A_{n-1}A_nA_{n+1} = (180 - \theta - a_n) + (2a_n - 180)$
$a_{n+1} = a_n - \theta$; la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $- \theta$.
Or $a_1 = 180 - 2\,\theta$ donc $a_n = a_1 - (n-1)\,\theta = 180 - (n+1)\,\theta$
$b_n = OA_nA_{n-1} = n\,\theta$.



A_n est le dernier point construit lorsque $\mathbf{a_n = 90°}$ car alors le cercle de centre A_n et de rayon OA_0 est tangent à [Ox) ou à [Oy) en A_{n-1}. Ceci est réalisé quand $180 – (n + 1)\ \theta = 90$ ou encore $n = 90 / \theta - 1$; donc si $90 / \theta$ est un entier q on construit q – 1 triangles.
C'est le cas pour $\theta = 10$, on a q = 9 et on a construit 8 triangles.
C'est le cas pour $\theta = 45$, on a q = 2 et on peut construire 1 seul triangle.

On revient en arrière ($A_{p+1} \in [OA_{p-1}]$) lorsque $\mathbf{a_p < 90}$ c'est à dire $180 – (p+1)\ \theta < 90$ ou encore $p > 90 / \theta - 1$.



Pour la suite nous désignerons par p le premier entier vérifiant cette inégalité, p est la partie entière de $90 / \theta$.
Si $OA_{p-1}A_p = OA_pA_{p-1}$ alors A_p et A_{p-1} d'une part, A_{p-2} et A_{p+1} d'autre part sont symétriques par rapport à la bissectrice de xOy, de même A_{p+1} ………A_{2p-1} sont symétriques de A_{p-2} ……….A_0 et $A_{2p} = O$, on revient donc en O et on construit 2p triangles.
Cela se produit quand $a_p = 180 – a_p - \theta$, on obtient $p = 90 / \theta - 1 /2$.
Par exemple si $\theta = 20$, p = 4, on a 8 triangles.
Si $\theta = 60$, p = 1, on a 2 triangles mais qui sont confondus.
Quand on revient en arrière, $A_{p-2}A_{p-1}A_p = 180 – 2\ b_p = 180 –2\ p\ \theta$ et d'autre part $A_{p-1}A_pA_{p+1} = 180 – 2\ a_p = 2(p+1)\ \theta - 180$ et $A_{p+1}A_{p-1} < A_{p-2}A_p$ lorsque $A_{p-1}A_pA_{p+1} < A_pA_{p-1}A_{p-2}$, c'est à dire $2(p+1)\ \theta- 180 < 180 - 2p\theta$, soit $p < 90/\theta -1/2$.
Si $p+1/2 < 90/\theta$, on a 2p triangles et si $p+1/2 > 90/\theta$, on a 2p-1 triangles.
Récapitulation : p désigne la partie entière de $90/ \theta$

Condition	$90/\theta = p$	$p < 90/\theta < p+1/2$	$90/\theta = p + 1/2$	$p + 1/2 < 90/\theta < p + 1$
Nombre de triangles	$p - 1$	$2p - 1$	$2p$ triangles avec retour en O sauf pour $\theta = 60$	$2p$ triangles

On obtient n triangles pour :
$\theta = 90 / (n+1)$ ou **$180 / (n+2) < \theta < 180 / (n+1)$** ou **$\theta = 180 / (n+1)$ avec n pair.**

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

1997

Les corrigés LYCÉE

Les caméléons

1- Considérons les transformations suivantes :

Rencontre	gris	bruns	rouges
	1	7	5
brun-rouge	3	6	4
brun-rouge	5	5	3
gris-brun	4	4	5
gris-brun	3	3	7
gris-brun	2	2	9
gris-brun	1	1	11
gris-brun	0	0	13

Il ne reste donc que des caméléons rouges.

2- Dans le second cas effectuons les transformations indiquées

Rencontre	gris	bruns	rouges
	13	15	17
gris-brun	12	14	19
gris-brun	11	13	21
brun-rouge	13	12	20
brun-rouge	15	11	19
brun-rouge	17	10	18
Gris-rouge	16	12	17

On voit ici que le nombre de caméléons rouges n'a pas varié, et que l'on a trois caméléons gris de plus, trois caméléons bruns de moins. Les trois couleurs jouent des rôles totalement symétriques donc on peut par une suite de rencontres transformer trois caméléons d'une couleur en trois d'une autre.

3- Notons a, b, c le nombre de caméléons des trois couleurs gris, brun, rouge respectivement. A chaque transformation on a les propriétés suivantes:

• $a + b + c$ est constant, car le nombre de caméléons ne change pas.

• Si on note a', b', c' le nombre de caméléons des trois couleurs après la transformation, trois cas sont possibles
rencontre gris-brun : $a' = a - 1$, $b' = b - 1$, $c' = c + 2$, donc $a' - b' = a - b$
rencontre brun-rouge : $a' = a + 2$, $b' = b - 1$, $c' = c - 1$, donc $a' - b' = a - b + 3$
rencontre gris-rouge : $a' = a - 1$, $b' = b + 2$, $c' = c - 1$, donc $a' - b' = a - b - 3$
Dans les trois cas, $(a' - b') - (a - b)$ est un multiple de 3, on dit que $a - b$ est constant modulo 3.

• Par permutation circulaire, on a également, $b - c$ et $c - a$ constants modulo 3. La troisième propriété se déduit en fait des deux premières puisque $a + b + c$ est constant.

Supposons maintenant que l'on puisse par une suite de rencontres arriver à des caméléons ayant tous la même couleur, c'est à dire qu'il y ait deux fois la valeur 0 parmi a, b , c. Il y a donc deux valeurs égales modulo 3, et comme cela n'a pas changé lors des transformations, il y avait au départ deux valeurs égales modulo 3.
On en déduit que si $\{a,b,c\}= \{0,1,2\}$ modulo 3, on ne peut pas arriver à des caméléons de même couleur, quelle que soit la suite des rencontres réalisées.
Dans le cas proposé, on a : $a =13$, $b = 15$, $c = 17$, il n'y a pas deux valeurs égales modulo 3, il n'est pas possible d'arriver à des caméléons ayant tous la même couleur.

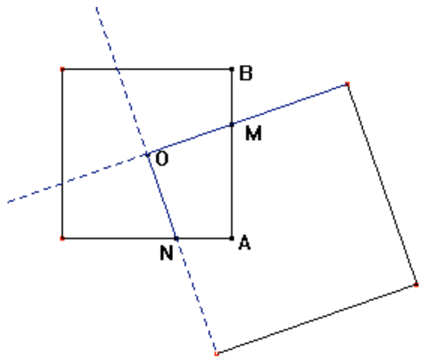
4- Si deux valeurs parmi les trois nombres a, b, c initiaux sont égales modulo 3, on peut réaliser une suite de rencontres aboutissant à tous les caméléons de la troisième couleur. Supposons à une permutation des couleurs près, que $(a – b)$ soit un multiple de 3 avec $a \leq b$. Nous allons montrer qu'il est alors possible d'arriver à des caméléons ayant tous la même troisième couleur (c'est à dire $a = 0$, $b = 0$ au bout d'un certain temps), sauf dans le cas particulier $a = 0$, $b=3k$ et $c = 0$, mais alors il y a une seule couleur représentée. On peut donc écrire $b = a + 3k$ avec $k \geq 0$.
1ère étape : on se ramène à $a = 0$ en effectuant a rencontres gris-brun, et on passe de (a,b,c) à $(0,b-a,c+2a) = (0,3k,c+2a)$.
2ème étape : mécanisme élémentaire de passage de $(0,3,1)$ à $(0,0,4)$:

rencontre	gris	bruns	rouges
	0	3	1
brun-rouge	2	2	0
gris-brun	1	1	2
gris-brun	0	0	4

On a donc fait disparaître 3 bruns et apparaître 3 rouges.
3ème étape : on utilise k fois le mécanisme précédent à la répartition $(0,3k,c+2a)$. Attention, cela n'est possible que si $c+2a > 0$ (on a besoin d'un rouge au moins pour le mécanisme, et le nombre de rouges augmente ensuite. On arrive ainsi à $(0,0,c+2a+3k)$. Le problème a donc une solution, tous les caméléons sont devenus rouges.
5-Récapitulons : on peut arriver à des caméléons ayant tous la même couleur si et seulement si deux des valeurs de départ diffèrent d'un multiple de trois. Dans ce cas une stratégie a été présentée, elle correspond à b rencontres, où b est la plus grande de ces deux valeurs.

Carré tournant

La solution repose sur le prolongement des côtés du grand carré au delà du point O.

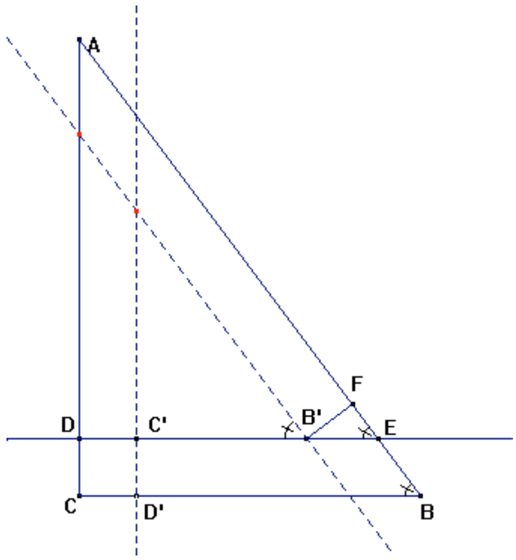


La condition $b > a$ garantit que le point A reste à l'intérieur du carré tournant, et donc la partie commune est toujours le quadrilatère AMON .
Le prolongement en pointillés montre que le petit carré est découpé en quatre parties égales dont l'une est AMON.
On en déduit immédiatement que l'aire de AMON est le quart de l'aire du carré fixe, soit $a^2 / 4$. Elle est bien constante.

D'autre part, AN = BM et ON = OM donc le périmètre de la partie commune vaut :
AN + NO + OM + MA = BM + NO + OM + MA = AB + 2 OM = a + 2 OM
Le périmètre est donc minimal lorsque OM est minimal, c'est à dire M milieu du côté AB.
On a alors OM = a/2 et le périmètre minimal vaut 2a.
De même, le périmètre est maximal lorsque OM est maximal, soit M en un des sommets du carré. On a alors $OM = a / \sqrt{2}$ et le périmètre maximal vaut $a(1 + \sqrt{2})$.

Disque qui roule ...

Notons que le triangle ABC est rectangle puisque $10^2 = 8^2 + 6^2$ (c'est le classique triangle 3, 4, 5 en deux fois plus grand)
D'autre part le centre du petit disque décrit l'ensemble des points qui sont à distance 1cm d'un des côtés, à distance au moins 1cm des deux autres et intérieurs au triangle. Cet ensemble est le triangle A'B'C' de côtés parallèles à ceux de ABC, ce triangle est rectangle.



Les triangles ABC et A'B'C' sont donc semblables et le rapport k de leurs périmètres est :
k = C'B'/CB = A'B'/AB = A'C'/AC. Il suffit donc de calculer k

Méthode 1

CD = C ' D' = B' F = 1, avec F projeté orthogonal de B' sur (AB). D'autre part, le parallélisme des côtés fait apparaître trois fois l'angle α dans trois triangles rectangles ABC, A'B'C', B'EF. On a donc :
sin α = AC/AB = B'F/B'E d'où B'F =B'E × AB /AC = 10/8 = 5/4
et d'autre part DE/CB = AD/AC d'où DE = CB × AD/AC = 6.(8-1)/8 = 21/4
On a donc : C'B' = DE - DC' - B'E = 21/4-1-5/4 = 3.
k = C'B'/CB = 3/6 = 1/2 et le périmètre de A'B'C' est égal à 12.

Méthode 2

A',B',C' sont équidistants de deux côtés du triangle ABC ils sont donc chacun sur une bissectrice de ce triangle. Soit O l'intersection des bissectrices, c'est le centre du cercle inscrit dans le triangle, soit r le rayon de ce cercle.
Le rapport k de l'homothétie de centre O qui transforme ABC en A'B'C' est k = OR/OS et on a OS = r
Si p désigne le demi-périmètre de ABC et U son aire on a U = pr (démonstration facile en additionnant les aires des triangles OAB, OAC, OBC)
Or 2p = 10 + 8 + 6 = 24 et U = AB.AC/2 = 24 donc r = 2 c'est à dire OS = 2 et comme SR = 1, OR = 1 et enfin k= 1/2.

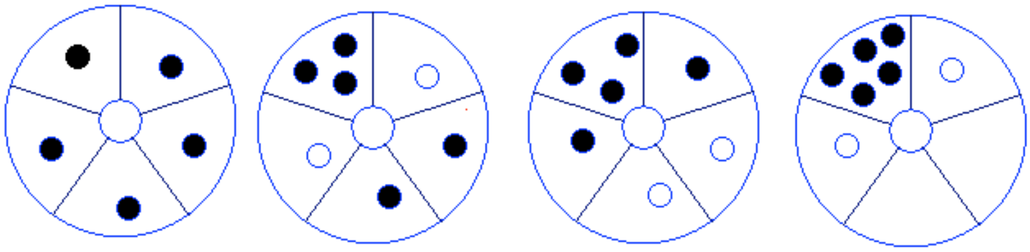
Méthode 3

A'B' = k.AB = 10.k B'C' = 6.k A'C' = 8.k
L'aire U de ABC est la somme des aires des trapèzes AA'B'B, BB'C'C, CC'A'A et du triangle A'B'C' :
24 = 1.(10.k + 10)/2 + 1.(6.k + 6)/2 + 1.(8.k + 8)/2 + 6.k.8.k/2
$48(1 - k^2) = (k + 1).24$ $2(1 - k)(1 + k) = (1 + k)$ $2(1 - k) = 1$ $k = 1/2$.

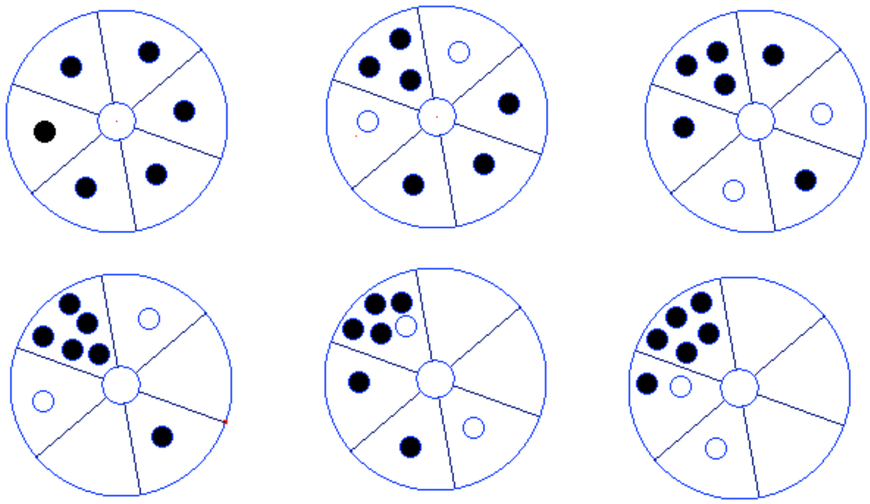
La ronde des pions

Voici une solution possible pour chacun des trois cas demandés. La position précédente des deux pions déplacés d'une case vers une case voisine est indiquée par un petit cercle blanc.

Couronne de cinq cases :

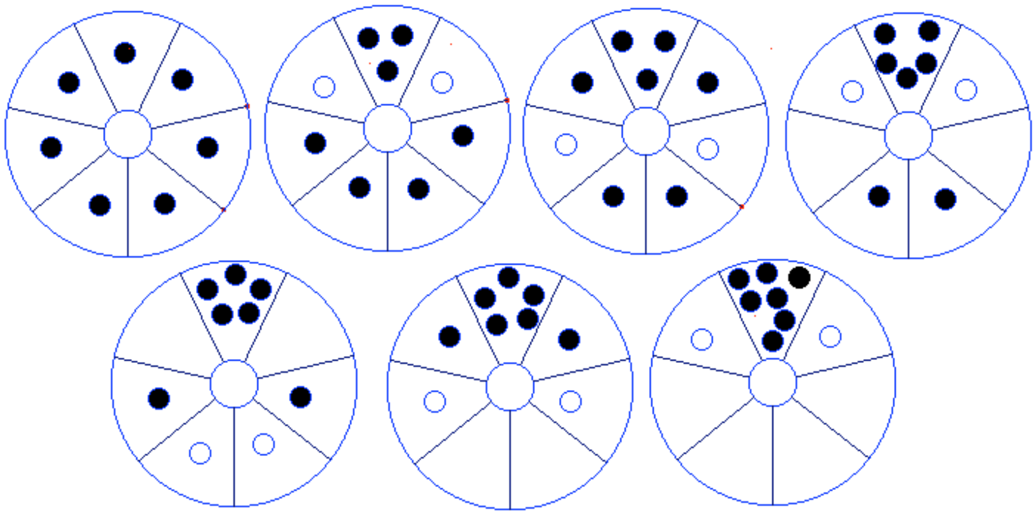


Couronne de six cases :



et il n'apparaît pas de solution évidente pour transférer le sixième pion avec les cinq autres. En fait ce n'est pas possible, comme cela sera démontré par la suite. Mais le fait de ne pas y arriver ne prouve pas qu'il n'y a pas moyen de le faire.

Couronne de sept cases



On voit que cela a pu être réalisé pour n = 5 ou 7, mais pas pour n = 6. Il reste à voir comment cela se passe dans le cas général.

Cas n impair : n = 2k +1

On peut procéder par symétrie, comme dans les cas n = 5 ou 7. On fixe une case où transporter les pions. On peut alors numéroter les cases, par rapport à leur éloignement de cette case, de –k à k . On bouge alors simultanément deux pions qui sont dans des cases de numéros opposés. Au premier mouvement, les deux pions dans les cases –1 et 1 vont dans la case 0. Puis les deux pions qui sont dans les cases –2 et 2 vont sur les cases –1 et 1 puis sur la case 0 …. On procède ainsi de suite et tous les pions vont sur la case 0 au bout de 1 + 2 +…+ k étapes.
Le nombre N d'étapes est donc : $N = k(k+1) / 2 = (n-1)(n+1) / 8 = (n^2-1) / 8$.

Cas n pair.

- Posons n = 2p et numérotons les cases de 1 à 2p, la case 1 étant celle où on veut mettre tous les pions.
p pions occupent une case paire et doivent faire chacun un nombre impair de déplacements : soit a ce nombre
p pions occupent une case impaire et doivent faire chacun un nombre pair de déplacements : soit b ce nombre.
Le nombre total de déplacements est p(a + b) avec a+ b impair, or on déplace les pions 2 par 2, le nombre de déplacements est donc pair ; pour que ce soit possible il faut que p soit pair c'est à dire que n soit un multiple de 4
- Si n est un multiple de 4, c'est possible, en effet posons n = 4q, on peut déplacer les 2q pions situés sur une case paire pour les amener sur la case précédente (on fait q déplacements de 2 pions) ; par étapes successives, on peut amener les 2 pions de l'une quelconque de ces cases sur la case 1.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

1998

Les corrigés LYCÉE

Rando-math ➔ **seconde**

Désignons par d la longueur du tour du lac, par x la distance parcourue par Martial et par t le temps écoulé depuis le lever du soleil jusqu'à 9 heures, moment de la rencontre.
Martial parcourt x km en t heures sa vitesse est donc x/t ; il parcourt aussi (d – x) km en 2 heures (de 9h 30 à 11h 30), sa vitesse est donc $\frac{d-x}{2}$; on a l'égalité $\frac{x}{t} = \frac{d-x}{2}$.
Valérie parcourt (d – x) km en t heures et x km en 4,5 heures (de 9 h30 à 14 h) ; on a donc l'égalité $\frac{d-x}{t} = \frac{x}{4{,}5}$.

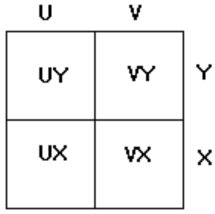
En multipliant membre à membre les deux égalités obtenues on obtient : $\frac{x}{t} \times \frac{d-x}{t} = \frac{d-x}{2} \times \frac{x}{4{,}5}$
puis en simplifiant par x et (d – x) : $t^2 = 9$ soit t = 3
Le soleil s'est levé à 6 heures.

Esthétique multiplicative ➔ **seconde, première, terminale**

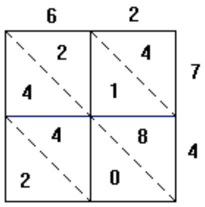
Analysons le calcul effectué dans un cas plus simple :

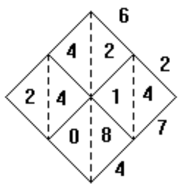
777	On calcule en réalité :
× 777	
49	4900 + 49490 + 494949 + 49490 + 4900 c'est à dire :
4949	
494949	$49.10^2 + (49.10^3 + 49.10) + (49.10^4 + 49.10^2 + 49) + (49.10^3 + 49.10) + 49.10^2$
4949	C'est bien le développement de :
49	
603729	$(7.10^2 + 7.10 + 7).(7.10^2 + 7.10 + 7)$

Soit à effectuer le produit des nombres UV×XY où U et V sont des chiffres : U et X sont les chiffres des dizaines et V et Y sont les chiffres des unités. On doit calculer le produit :
$(10.U + V) \times (10.X + Y)$ qui développé donne $10^2.U.X + 10.U.Y + 10.V.X + V.Y$
On dessine un tableau carré de deux lignes et deux colonnes ; au dessus du tableau en partant de la gauche on inscrit les chiffres U et V et à droite en partant du bas les chiffres X et Y, on complète le tableau en effectuant les produits.



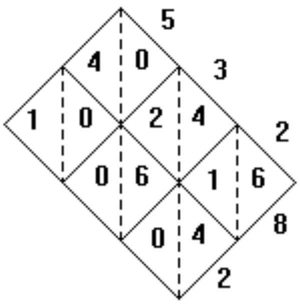
On adopte la disposition suivante : Dans chaque case on écrit le chiffre des dizaines sous la diagonale et le chiffre des unités au-dessus et en faisant pivoter le tableau, on obtient la disposition du texte. On fait l'addition des nombres comme indiqué au début, par exemple :



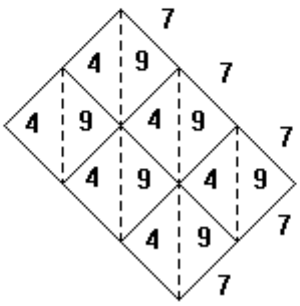


```
  62
× 47
  42
2414
 08
2914
```

On a calculé 420 + 2414 + 080 et dans le cas général $U.Y.10 + (U.X.\ 10^2 + V.Y) + V.X.10$, c'est bien ce que l'on voulait.
La technique peut s'appliquer à tous les produits ; si les nombres n'ont pas le même nombre de chiffres, on remplace dans la disposition précédente un carré par un rectangle.



```
  532
×  28
  40
 1024
  061 6
   04

14896
```



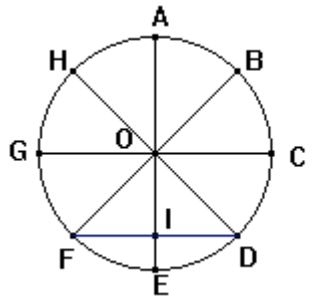
```
  777
×  77
  49
4949
  4949
    49

59829
```

« C'est un procédé très évolué que les arabes ont inventé aux alentours du XIII^{ème} siècle. Celui-ci fut transmis dès la fin du Moyen Age à l'Europe occidentale, où il fut connu sous le nom de *per gelosia* (par jalousie), en allusion à la disposition des opérations qui évoquent les treillis en bois ou en métal, à travers lesquels les femmes et surtout les maris jaloux pouvaient voir sans être vus. … »

(D'après Georges IFRAH : Histoire universelle des chiffres)

Des ronds dans l'eau ➔ **seconde, première, terminale.**

Nommons les anneaux A, B, C, D, E, F, G, H.



Soit r le rayon du cercle, AB = a, AC = b, AE = d = 2r.

I étant le projeté orthogonal de D sur (AE), OI = ID = $\frac{r}{\sqrt{2}}$

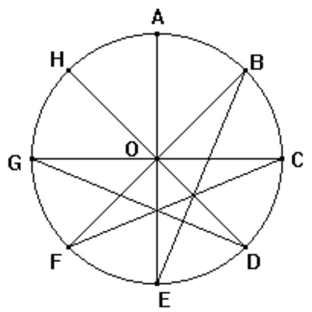
$AD^2 = AI^2 + ID^2 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 r^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 r^2 = (2 + \sqrt{2})\, r^2$

$c = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Dans le triangle ABE, $d^2 = a^2 + c^2$ d'où $a = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

enfin $b = r\sqrt{2}$

Si le nageur s'arrête dès qu'il a atteint le dernier anneau, il doit parcourir 7 segments ; pour effectuer la plus grande distance possible, il doit parcourir le plus grand nombre de diamètre possibles ou à défaut des segments de longueur AD ; or il ne peut parcourir 2 diamètres consécutivement sinon il revient à l'anneau précédent. Il peut donc parcourir au plus 4 diamètres. Montrons qu'il peut parcourir 4 diamètres et trois segments de longueur AD, il effectue alors un trajet de longueur maximale. Il peut par exemple ramasser les anneaux dans l'ordre A, E, B, F, C, G, D, H , ou faire un trajet analogue symétrique du précédent par rapport à (AE).



La distance parcourue est :

AE + EB + BF + FC + CG + GD + DH = d + c + d + c +d +c +d = 4d + 3c = $r\,(8 + 3\sqrt{2+\sqrt{2}})$

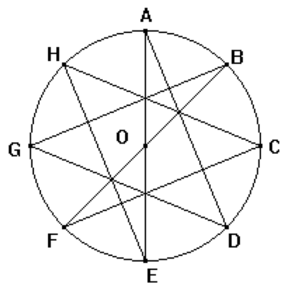
dont une valeur approchée est au cm près 67,72 m.

Dans la cas où le nageur revient au point de départ, il doit parcourir 8 segments avec :
- au maximum 4d (pas deux diamètres consécutifs).
- le nombre total de a et c doit être pair (si on numérote les sommets, un trajet du type a ou c change la parité du sommet, et, puisqu'on doit revenir au point de départ, il faut un nombre pair de changement de parité).

Etudions les différents cas :

1) 4d + 4c : On constate que c'est impossible, car l'enchaînement est alors imposé : d, c, d, c, d, c, d, et on doit finir par a.
2) 4d + 3c +d est impossible (règle de parité).
3) d + 2c + 2b = 72, 62 m est réalisable (A, E, H, D, F, B, G, C, A) ; les autres trajets avec 4d sont plus courts (d > c > b > a).
4) 3d + 5c est impossible (règle de parité).
5) 3d + 4c + b = 74,03 m est réalisable (A, E, H, C, G, D, B, F, A) ; les autres trajets avec 3d sont plus courts.

6) 2d + 6c = 75,43 m est réalisable (A, E, H, C, F, B, G, D, A) ; les autres trajets avec 2d sont plus courts.
7) d + 7c est impossible (règle de parité).
8) d + 6c + b n'est pas réalisable.
9) 8c = 73,91 m est réalisable (A, D, G, B, E, H, C, F, A).



Conclusion : le trajet de longueur maximale est de type 2d + 6c = 75,43 m

Briques et murettes ➔ **première, terminale.**

Désignons par U_n le nombre de murettes différentes qu'on pourrait fabriquer avec n briques.
$U_1 = 1$ $U_2 = 2$ $U_3 = 3$ comme le montrent les dessins où toutes les possibilités figurent dons ces trois cas. Un mur de n briques peut être fabriqué soit avec un mur de n -1 briques en ajoutant à droite 1 brique verticale ou un mur de n - 2 briques en ajoutant à droite 2 briques posées horizontalement.

Il y a U_{n-1} possibilités dans le premier cas et U_{n-2} possibilités dans le second cas. On a donc : $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$.
On obtient un suite de Fibonacci où chaque terme s'obtient en ajoutant les deux précédents :
$U_4 = 5$, $U_5 = 8$, $U_6 = 13$, $U_7 = 21$, $U_8 = 34$, $U_9 = 55$, $U_{10} = 89$, $U_{11} = 144$, $U_{12} = 233$

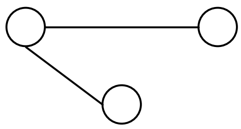
Remarque : on peut montrer par récurrence $U_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$ où a et b sont les racines de $x^2 - x - 1$.
Autre méthode : il y a 2x briques horizontales et y briques verticales avec 2x + y = n, dans un mur de n briques. Si on cherche à répartir les briques verticales et les groupes de 2 briques horizontales, on doit choisir les positions des x groupes de briques horizontales parmi les x + y positions possibles ; il y a donc $C_{x+y}^{x} = C_{n-x}^{x}$ possibilités.

$$U_n = \sum_{x=0}^{[n/2]} C_{n-x}^{x} = C_{12}^{0} + C_{11}^{1} + C_{10}^{2} + C_{9}^{3} + C_{8}^{4} + C_{7}^{5} + C_{6}^{6} = 1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1 = 233$$

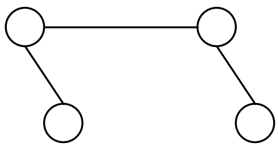
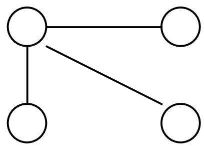
Sur le triangle de Pascal, c'est la somme des termes de la diagonale montante partant de C_n^0.

Le pays des lacs ➔ **première, terminale.**

Cherchons le nombre minimum de canaux nécessaires pour pouvoir passer d’un lac à l’autre.
Pour relier 2 lacs il faut un canal et un canal suffit.
Pour relier ces 2 lacs à un troisième lac il faut un canal supplémentaire et 2 canaux suffisent.

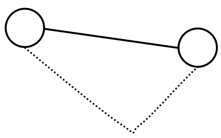
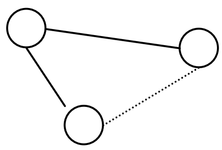
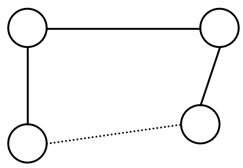



Pour relier ces trois lacs à un quatrième lac il faut encore un canal et trois canaux suffisent.

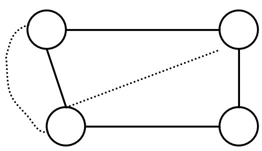
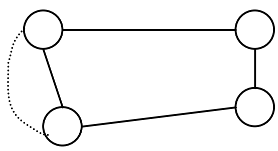



En continuant ainsi on arrive à un minimum de 6 canaux pour relier 7 lacs et il n’y a pas d’île.

Quand on ajoute un canal on crée nécessairement une île :

Si on ajoute encore un canal, on crée une île ou on coupe une île en deux, et on a une île de plus.

On a ajouté 4 canaux il y a donc 4 îles.

Généralisons : s’il y a L lacs et C canaux reliant tous les lacs, le nombre minimum de canaux nécessaires est L – 1 et le nombre d’îles est I = C – (L – 1) = C – L + 1.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

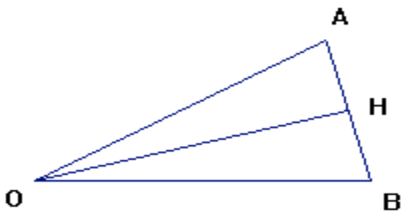
1999

Les corrigés LYCÉE

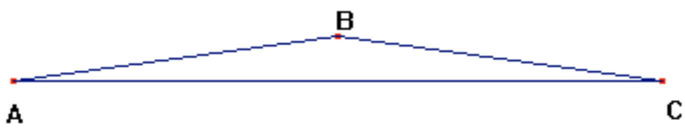
Quelle ligne ! ➔ **seconde.**

On peut envisager trois méthodes pour savoir si la ligne se referme ou non :

a) Un tracé soigné pour $r = 10$ cm montre qu'il manque environ 22 mm ; l'erreur de construction ne pouvant dépasser 12 fois 1 mm, on peut affirmer que la ligne ne se referme pas.
b) Si la ligne se referme, la figure obtenue est un dodécagone (polygone régulier à 12 sommets), de côté $r / 2$.
Or, si on considère deux sommets consécutifs du dodécagone et le centre du cercle circonscrit, on obtient un triangle isocèle OAB avec AOB = 30 °.
H désignant le milieu de [AB], AOH est un triangle rectangle et AOH = 15 °, on a donc :
$AH = OA \times \sin 15°$ et $AB = 2 \times AH = 2 \times r \times \sin 15° = 0{,}5176 \times r$ ce qui est incompatible avec la valeur $r / 2$. Donc la ligne ne se referme pas.

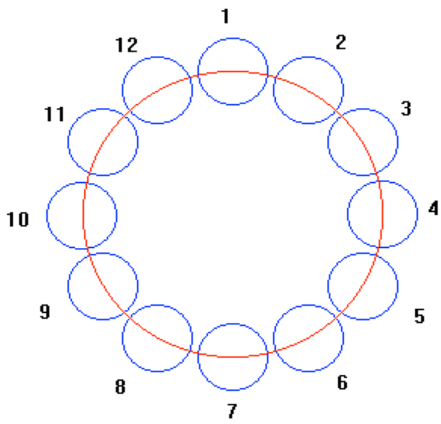


c) On peut raisonner sans calcul numérique :
Supposons que la ligne se referme, en prenant trois sommets consécutifs on obtient un triangle ABC avec $AB = BC = r / 2$, or AC est le côté d'un hexagone régulier donc $AC = r$, ce qui est impossible pour un triangle non aplati.

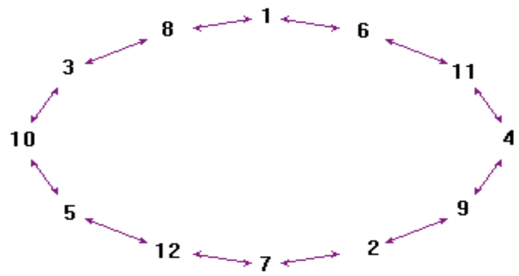


Un jeu de solitaire ➔ **seconde, première, terminale.**

Numérotons les cases de 1 à 12 ; pour chaque case, il y a deux façons de placer un pion sur cette case .



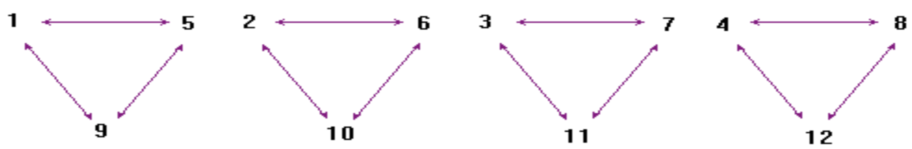
Par exemple pour placer un pion sur la case 1, on part soit de la case 6 soit de la case 8 ; notons cela par le schéma suivant : 6 →1 ←8 . En le réalisant pour toutes les cases on obtient ainsi le graphe



suivant:

Commençons par placer un pion sur la case 1 (en partant de la case 6) puis sur la case 6 (en partant de la case 11), etc …On peut ainsi placer les 11 pions successivement sur les cases 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 5, 10, 3, la case 8 restant vide ; on peut également tourner dans l'autre sens et laisser la case 6 vide.
En commençant toujours par la case 1, on peut laisser vide n'importe quelle case différente de 1, par exemple la case 7 : on place les 11 pions successivement sur les cases 1, 6, 11, 4, 9, 2 puis 8, 3, 10, 5, 12.

Pour p = 4, le graphe se scinde en 4 graphes disjoints



Il restera une case vide pour chacun des 4 graphes, soit 4 cases vides.

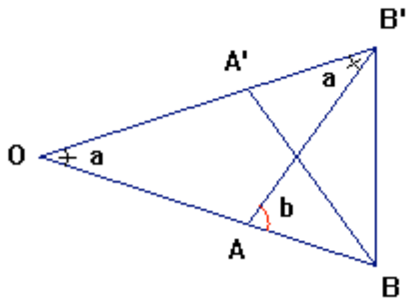
Soit p compris entre 1 et 6 (12 – p donne le même résultat car cela inverse simplement le sens) :
Pour p = 1, on place les 11 pions

Pour p = 2, 2 graphes disjoints donc 2 cases vides.
Pour p = 3, 3 graphes disjoints donc 3 cases vides.
Pour p = 6, 6 graphes disjoints donc 6 cases vides.

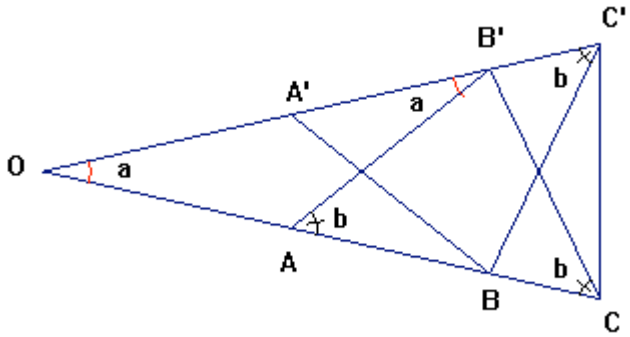
En conclusion, on place les 11 pions pour p = 1, p = 5, p = 7, p = 11.

Généralisation : n cases et on avance de p cases, si d est le plus grand diviseur commun à n et p, il y a d graphes disjoints donc d cases vides. On place donc les (n – 1) pions si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

Les allumettes ➔ **seconde, première, terminale.**



5 allumettes



7 allumettes

Pour 5 allumettes :

Le triangle OAB' est isocèle donc b = 2a ; le triangle AB'B est isocèle donc ABB' = b ; dans le triangle isocèle OBB', $\pi = a + 2b = 5a$, donc $a = \pi / 5$ ou 36°

Pour 7 allumettes :

Soit b = B'AC, le triangle OAB' est isocèle donc b = 2a ; le triangle ABC' est isocèle donc ACB' = b et par symétrie OC'B =b, d'où CBC' = a + b = 3a et comme le triangle BCC' est isocèle, BCC' = 3a et dans le triangle isocèle OCC', $\pi = a + 6a = 7a$ donc $a = \pi / 7$

Généralisation : avec 2n + 1 allumettes on arrive à $\pi = (2n + 1)\, a$

A la queue leu leu ! ➔ **première, terminale.**

La somme de deux entiers consécutifs peut s'écrire : n + (n + 1) = 2n + 1, les nombres pouvant ainsi s'écrire sont tous les nombres impairs.

Parmi les entiers inférieurs ou égaux à 20, peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs tous les nombres impairs ainsi que :
1 + 2 + 3 = 6,   2 + 3 + 4 = 9,   3 + 4 + 5 = 12,   4 + 5 + 6 = 15,   5 + 6 + 7 = 18

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, $3 + 4 + 5 + 6 = 18$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$
On constate que seuls les nombres 0, 2, 4, 8, 16 ne figurent pas dans la liste ci-dessus.

Nous allons montrer que, plus généralement, les nombres entiers de la forme 2^k, $k \geq 1$, sont les seuls avec 0, qui ne peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.
Soit S une somme d'entiers consécutifs :
$S = x + (x + 1) + \dots\dots\dots + (x + n - 1)$ avec ($x \geq 1$, $n \geq 2$), on a : $S = nx + \frac{n(n-1)}{2}$
1^er^ cas : $n = 2p$ ($p \geq 1$) ; $S = p \times [2 (x + p) - 1]$ avec $[2 (x + p) - 1]$ nombre impair supérieur ou égal à 3.
2^ème^ cas : $n = 2p + 1$ ($p \geq 1$) ; $S = (2p + 1) (x + p)$ avec $2p + 1$ nombre impair supérieur ou égal à 3.
S est donc toujours divisible par un nombre impair supérieur ou égal à 3, il n'est donc pas possible d'obtenir un nombre de la forme 2^k, $k \geq 1$. **2^k ne peut pas s'écrire comme somme d'au moins deux entiers consécutifs**

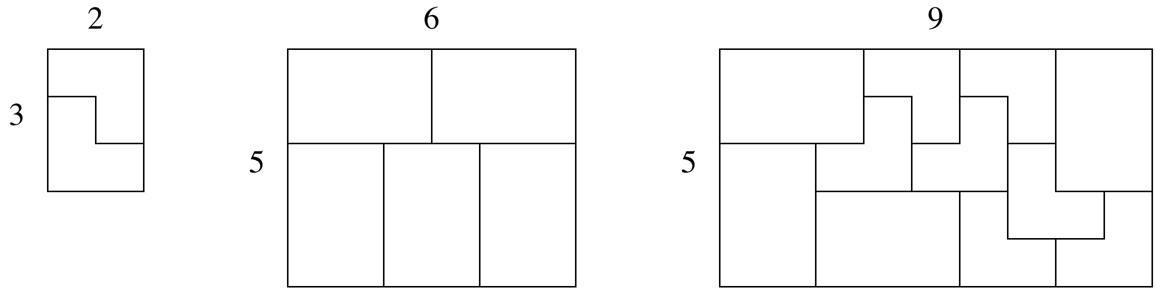
En revanche, soit N un nombre qui n'est pas de la forme 2^k, alors $N = 2^k \times (2m + 1)$ avec $m \geq 1$, on peut avoir S = N en choisissant :
Dans le 1^er^ cas , $p = 2^k$, $n = 2p$, $x + p = m + 1$ c'est à dire $x = m + 1 - 2^k$ (c'est possible si $x \geq 1$ c'est à dire $m \geq 2^k$)
Dans le 2^ème^ cas, $p = m$, $n = 2p + 1$, $x + p = 2^k$ c'est à dire $x = 2^k - m$ (c'est possible si $x \geq 1$ c'est à dire $m \leq 2^k - 1$).
On peut donc toujours écrire, pour $m \geq 1$ et $N = 2^k \times (2m + 1)$, N comme somme d'au moins deux entiers consécutifs.

Triminos coudés ➔ **première, terminale.**

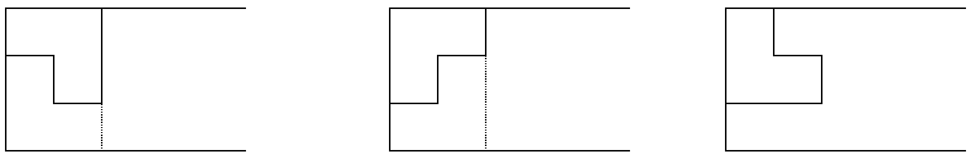
Un rectangle pavable a une aire multiple de 3, donc au moins un côté multiple de 3.
Un rectangle 4×4 n'est pas pavable car 16 n'est pas un multiple de 3.

• En faisant des essais , on n'arrive pas à paver un rectangle 5×3 (ce qui ne prouve pas que c'est impossible)

• Les rectangles 3×2 , 6×5 et 9×5 sont pavables, par exemple :



• Plus généralement, si un rectangle a un côté de longueur 3, il y a 3 façons de recouvrir la case en haut à gauche :



(1) (2) (3)

(1) et (2) peuvent conduire aux rectangles 3×2 ; (3) est sans issue.

Pour paver un rectangle $3 \times n$ on est amené à paver successivement des rectangles 3×2 ; en diminuant de 2 le deuxième côté du rectangle, plusieurs fois, on peut se ramener à un rectangle 3×2 ou à un rectangle 3×1, on voit donc que si la longueur de ce côté est paire, on peut paver et si elle est impaire, on ne peut pas. Un rectangle 5×3 n'est donc pas pavable.

• Les rectangles 6×2 et 6×3 sont pavables (voir le pavage d'un rectangles 6×5), donc tous les rectangles $6 \times n$, pour $n \geq 2$ sont pavables (**n peut s'écrire 2u + 3v avec u et v entiers naturels** *) ainsi que les rectangles $6k \times n$ (juxtaposition de k rectangles $6 \times n$).

• Un rectangle 9×2 est pavable (par des rectangles 2×3), un rectangle 9×5 aussi, donc tous les rectangles $9 \times n$ pour $n \geq 4$ sont pavables (**n peut s'écrire 2u + 5v avec u et v entiers naturels** **), ainsi qu'un rectangle $9k \times n$.

• Tout entier p multiple de 3, supérieur ou égal à 6, peut s'écrire 6k s'il est pair, 6k + 9 s'il est impair , donc les rectangles $p \times n$ sont pavables.

En conclusion, tous les rectangles d'aire multiple de 3 sont pavables, sauf les rectangles dont un côté est égal à 1, et les rectangles dont un côté vaut 3, l'autre étant impair.

* pour $n \geq 2$, n peut s'écrire $2u + 3v$ en effet : c'est évident pour 2 et tous les entiers pairs ;
pour n impair, $n = 2q + 1$ avec $q \geq 1$, $n = 2q + 3 - 2 = 2 (q - 1) + 3$ et $q - 1$ est positif ou nul.

** pour $n \geq 4$, n peut s'écrire $2u + 5v$ en effet : c'est évident pour 2 et tous les entiers pairs ;
pour n impair, $n = 2q + 1$ avec $q \geq 2$, $n = 2q + 5 - 4 = 2 (q - 2) + 5$ et $q - 2$ est positif ou nul.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

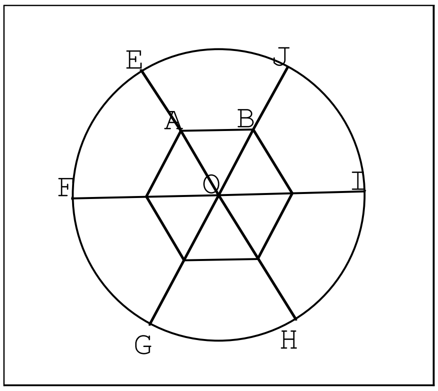
LIMOUSIN

2000

Les corrigés LYCÉE

L'artiste et ses toiles

Première toile

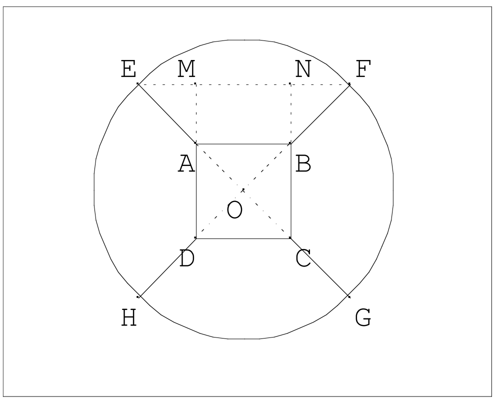


D'après les propriétés d'un hexagone régulier, ABO est équilatéral donc : AB = AO, or AB = AE donc A est le milieu de [EO].

On construit d'abord un hexagone régulier dont les sommets sont sur le cercle. E étant l'un de ces sommets, on construit le milieu A de [EO] puis le cercle de centre O et de rayon OA, et enfin un hexagone de centre O dont A est un sommet.

Réciproquement, supposons A milieu de [EO]., EA=AO, or AO=AB donc EA=AB

Deuxième toile



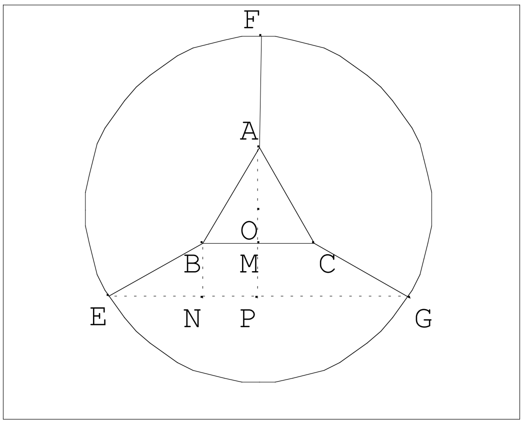
Complétons le dessin comme indiqué ci-contre :
Les triangles rectangles isocèles MEA, NBF, AOB sont superposables. donc EC = EA + AO + OC,

EC = MN + EM + NF = EF

On construit deux diamètres perpendiculaires EG et HF, la propriété EC = EF permet de construire C puis le cercle de centre O et de rayon OC on complète alors le carré ABCD.

Réciproquement, supposons EC=EF,
EA + 2 AO = MN + 2 EM
EA + $\sqrt{2}$ AB = AB + $\sqrt{2}$ EA
EA (1 - $\sqrt{2}$) = AB (1 - $\sqrt{2}$)
EA = AB

Troisième toile



Considérons le dessin ci-contre :
ABM et EBN sont deux triangles semi-équilatéraux superposables.
EP = EN + NP
EP = AM +MP

EP = AP

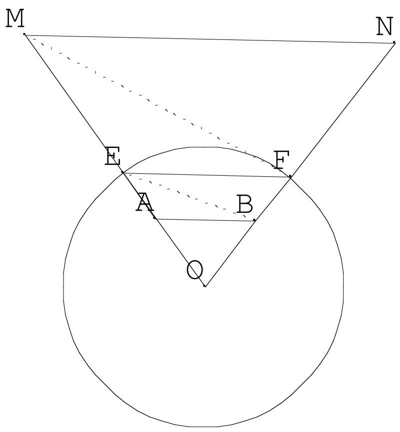
Construisons d'abord un triangle équilatéral EFG, les rayons [OE], [OF], [OG].
Soit P le milieu de [EG], la propriété EP = AP permet de construire A puis le cercle de centre O et de rayon OA et enfin les points B et C.

Réciproquement, supposons EP = AP,
EN + NP = AM + MP
EN + BM = AM + BN

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ EB + $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ EB

EB $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ = AB $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

EB = AB



Chacune des constructions précédentes est adaptée au nombre de côtés du polygone situé au centre de la toile.
Voici maintenant une construction valable dans tous les cas : soit un polygone de n sommets dont [EF] est l'un des côtés, on veut construire A et B tels que EA = AB = BF ; plaçons M et N sur les droites (OE) et (OF) avec ME = EF = FN ; la figure formée par le triangle OEF et le segment [AB] est l'image de la figure formée par le triangle OMN et le segment [EF] par l'homothétie de centre O qui transforme M en E ; les droites (MF) et (EB) sont donc parallèles ; ayant construit M et N , on peut ainsi construire A et B.

Des cartes , mais pas trop

Dix cartes sont numérotées de 1 à 10.
Parmi les produits de deux nombres distincts portés par ces cartes, sont des carrés :
1×4, 1×9, 2×8, 4×9.

Les cartes sont posées sur la table faces cachées.
Si Céline retourne par exemple 1, 3, 5, 6 elle ne peut former aucun produit de deux de ces nombres qui soit un carré.
Si Michaël retourne par exemple 1, 4, 5, il peut former un carré : 1×4 est un carré.

Les nombres 3, 5, 6, 7, 10 ne peuvent être associés à aucun autre pour former un carré, donc si on retourne un nombre de cartes inférieur ou égal à cinq, il se peut que les cartes retournées soient toutes dans cette liste et on ne peut former aucun carré.
Il faut donc retourner au moins deux cartes de plus et ces cartes doivent pouvoir former un carré.

Si on retourne sept cartes, on peut obtenir 3, 5, 6, 7, 10, 1, 2 par exemple et on ne peut former aucun carré, on n'est donc pas sûr d'obtenir au moins un carré.

Si on retourne huit cartes, on aura au pire 3, 5, 6, 7, 10 et au moins une des combinaisons suivantes :
$\{1, 2, 4\}$ $\{1, 2, 8\}$ $\{1, 2, 9\}$ $\{1, 4, 8\}$ $\{1, 4, 9\}$ $\{1, 8\ 9\}$ $\{2, 4, 8\}$ $\{2, 4\ 9\}$ $\{2, 8, 9\}$ $\{4, 8, 9\}$.
Dans chacun des cas on peut former au moins un carré.

Pour être sûr d'obtenir au moins un carré, il faut retourner au moins huit cartes.

Finissons bien le millénaire

On veut trouver deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ de nombres entiers strictement positifs, telles que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{1999}{2000}$ c'est à dire telles que $\frac{ad + bc}{bd} = \frac{1999}{2000}$. Remarquons d'abord que ces deux fractions sont inférieures à 1, par conséquent b et d sont différents de 1.

Est-ce possible avec b = 2 et d = 1000 ?
On obtient la fraction demandée si et seulement si : 1000 a + 2c = 1999.
Cette égalité n'est pas possible car 1000 a + 2c est pair alors que 1999 est impair.

Essayons d'autres dénominateurs dont le produit est 2000, et pour cela, écrivons d'abord tous les produits de deux entiers différents de 1, égaux à 2000 ; ($2000 = 2^4 \times 5^3$).
.
$2000 = 2 \times 1000 = 4 \times 500 = 5 \times 400 = 8 \times 250 = 10 \times 200 = 16 \times 125 = 20 \times 100 = 25 \times 80 = 40 \times 50$.
Le premier produit a été étudié ci-dessus et ne donne pas de solution ; pour les mêmes raisons, les produits 4×500, 8×250, 10×200, 20×100 et 40×50 ne donnent pas de solution ; avec b = 5 et d = 400, on aurait l'égalité 400a + 5c = 1999, cette égalité n'est pas possible car, 400a + 5c est divisible par 5 alors que 1999 ne l'est pas, pour la même raison, on rejette le produit 25×80.

Donc $b = 2^4 = 16$ et $d = 5^3 = 125$ ou l'inverse.

On doit maintenant trouver a et c tels que : 125 a + 16 c = 1999, c'est à dire : 16 c = 1999 – 125 a.
On essaie les valeurs successives de a : 1, 2, 3, …et on regarde si 1999 – 125 a est divisible par 16.
On trouve une seule solution a = 11, c = 39.

$$\frac{11}{16} + \frac{39}{125} = \frac{1999}{2000}$$

Fête des sommes

Voilà des égalités fournies par le texte /

4 + 5 + 6 = 7 + 8
9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15
On pourrait rajouter 1 + 2 = 3.

Ces égalités sont formées d'entiers successifs et elles ont un entier de plus à gauche qu'à droite.
Peut-on en trouver d'autres ?
Montrons d'abord comment on peut calculer la somme S de p entiers successifs :
$S = x + (x+1) + (x+2) + \cdots + y$ (le nombre d'entiers est : $p = y - x + 1$)
On a écrit S deux fois en inversant l'ordre des termes :
$S = x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (y-1) + y$
$S = y + (y-1) + (y-2) + \cdots + (x+1) + x$
2 S est la somme de p termes tous égaux à (x + y) donc $2S = p \times (x+y)$ d'où : $S = \frac{p(x+y)}{2}$.
Appelons x le premier nombre écrit, p le nombre de termes à gauche du signe « = » avec $p \geq 2$.

$$x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+p-1) = (x+p) + \cdots + (x+p+p-2)$$

La formule démontrée ci-dessus donne :
$$p\ \frac{2x+p-1}{2} = (p-1)\ \frac{2x+3p-2}{2}$$
En développant et simplifiant, on obtient : $x = p^2 - 2p + 1$.

On voit que c'est possible avec toute valeur de p supérieure ou égale à 2.
Pour p = 2, x = 1 — 1 + 2 = 3
Pour p = 3, x = 4 — 4 + 5 + 6 = 7 + 8
Pour p = 4, x = 9 — 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15
Pour p = 5, x = 16 — 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24
Etc…
On peut remarquer que le dernier nombre écrit pour une valeur p est $p^2 - 1$, et que le premier nombre écrit pour la valeur p + 1 est p^2.

Si maintenant on veut n entiers de plus à gauche qu'à droite :

$$x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+p-1) = (x+p) + \cdots + (x+p+p-n-1)$$

$p\ \frac{2x+p-1}{2} = (p-n)\ \frac{2x+3p-n-1}{2}$

En développant et simplifiant, on obtient : $2n\,x = 2p^2 - 4np + n^2 + n$,

soit encore : $nx = p^2 - 2np + \frac{n(n+1)}{2}$

Pour $n = 2$, $2x = p^2 - 4p + 3$, on peut trouver x uniquement pour toute valeur de p impaire et supérieure à 3 par exemple :

$p = 3$, $x = 0$, $0 + 1 + 2 = 3$

$p = 5$, $x = 4$, $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11$

$p = 7$, $x = 12$, $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 19 + 20 + 21 + 22 + 23$

Etc…

Pour $n = 3$, $3x = p^2 - 6p + 6$, on peut trouver x uniquement pour toute valeur de p multiple de 3 et supérieure à 4 par exemple :

$p = 6$, $x = 2$, $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10$

$p = 9$, $x = 11$, $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25$.

Pour $n = 4$, $4\,x = p^2 - 8\,p + 10$, $p^2 + 10$ doit donc être divisible par 4 ; si p est pair, $p = 2q$, $p^2 + 10 = 4q^2 + 10$ et ce nombre n'est jamais divisible par 4 ; si p est impair, $p^2 + 10$ est impair donc n'est pas divisible par 4. Pour $n = 4$, le problème n'a pas de solution.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2001

Les corrigés LYCÉE

Grand Rallye Pédestre du Limousin

Soit n le nombre de concurrents engagés dans une catégorie et soit p le numéro du dossard de Claude (respectivement Dominique).

Somme des numéros des dossards plus petits que p : $1 + 2 + 3 + \ldots + (p - 1) = \frac{p(p-1)}{2}$

Somme des numéros des dossards plus grands que p : $(p + 1) + (p + 2) + \ldots\ldots + n$ c'est à dire : $(n - p) \times \frac{p+1+n}{2}$

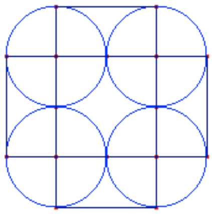
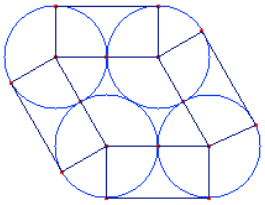
En écrivant l'égalité et en simplifiant on trouve : $p^2 = \frac{n(n+1)}{2}$

On obtient les solutions par essais successifs : on donne à n les valeurs 1 , 2, 3, ... et on regarde si $\frac{n(n+1)}{2}$ est le carré d'un entier.

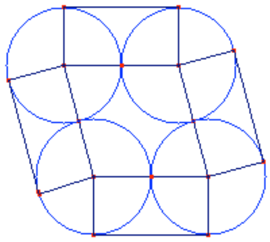
Dans la catégorie cadet, il y a moins de 12 engagés, on trouve une solution n = 8 et p = 6.
Dans la catégorie junior, n est plus grand mais inférieur à 100, en continuant à examiner les valeurs successives de n on trouve une seule autre solution n = 49 et p = 35.

Gare à l'élastique !

L'élastique qui enserre les quatre tubes cylindriques de même rayon r prend la forme de quatre arcs de cercles séparés par des segments tangents aux disques.
Dans la disposition en « carré », on obtient 4 quarts de cercles et 4 segments dont la longueur est la distance des centres des disques. La longueur de l'élastique est donc : $2\pi r + 8r$.
Dans la disposition en « parallélogramme », on obtient 2 arcs de cercle correspondant à un angle au centre de 120 degrés, 2 arcs de cercle correspondant à un angle au centre de 60 degrés soit un total de 360 degrés et 4 segments de longueur 2 r comme précédemment. La longueur totale est la même.

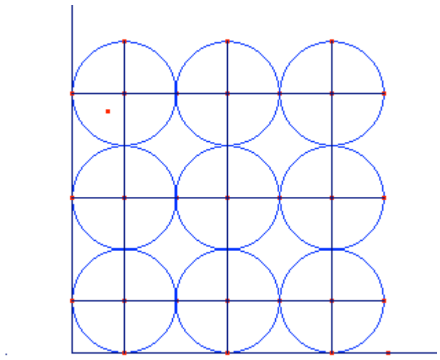
Quand on passe de la première à la deuxième disposition, la longueur de l'élastique reste constante : on obtient 2 arcs de cercle correspondant à un angle au centre de a°, 2 arcs avec un angle au centre de 180° – a° et toujours 4 segments de longueur 2r.



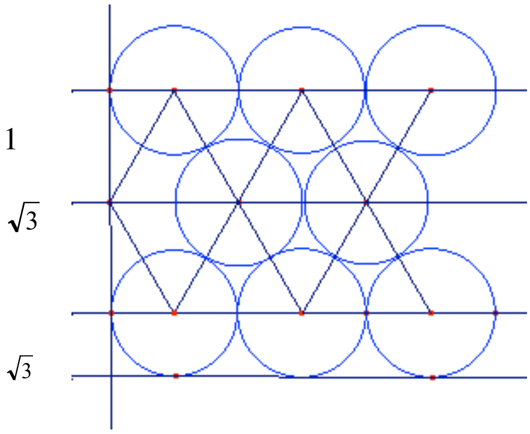
Serrez les rangs !

Carré de 22 cm de côté

Il est facile de placer 121 pièces de rayon 1 cm en faisant 11 rangées de 11 pièces (dessin 1).



Mais on peut faire mieux en « tassant » ; on place alternativement une rangée de 11 pièces, puis une rangée de 10 pièces, …(dessin 2).



Pour chaque nouvelle rangée, la hauteur augmente de $\sqrt{3}$; si on a placé n rangées la hauteur atteinte est : $2 + (n - 1)\sqrt{3}$.
On veut : $2 + (n - 1)\sqrt{3} \leq 22$ c'est à dire $n \leq 12$.
Pour n = 12 la hauteur atteinte est : $(2 + 11 \sqrt{3})$ soit environ 21, 05 cm, on a terminé par une rangée courte et on ne peut pas mettre ainsi une rangée supplémentaire.
On a placé $6 \times 11 + 6 \times 10$ pièces, soit **126 pièces**.

Si on remplace la dernière rangée courte par une longue, la hauteur augmente de $2 - \sqrt{3}$ et si on remplace l'avant dernière rangée courte par une rangée longue, la hauteur augmente encore de $2 \times (2 - \sqrt{3})$; on a atteint une hauteur de $(2 + 11 \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + 2 \times (2 - \sqrt{3})$ soit environ 21,85 cm et on ne peut pas faire mieux ; on a placé 8 rangées de 11 pièces et 4 rangées de 10 pièces, on a donc placé **128 pièces**.

Généralisation : Rectangle de 2a cm sur 2b cm

On place alternativement n rangées de b et b–1 pièces de sorte que la hauteur H atteinte soit la plus grande possible mais inférieure à 2a.
$H = 2 + (n - 1)\sqrt{3}$ et $H \leq 2a$
Hauteur encore disponible : $h = 2a - H = 2a - 2 - (n - 1) \sqrt{3}$
On calcule $h / (2 - \sqrt{3})$ pour savoir combien de rangées courtes peuvent être remplacées par une longue.

Rectangle de 26 cm sur 28 cm ; a = 13, b = 14

On obtient : $n \leq 14$; pour n = 14, on a 7 rangées longues et 7 courtes, la dernière est courte. $h = 24 - 13 \sqrt{3}$; $h / (2 - \sqrt{3}) = 5{,}5$; on peut remplacer 3 rangées courtes (dont la dernière) par 3 rangées longues ; on a alors (7 + 3) rangées de 14 pièces et (7 – 3) rangées de 13 pièces. On a placé $10 \times 14 + 4 \times 13 =$ **192 pièces**.

Rectangle de 26 cm sur 28 cm ; a = 14, b = 13

On obtient : $n \leq 16$; pour n = 16, on a 8 rangées longues et 8 courtes.
$h = 26 - 15 \sqrt{3}$; $h / (2 - \sqrt{3}) = 0{,}07$; on peut rien faire de mieux . On a placé
$8 \times 13 + 8 \times 12 =$ **200 pièces**.

Rectangle de 80 cm sur 88 cm ; a = 44, b = 40

On obtient : $n \leq 50$; pour n = 50, on a 25 rangées longues et 25 courtes.

$h = 86 - 49\sqrt{3}$; $h / (2 - \sqrt{3}) = 4{,}21$; on peut remplacer 2 rangées courtes par 2 rangées longues ; on a alors (25 + 2) rangées de 40 pièces et (25 – 2) rangées de 39 pièces. On a placé $27 \times 40 + 23 \times 39 =$ **1977 pièces**.

Rectangle de 80 cm sur 88 cm ; a = 40, b = 44

On obtient : $n \leq 46$; pour n = 46, on a 23 rangées longues et 23 courtes.

$h = 78 - 45\sqrt{3}$; $h / (2 - \sqrt{3}) = 0{,}21$; on ne peut rien faire de mieux ; on a alors 23 rangées de 44 pièces et 23 rangées de 43 pièces.

On a placé $23 \times 44 + 23 \times 43 =$ **2001 pièces**.

Piles d'assiettes

Notons a, b, c, les nombres d'assiettes dans les trois piles, avec $a < b < c$.
On a : $b \leq c - 1$ et $a \leq b - 1$ donc : $a \leq c - 2$.
Donc : $a + b + c \leq (c - 2) + (c - 1) + c$, c'est à dire : $2001 \leq 3c - 3$
On en déduit : **$c \geq 668$**.
On réalise ce minimum en prenant a = 666, b = 667, c = 668.

Avec 5 piles d'effectifs a, b, c, d, e et $a < b < c < d < e$, on a :
$a + b + c + d + e \leq (e - 4) + (e - 3) + (e - 2) + (e - 1) + e$
$2001 \leq 5e - 10$, donc : $e \geq 2011 / 5$, $e \geq 402{,}2$ donc : **$e \geq 403$**
D'autre part, $a + b + c + d + e \leq (d - 3) + (d - 2) + (d - 1) + d + e$
d'où : $2001 \leq 4(d + e) - 6 - 3e$, d'où : $4(d + e) \geq 2007 + 3e \geq 2007 + 1209$
on en déduit : **$d + e \geq 804$**
Réalisation : a = 398, b = 399, c = 400, d = 401, e = 403

Avec N assiettes réparties en 5 piles, on montre comme précédemment
$N \geq 5e - 10$, soit $e \geq 2 + N/5$ et $4(d + e) \geq N + 6 + 3e$; posons $N = 5q + r$ avec $0 \leq r \leq 4$

r	0	1	2	3	4
$e \geq$	$q + 2$	$q + 3$	$q + 3$	$q + 3$	$q + 3$
$d + e \geq$	$2q + 3$	$2q + 4$	$2q + 5$	$2q + 5$	$2q + 5$

On a maintenant N assiettes réparties en n piles d'effectifs strictement croissants $x_1, x_2, \ldots x_n$, on réunit les p plus gros tas.
Posons $y_i = x_i - i$ on a : $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$
Soit $N' = N - (1+2+\ldots+n)$ et $N' = nq + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$
Le minimum de la somme des y_i associés aux p plus gros tas est obtenu pour la suite :
q, q, q…q, q+1, q+1…… ,q+1 (r fois q + 1) et vaut : $\min(r, p) + q \times p$
Le minimum de la somme des effectifs des p plus gros tas est donc :
$$\min(r, p) + q \times p + p \times \frac{n + n - p + 1}{2}$$

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

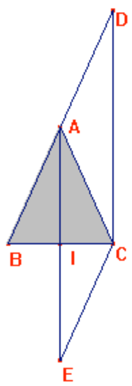
2002

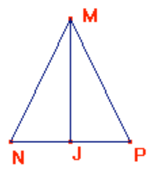
Les corrigés LYCÉE

13 … Très isocèles

ABC est un triangle isocèle de côtés 13, 13 et 10 cm (en grisé sur la figure) ; I est le milieu de [BC], le théorème de Pythagore, appliqué au triangle ABI, donne : $AB^2 = AI^2 + IB^2$, on en déduit $AI^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = 12^2$ donc AI = 12. Le triangle ABC a pour aire 60 cm^2

On veut construire un autre triangle isocèle, de même aire, non superposable au précédent, dont deux côtés ont pour longueur 13 cm.





Par exemple, en prenant le symétrique D de B par rapport à A ; le triangle ACD est tel que AD = AC = 13 cm, CD = 2 AI = 24 cm ; ACD est formé de deux triangles isométriques à AIC, il a la même aire que ABC.

Autre construction, on prend le symétrique E de A par rapport à I, le triangle ACE vérifie les conditions demandées.

Les deux triangles construits ont pour côtés 13, 13 et 24 cm.

A-t-on d'autres possibilités ?

Soit un triangle isocèle MNP de côtés MN = MP = 13cm, NP = 2x cm, soit J le milieu de NP, $MJ^2 = h^2 = 13^2 - x^2$.

L'aire de ce triangle vaut : $\frac{1}{2} \times 2x \times h = \frac{1}{2} \times 2x \times \sqrt{13^2 - x^2}$

MNP a pour aire 60 cm^2 si et seulement si : $3600 = x^2 (13^2 - x^2)$ c'est à dire :

$x^4 - 169x^2 - 3600 = 0$, ou encore $(x^2 - 25)(x^2 - 144) = 0$.

Les seules solutions sont x = 5, x = 12.

Plus généralement, étant donné un triangle ABC de côtés a, b et c, d'angle en A noté α, et un triangle AB'C de côtés x, b et c, d'angle en A noté α', ces triangles ont la même aire lorsque :
$\frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \alpha = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \alpha'$, c'est à dire $\sin \alpha = \sin \alpha'$ ou encore $\alpha' = 180° - \alpha$ (car sinon, les triangles sont superposables).
Les points B, A et B' sont alors alignés et A est le milieu de [BB'].
Le théorème de la médiane, appliqué au triangle CBB', donne :
$CB^2 + CB'^2 = 2\ CA^2 + (1/2)\ BB'^2$, c'est à dire $a^2 + x^2 = 2\ b^2 + (1/2)\ 4\ c^2$
d'où on déduit : $x^2 = 2\ b^2 + 2\ c^2 - a^2$.
Si $b^2 + c^2 \neq a^2$, c'est à dire si le triangle ABC n'est pas rectangle en A, x est différent de a.

Dominos dominés

Voici tous les dominos qu'on peut former avec les nombres 0,1 et 2 :
(0, 0) (0, 1) (0, 2) (1, 1) (1, 2) (2, 2)

Voici une chaîne commençant et finissant par 0 :
(0, 0) (0, 1) (1, 1) (1, 2) (2, 2) (2, 0)

Dans ces dominos, chaque chiffre figure 4 fois ; à « l'intérieur » d'une chaîne, un chiffre est écrit deux fois de suite, donc un nombre pair de fois, si une chaîne commence par 0, elle doit aussi finir par 0.
Il n'est pas possible de former une chaîne commençant par 0 et finissant par 2.

Voici les dominos qu'on peut former avec les nombres 0, 1, 2, et 3 :
(0, 0) (0, 1) (0, 2) (0, 3) (1, 1) (1, 2) (1, 3) (2, 2) (2, 3) (3, 3)

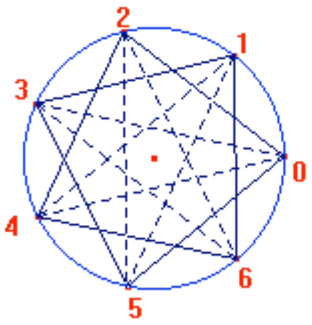
Si une chaîne commence et finit par 0, il reste trois 0 à l'intérieur de la chaîne, ce n'est pas possible, comme expliqué ci-dessus.
Il n'est pas possible de former une chaîne commençant par 0 et finissant par 0.

Si une chaîne commence par 0 et finit par 3, le même problème que précédemment se pose pour le chiffre 1 par exemple qui figure en tout 5 fois.
Il n'est pas possible de former une chaîne commençant par 0 et finissant par 3.

Un stratégie pour constituer une chaîne commençant par 0 et finissant par 0 dans le cas d'un jeu de 28 dominos :

On place les nombres de 0 à 6 sur un cercle :

Les dominos de la chaîne sont obtenus en prenant deux nombres successifs sur le cercle, puis de 2 en 2 (traits pleins), puis de 3 en 3 (traits pointillés):
(0, 1) (1, 2) (2, 3) (3, 4) (4, 5) (5, 6) (6, 0)
(0, 2) (2, 4) (4, 6) (6, 1) (1, 3) (3, 5) (5, 0)
(0, 3) (3, 6) (6, 2) (2, 5) (5, 1) (1, 4) (4, 0)
Les dominos écrits sont tous distincts, il y en a 21, il est facile de compléter en insérant les 7 « doubles ».



Pour des dominos portant les nombres de 0 à n, chaque nombre est associé à chacun des n autres nombres donc figure n + 2 fois, en comptant le « double » portant ce nombre.
Si n est impair on ne peut pas constituer une chaîne utilisant tous les dominos .

Si n est pair, une chaîne commençant par 0 doit nécessairement finir par 0.
Ayant constitué une chaîne pour la valeur n, pour constituer une chaîne pour la valeur n + 2, on doit ajouter, outre 2 doubles, les dominos :
(0, n + 1), (0, n + 2) (n + 1, n + 2)
(1, n + 1), (2, n + 1), (1, n + 2), (2, n + 2),
(3, n + 1), (4, n + 1), (3, n + 2), (4, n + 2),
…..
(n - 1, n + 1), (n, n + 1), (n - 1, n + 2), (n, n + 2)

Avec le premier groupe de 3 dominos puis avec chaque groupe de 4 dominos qui suivent, on peut constituer des mini-chaînes commençant et finissant respectivement par 0, 1, 3, ….n – 1 ; il est alors facile d'intercaler ces mini-chaînes dans la chaîne associée à la valeur n.
Partant d'une chaîne pour n = 2, on peut, de proche en proche, constituer des chaînes pour n'importe quelle valeur paire de n.

Voici une autre méthode pour les dominos portant les nombres de 0 à 6 :

(0,0) — (0,1)   (0,2) — (0,3)   (0,4) — (0,5)   (0,6)
(1,1) — (1,2)   (1,3) — (1,4)   (1,5) — (1,6)
(2,2)   (2,3) — (2,4)   (2,5) — (2,6)
(3,3) — (3,4)   (3,5) — (3,6)
(4,4)   (4,5) — (4,6)
(5,5) — (5,6)
(6,6)

Cette méthode peut se généraliser et permet de passer d'une chaîne, pour des dominos portant les nombres de 0 à n, à une chaîne, pour des dominos portant les nombres de 0 à n+2.

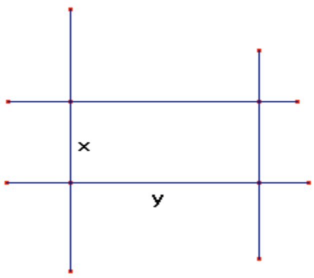
Mémoires vives

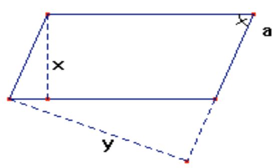
Dans chaque partie du jeu, le vainqueur gagne a points (a entier positif) et son adversaire perd b points (b entier positif). Désignons par x le nombre de parties gagnées par Rémi et donc perdues par Marcel, et par y le nombre de parties perdues par Rémi et donc gagnées par Marcel.
Rémi obtient (a x – b y) points et Marcel obtient (a y – b x) points. On sait que Rémi a battu Marcel par 10 points contre 3 donc : $a x - b y = 10$ et $a y - b x = 3$.
En additionnant et en retranchant ces deux égalités, on obtient :
$(a - b)(x + y) = 13$ et $(a + b)(x - y) = 7$.
(a + b) est un diviseur positif de 7 et (a – b) est un diviseur positif de 13 car x + y est positif ; (a + b) est donc égal à 1 ou 7 et (a – b) est égal à 1 ou 13 ;
de plus (a + b) est supérieur strictement à (a – b) ; donc $(a + b) = 7$ et $(a - b) = 1$; $2a = 8$ et $2b = 6$; $a = 4$ et $b = 3$.
Pour $a = 4$ et $b = 3$, on obtient $(x + y) = 13$ et $(x - y) = 1$, $x = 7$ et $y = 6$.
Rémi a gagné 7 parties et perdu 6 parties.

A chaque partie, on peut gagner 4 points ou perdre 3 points.

Bandes originales

Notons x et y les largeurs des deux bandes de papier (x et y sont des nombres entiers différents).
Lorsqu'on croise perpendiculairement ces bandes de papier, en les posant sur une table,
la partie commune est un rectangle de côtés x et y ; l'aire en cm^2 est donc x y et le périmètre en cm est $2(x + y)$ et on constate que $x y = 2(x + y)$, égalité qu'on peut écrire sous la forme :
$(x-2)(y-2) = 4 \Rightarrow x = 3, y = 6$..
Les largeurs des deux bandes en cm sont donc 3 et 6.





Reprenons le problème en croisant les deux bandes d'une autre façon.
Désignons par a l'un des angles formés par deux bords des bandes de papier. La partie commune est un parallélogramme de côtés $\frac{x}{\sin a}$ et $\frac{y}{\sin a}$; l'égalité de l'aire et du périmètre se traduit par : $2\left(\frac{x}{\sin a} + \frac{y}{\sin a}\right) = x \times \frac{y}{\sin a}$ soit, en simplifiant, $2(x + y) = x y$; on retrouve la même équation que dans le cas précédent.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2003

Les corrigés LYCÉE

X face à 10 ➔ **secondes, premières et terminales**

Si x = 2, la personne portant le numéro 2 est en face de la personne portant le numéro 10 ; entre ces deux personnes il y a, de part et d'autre, 7 personnes, donc au total 7 + 7 + 2 personnes soit 16 personnes en tout.

Si x = 25, la personne portant le numéro 25 est en face de la personne portant le numéro 10 ; entre ces deux personnes il y a, de part et d'autre, 14 personnes, donc au total 14 + 14 + 2 personnes soit 30 personnes en tout.

Si $x < 10$, la personne portant le numéro x est en face de la personne portant le numéro 10 ; entre ces deux personnes il y a, de part et d'autre, $10 - x - 1$ personnes, donc au total $2 (10 - x - 1) + 2$ personnes soit $20 - 2x$ personnes en tout ; et de plus $20 - 2x \geq 10$ car le nombre n de personnes est supérieur ou égal à 10. On a donc $x \leq 5$.

Si $x > 10$, la personne portant le numéro x est en face de la personne portant le numéro 10 ; entre ces deux personnes il y a, de part et d'autre, $x - 10 - 1$ personnes, donc au total $2 (x - 10 - 1) + 2$ personnes soit $2x - 20$ personnes en tout ; et de plus $2x - 20 \geq x$ car le nombre n de personnes est supérieur ou égal à x. On a donc $x \geq 20$.

On peut remplacer x par tout entier non nul tel que $x \leq 5$ ou $x \geq 20$.

Plus ou moins carré ➔ **secondes, premières et terminales**

Il est facile de vérifier que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 = 2$ et que $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 4$
On a aussi $1^2 + 2^2 = 5$ et $1^2 - 2^2 + 3^2 = 6$ et $1^2 - 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 = 11$
On cherche à écrire 2003 en partant de 1^2 et en ajoutant ou retranchant les carrés d'entiers consécutifs et ceci avec le minimum de carrés.
On peut remarquer que si dans la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, on remplace certains signes « + » par des signes « – », on obtient un nombre inférieur. De plus, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 17^2 = 1785$ donc

2003 s'écrit avec plus de 17 carrés ; on a aussi $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 18^2 = 2109$, on cherche donc si 2003 peut s'obtenir en remplaçant dans cette dernière somme certains signe « + » par des signes « – ».
Si on remplace 2^2 par -2^2 et 7^2 par -7^2 la somme diminue de $2 \times 4 + 2 \times 49 = 106$;
or $2109 - 106 = 2003$
Donc $2003 = 1^2 - 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2$.

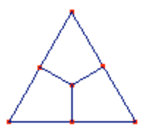
On montre en développant que : $x^2 - (x+1)^2 - (x+2)^2 + (x+3)^2 = 4$ pour x entier quelconque.

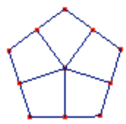
Donc si n peut s'écrire avec k carrés, le dernier carré écrit est k^2, n + 4 peut alors s'écrire :
$n + 4 = n + (k+1)^2 - (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2$, il est écrit avec k + 4 carrés.

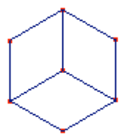
4 s'écrit avec 4 carrés donc 8 peut s'écrire avec 8 carrés ; 5 s'écrit avec 2 carrés donc 9 peut s'écrire avec 6 carrés ; 6 s'écrit avec 3 carrés donc 10 peut s'écrire avec 7 carrés.
Si n est l'un des nombres 8, 9, 10, 11 alors n peut s'écrire avec au maximum n carrés. En ajoutant 4 éventuellement plusieurs fois à ces entiers, on peut obtenir tout autre entier supérieur, et d'après ce qui précède, tout entier n (n > 7) peut s'écrire avec au maximum n carrés.

Il faut savoir partager ➔ secondes, premières et terminales

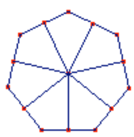
1) Partages de polygones réguliers en quadrilatères superposables par glissement.

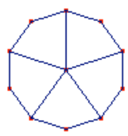

n=3


n=5


n=6

Pour un polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$), on construit un partage en n quadrilatères superposables sans retournement en joignant le centre au milieu de chacun des côtés.
Si n est pair ($n \geq 6$), on construit un partage en n / 2 quadrilatères superposables en joignant le

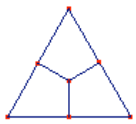

n=7


n=10

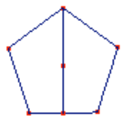
centre à un côté sur deux.

2) Partages de polygones réguliers en un nombre minimum de quadrilatères.

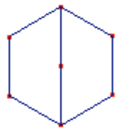
On peut partager un triangle équilatéral en 3 quadrilatères convexes et on ne peut faire mieux .
On peut partager un pentagone régulier et un hexagone régulier en 2 quadrilatères convexes.



n=3



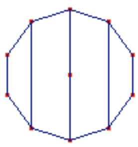
n=5



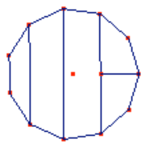
n=6

Si un polygone régulier à n côtés est partagé en k quadrilatères convexes, on a nécessairement $n \leq 4 + 2 \times (k-1)$ (car au maximum 4 côtés pour le premier quadrilatère et 3-1=2 de plus pour chaque nouveau quadrilatère). On en déduit $k \geq (n-2) / 2$.

Si $n = 2 \times p$ et $n \geq 4$, $k = (n-2) / 2= p-1$ convient (p-1 quadrilatères « consécutifs »). Exemple n = 10
Si $n = 2 \times p+1$et $n \geq 5$, $k = (n-1) / 2 = p$ convient (p-2 quadrilatères « consécutifs », le pentagone qui termine étant partagé en 2). Exemple n = 11
Le nombre minimum de quadrilatères convexes permettant de partager un polygone régulier à n côtés est donc : 3 si n = 3, (n-2) / 2 si n est pair et $n \geq 4$, (n-1)/ 2 si n est impair et $n \geq 5$.



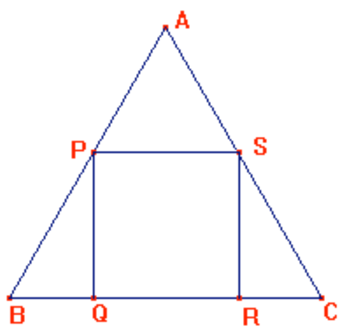
n=10



n=11

Cachez ce carré que je ne saurais voir → **premières et terminales**

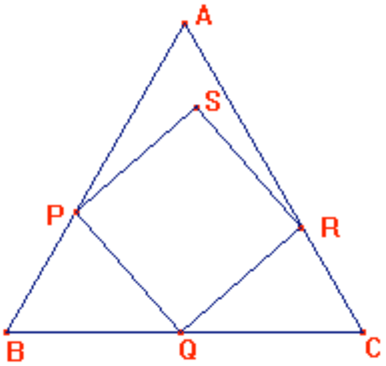
Quel est le plus grand carré que nous pouvons cacher avec une plaque en forme de triangle équilatéral de côté 1 dm ?
On peut penser à la configuration suivante où le carré a ses quatre sommets sur les côtés du triangle.



Si on appelle c le côté du carré, on a :
$BQ = RC = \frac{c}{\sqrt{3}}$, donc :
$c + \frac{2c}{\sqrt{3}} = 1$
d'où on déduit $c = 2\sqrt{3} - 3$ soit $c \approx 0,464$ dm.

Peut-on cacher un carré plus grand en plaçant seulement trois sommets du carré sur les côtés du triangle ?

Soit a l'angle RQC $\frac{\pi}{6} \leq a \leq \frac{\pi}{3}$ (Pour $a = \frac{\pi}{6}$ ou $a = \frac{\pi}{3}$, on est ramené au cas précédent).



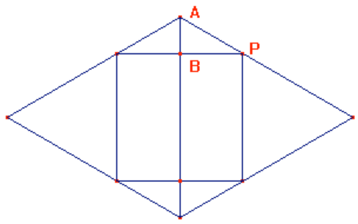
BQ + CQ = 1 donc $\dfrac{c}{\sin(\frac{\pi}{3})} \times \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+a\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}-a\right)\right) = 1$

On montre en trigonométrie que : $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \times \cos \frac{p-q}{2}$

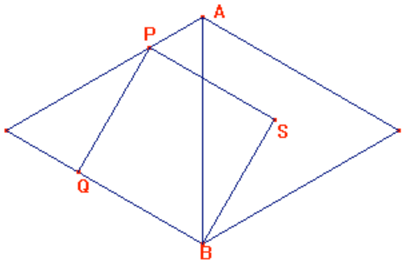
donc $\sin\left(\frac{\pi}{6}+a\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}-a\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{12} \times \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

c est maximum quand $\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ est minimum ; or $-\frac{\pi}{12} \leq a - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{12}$ et $\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ est minimum quand $\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{12}$ ou $\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$ c'est à dire $a = \frac{\pi}{6}$ ou $a = \frac{\pi}{3}$.
Dans le cas où trois au moins des sommets du carré sont sur les côtés du triangle, c'est la première configuration qui donne le plus grand carré.
Si au plus deux sommets du carré sont sur les côtés du triangle, on peut agrandir le côté du carré en le faisant tourner pour rester dans le triangle.
La solution signalée au début est donc la meilleure.

Avec deux plaques, si on dispose les plaques en losange, on peut envisager plusieurs configurations :

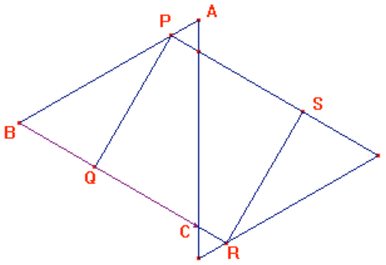


$AB = \frac{c}{2\sqrt{3}}$ donc $\frac{c}{2\sqrt{3}} + c + \frac{c}{2\sqrt{3}} = 1$; $c = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$;
$c \approx 0,634$ dm



AO = 0,5 donc c = $\sqrt{2} \times 0,5$;
$\frac{c}{\sqrt{3}} = 1 - c$ donc $c = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$; on trouve comme dans la première configuration

On peut améliorer encore en faisant « glisser » un triangle :



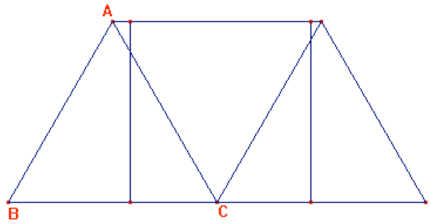
$PB = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ donc $PA = 1 - \frac{2c}{\sqrt{3}}$ et $PA = CR$

$BQ = \frac{c}{\sqrt{3}}$ donc $QC = 1 - \frac{c}{\sqrt{3}}$

$QC + CR = c$ donc $1 - \frac{c}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{2c}{\sqrt{3}} = c$;

$c = \sqrt{3} - 1$; $c \approx 0,732$; encore mieux !

Avec trois plaques



Cette disposition des plaques permet de cacher un carré dont le côté a même mesure que la hauteur du triangle équilatéral, ce qui donne $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$c \approx 0,866$

Qui dit mieux ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2004

Les corrigés LYCÉE

Le dessous des cartes ➔ **secondes, premières et terminales**

En faisant les produits de trois nombres distincts pris parmi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, on trouve trois résultats qui sont des carrés d'entiers :

$2 \times 3 \times 6 = 36$; $2 \times 4 \times 8 = 64$; $3 \times 6 \times 8 = 144$. .

Sébastien, qui ne voit pas sa carte, sait que le produit des trois nombres est un carré ; il voit les cartes de Marius et d'Agnès.

Sébastien voit les cartes de Marius et Agnès :	*il en déduit que sa carte est :*
2 et 3	6
2 et 4	8
2 et 6	3
2 et 8	4
3 et 6	soit le 2 soit le 8
3 et 8	6
4 et 8	2
6 et 8	3

Si les cartes tirées sont 2, 3, 6 ou 3, 6, 8 il y en a toujours un qui ne peut pas répondre : celui qui voit 3 et 6. Si les cartes tirées sont 2, 4 et 8, tous les trois peuvent répondre.

Tout juste … la moyenne ➔ **secondes, premières et terminales**

Avec les chiffres 4,2 et 1 on peut former 6 nombres de 3 chiffres :
421, 412, 241, 214, 142, 124. leur moyenne est 259.
Alice a écrit un nombre « abc » où a, b, c sont distincts et non nul.

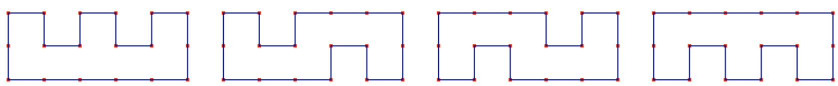
Les nombres obtenus en permutant les chiffres sont abc, acb, bac, bca, cab, cba, qui valent respectivement : 100a + 10b + c, 100a + 10c + b, 100b + 10a + c, 100b + 10c + a, 100c + 10a + b, 100c + 10b + a .
Leur somme est : 100(2 a+2b+2c) + 10(2a+2b+2c)+ (2a+2b+2c) = 111(2a+2b+2c).
Leur moyenne est : 37(a+b+c).
On veut l'égalité : 100a + 10b + c = 37(a+b+c).

On peut chercher parmi les nombres 37 × k ceux qui ont trois chiffres distincts et non nuls et dont la somme des chiffres est k.
On trouve : 37×13 = **481**, 37 ×14 = **518**, 37×16 = **592**, 37 × 17 = **629**.

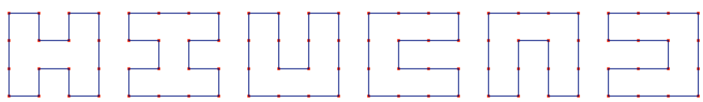
On peut aussi simplifier l'égalité 100a + 10b + c = 37(a+b+c), on obtient : 7a= 3b + 4c
On cherche alors les valeurs de 3b + 4c qui sont multiples de 7 pour les différentes valeurs distinctes et non nulles de b et c.
De plus 3b + 4c étant multiple de 7, 3b – 3c est multiple de 7.
7 divise 3(b – c) et 7 et 3 sont premiers entre eux donc 7 divise (b – c) ; de plus, 1 ≤ b ≤ 9 et 1 ≤ c ≤ 9 on en déduit – 8 ≤ b – c ≤ 8 donc b – c = - 7 ou b – c = 7 (b – c est non nul).
Pour b – c = - 7, b = 1, c = 8, a = 5 ou b = 2, c = 9, a = 6
Pour b – c = 7, b = 8, c = 1, a = 4 ou b = 9, c = 2, a = 5.
Les solutions sont donc : 528, 629, 481, 592.

Passe partout … ➔ **secondes, premières et terminales**

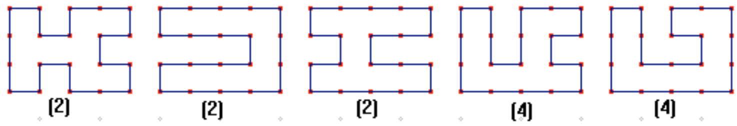
Pour un quadrillage 3*6, les 4 points situés à l'intérieur de la grille sont atteints 2 par 2 soit « par



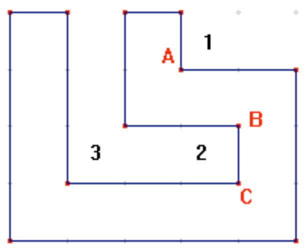
en haut », soit « par en bas », on obtient 4 possibilités :
Dans chacun des cas l'aire est de 8 carreaux, le périmètre 18 unités.
Le dessin ne peut pas être réalisé pour un quadrillage 3*5 car il y a 5 points à l'intérieur et ils ne peuvent être atteints que 2 par 2.
Plus généralement, **pour un quadrillage 3*n**, le dessin n'est pas possible pour n impair.
Si n est pair n = 2p, chacun des p-1 groupes de 2 points intérieurs peut être atteint de 2 façons, il y a donc 2^{p-1} dessins possibles.
Pour un quadrillage 4*4 on obtient 6 configurations d'aire 7 et de périmètre 16:



Pour un quadrillage 4*5, cinq configurations d'aire 9 et de périmètre 20 et celles qui s'en déduisent par des symétries (14 au total).



Pour un quadrillage a*b points :
Le dessin n'est possible que si le nombre de points intérieurs est pair c'est à dire (a-2)(b-2) pair, soit encore a ou b pair.
Partant d'un point du quadrillage, un segment de longueur 1 est tracé à chaque fois qu'on atteint un nouveau point et un dernier segment est tracé pour revenir au point de départ ; il y a donc autant de segments de longueur 1 que de points dans le quadrillage. Le périmètre est donc ab.
L'aire totale du quadrillages est (a-1)(b-1). Chaque paire de points intérieurs atteints réduit cette aire de 1 unité. Le nombre de points intérieurs est (a-2)(b-2) ce qui fait (a-2)(b-2)/2 paires.
L'aire intérieure est donc : (a-1)(b-1) - (a-2)(b-2)/2 = ab/2 – 1.
Autre solution :
Un polygone est un assemblage de carrés de côté 1; si son aire est A, on l'obtient à partir d'un carré initial en ajoutant A - 1 carrés de façon à conserver à chaque étape un polygone sans point intérieur et n'entourant pas de zone vide.
Chaque carré ajouté fait augmenter l'aire de 1 et le périmètre de 2 : en effet, si le carré ajouté avait 2 ou 3 côtés communs avec le polygone déjà construit, cela ferait apparaître soit un point à l'intérieur du polygone, soit une zone vide entourée par le polygone.

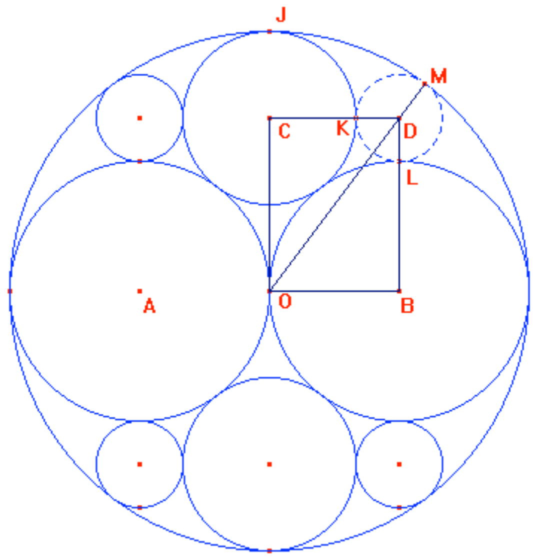


Ajouter un carré en (1) fait apparaître A à l'intérieur.
Ajouter un carré en (3) crée une zone vide entourée par le polygone.
Ajouter un carré en (2) fait apparaître B et C à l'intérieur.

On en déduit le périmètre P = 4 + 2 × (A - 1) d'où A = P / 2 - 1.
Remarque: c'est la formule de Pick (A=I+P/2-1) avec P points sur le bord du polygone et I = 0 points à l'intérieur.

Le bon tuyau ➔ **premières et terminales**

Ce dessin représente une coupe du tuyau. Le cercle de centre O a pour diamètre 12 cm.



Pour les deux premiers câbles, on obtient, en coupe, les cercles de centres A et B qui sont de rayon 3 cm, c'est le maximum ; ces cercles passent par O et sont tangents au cercle de centre O.

On obtient ensuite le cercle de centre C et son symétrique par rapport à (AB) ; le rayon r est maximum quand ces cercles sont tangents aux cercles de centres O, A et B.
Le point C est sur la médiatrice de [AB] et d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AO^2 + OC^2$
$(3 + r)^2 = 3^2 + (6-r)^2$ soit en développant r = 2.

Pour les derniers câbles on obtient 4 cercles de rayon maximum.
Soit D le point tel que OBDC soit un rectangle, montrons qu'un des cercles cherchés a pour centre D. (CD) coupe le cercle de centre C en K, (BD) coupe le cercle de centre B en L et (OD) coupe le cercle de centre O en M
DK = DC – 2 = 1 et DL = DB – 3 = 1
$OD^2 = OB^2 + BD^2$ donc OD = 5 donc DM = OM – OD = 1
Le cercle de centre D et de rayon 1 est tangent aux cercles de centres O, B et C, son rayon est donc maximum.
Autre méthode de recherche du centre et du rayon : dans un repère d'origine O soit :

D (x ; y) B (3 ; 0) C (0 ; 4) et r le rayon du cercle cherché.

Les conditions pour que le cercle soit tangent aux cercles de centres O, B et C sont :

OD = 6 – r ; BD = 3 + r ; CD = 2 + r

$x^2 + y^2 = (6 - r)^2$; $(x - 3)^2 + y^2 = (3 + r)^2$; $x^2 + (y - 4)^2 = (2 + r)^2$

En substituant la première égalité dans les deux autres on obtient :

x = 6 – 3 r et y = 6 – 2 r et en reportant dans la première : $r^2 - 4r + 3 = 0$ d'où r = 1.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2005

Les corrigés LYCÉE

Entiers symétriques

La plus petite somme respectant la définition est : 1+2+1= 4
Si une suite contient plus de 3 termes elle commence par (1,2) et finit par (2,1), on doit nécessairement intercaler au moins un terme entre les deux 2, on obtient la suite (1,2,1,2,1) de somme 7 et la suite (1,2,3,2,1) de somme 9.
La suite (1,2,1,2,1,2,1) a pour somme 10.
Les entiers symétriques inférieurs ou égaux à 10 sont : 4, 7, 9, 10.

Si un entier n est symétrique il est la somme des termes d'une suite (1,2 ….,2,1) ; en plaçant (1, 2) devant cette suite et (2, 1) derrière, la somme est un nouvel entier symétrique égal à n+6.
Plus généralement si n est symétrique, n + 6 k est symétrique ; voyons si 2005 peut s'écrire n + 6 k avec n symétrique.
Or 2005 = 1 + 6 × 334, mais 1 n'entre pas dans la définition d'un entier symétrique ; on a aussi 2005 = 7 + 6 × 333 et 7 est symétrique donc **2005 est symétrique**.

Les entiers 4, 7, 9, 10 étant symétriques 10, 13, 15, 16, sont symétriques ; 14 est symétrique (exemple du texte)

Plaçons les entiers dans un tableau à 6 colonnes ; si un entier est symétrique tous les entiers situés sur la même colonne et en dessous sont symétriques.

En italique les entiers non symétriques, en gras les entiers symétriques.

1	*2*	*3*	**4**	*5*	*6*
7	*8*	**9**	**10**	11	12
13	**14**	**15**	**16**	17	18
19	**20**	**21**	**22**	23	24
25	**26**	**27**	**28**	29	30
31	**32**	**33**	**34**	35	36

Il reste à examiner les entiers des deux dernières colonnes, 5 et 6 ne sont pas symétriques.

11 et 12 sont-ils symétriques ?
11 = 1+2+…..+2+1 que mettre au milieu pour obtenir 5 ou 6 ?
(3) (323) (121) (12121) aucune de ces suites ne convient, d'autres suites donneraient des nombres trop grands, **11 et 12 ne sont pas symétriques.**

1+2+3+2+1+2+3+2+1=17, **17 est symétrique.**

18 est-il symétrique ? 18 = 1+2+ X +2+1 avec X= 12 et X commence par 1 ou 3
X commence par 1 n'est pas possible car 12 n'est pas symétrique
X commence par 3 : 18 =1+2+3+Y+3+2+1 avec Y = 6 et Y commence par 2
Y= 2+3+2 ou Y =2+1+2, ces valeurs ne conviennent pas.
18 n'est pas symétrique.

1+2+3+2+3+2+3+2+3+2+1=24 donc **24 est symétrique**.

1	*2*	*3*	**4**	*5*	*6*
7	*8*	**9**	**10**	11	12
13	**14**	**15**	**16**	**17**	18
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

Liste des entiers non symétriques : 1, 2,3, 5, 6, 8, 11, 12, 18.

Lignes magiques

Deux exemples pour que la somme des nombres situés sur une même ligne soit égale à 20 :

```
       7     6                      1     4
        \   /                        \   /
          8                            8
        /   \                        /   \
 4 — 5   — 2   — 9            6 — 5   — 2   — 7
    /          \                 /          \
   1             3              3             9
```

La somme des nombres de 1 à 9 est 45 ; soit C la somme des nombres situés au centre et L la somme des nombres de chaque ligne, on a : 3 L = 45 + C.
On peut alors remarquer que C est divisible par 3.
L est la plus petite possible quand C est le plus petit possible, c'est à dire C = 1 + 2 + 3, on a alors 3 L = 51 d'où L = 17
Cherchons une disposition pour cette valeur.

```
     a     b
      \   /
        1
      /   \
c  — 2   — 3   — d
    /           \
   e              f
```

Remarquons qu’on peut échanger a et f, b et e, c et d , on ne restreint pas le problème en prenant $a<f$, $b< e$, $c< d$.

$a + 1 + 3 + f = c + 2 + 3 + d = e + 2 + 1 +b = 17$
$a + f = 13$; $c + d = 12$; $e + b = 14$

Avec deux nombres de la liste 4, 5, 6, 7, 8, 9, formons les sommes égales à 12 ou 13 ou 14
$c + d = 4 + 8$ ou $c + d = 5 + 7$
$a + f = 4 + 9$ ou $a + f = 5 + 8$ ou $a + f = 6 + 7$
$b + e = 5 + 9$ ou $b + e = 6 + 8$

Avec $c = 4$ et $d = 8$, on a nécessairement $a = 6$, $f = 7$, $e = 9$ et $b = 5$ car les nombres doivent être tous distincts.
Avec $c = 5$ et $d = 7$, on a nécessairement $a = 4$, $f = 9$, $b = 6$ et $e = 8$. On obtient les deux solutions suivantes :

```
     6     5                      4     6
      \   /                        \   /
        1                            1
      /   \                        /   \
4  — 2   — 3   — 8           5  — 2   — 3   — 7
    /           \                /           \
   9              7             8              9
```

L est la plus grande possible quand C est le plus grand possible, c’est à dire $C = 7 + 8 + 9$, on a alors $3 L = 69$ d’où $L = 23$
Cherchons une disposition pour cette valeur.

```
     a     b
      \   /
        7
      /   \
c  — 8   — 9   — d
    /           \
   e              f
```

Comme précédemment on prendra $a<f$, $b<e$, $c<d$.

$a + 7 + 9 + f = c + 8 + 9 + d = e + 8 + 7 + b = 23$
$a + f = 7$; $c + d = 6$; $b + e = 8$

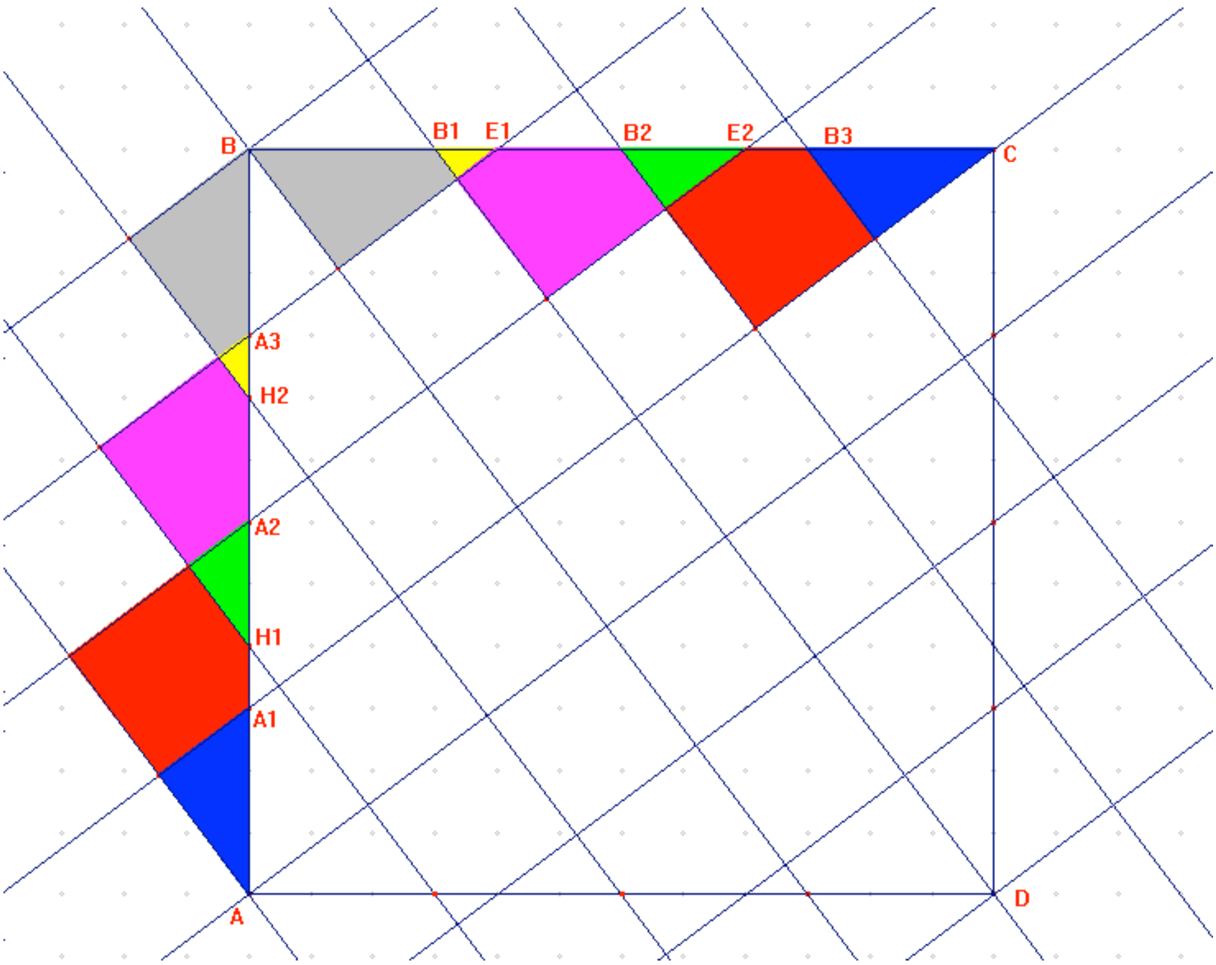
Avec deux nombres distincts de la liste 1, 2, 3, 4, 5, 6, formons les sommes égales à 6 ou 7 ou 8
c + d =1+5 ou c + d = 2 + 4
a + f =1 + 6 ou a + f = 2 + 5 ou a + f = 3 + 4
b + e = 2 + 6 ou b + e = 3 + 5

Avec c = 1 et d = 5, on a nécessairement a = 3, f = 4, b = 2 et e = 6
Avec c = 2 et d = 4, on a nécessairement a = 1, f = 6, b = 3 et e = 5 On obtient les deux solutions suivantes :

```
      3    2                  1    3
       \  /                    \  /
        7                        7
       /  \                    /  \
 1 — 8  — 9  — 5        2 — 8  — 9  — 4
    /        \             /        \
   6          4           5          6
```

Remarque : Pour toute configuration donnant des lignes magiques, si on remplace chaque nombre x par 10 – x, on obtient une autre solution. Une solution avec L minimum donne une solution avec L maximum.

Quadrillages



Une rotation d'angle droit centrée au centre du carré ABCD transforme (CA_1) en (DB_1), ces droites sont donc perpendiculaires. Les droites construites forment deux réseaux de droites parallèles et chaque droite de l'un des réseaux est perpendiculaire à chaque droite de l'autre.
D'autre part, les segments $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3B]$ ont même longueur, leurs projetés orthogonaux sur $[DB_1]$ ont donc même longueur, de même pour les projetés de $[BB_1]$, $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$ et $[B_3C]$ sur $[CA_1]$. Les intersections des droites construites déterminent donc des petits carrés.

On compte sur le dessin 13 carrés entièrement tracés à l'intérieur de ABCD.

Les parallèles à (CA_1) passant par A_2 et A_3 coupent [BC] en E_2 et E_3.
[BC] est coupé en quatre avec B_1, B_2, B_3 et est coupé en trois avec E_1 et E_2 et ces points sont tous distincts.

Ces 5 points sur [BC] déterminent 6 segments qui correspondent chacun à un « carré coupé » ; dans une rotation d'angle droit de centre B, l'image d'un « carré coupé » par [BC] vient compléter un « carré coupé » par [AB] ; on obtient ainsi 6 carrés et 6 autres carrés en utilisant une rotation de centre D.

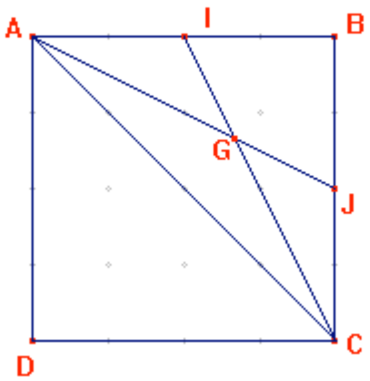
L'aire de ABCD est donc égale à la somme des aires de 25 petits carrés. Chaque petit carré a pour aire 1/25.

<u>Généralisation</u>
Coupons maintenant les côtés du carré ABCD en n segments égaux. Sur [BC] on place (n-1) points pour le découpage puis (n-2) points quand on trace les parallèles à (CA_1) ; (n-1) et (n-2) n'ayant pas de diviseur commun ces points sont tous distincts et [BC] est découpé en (2n-2) segments. En raisonnant comme précédemment, on obtient 2×(2n-2) carrés coupés.

Désignons par a le côté d'un carré et par x l'angle BCA_1.
$\cos x = a/(1/n) = n\, a$ et $\tan x = BA_1 / BC = [(n-1)/n]/1= (n-1)/n$.
De l'égalité $1 + \tan^2 x = 1/ \cos^2 x$,on déduit $n^2 + (n-1)^2 = 1/a^2$.
Il y a donc $n^2 + (n-1)^2$ carrés en tout avec (4n-4) carrés coupés.
Le nombre de petits carrés entièrement tracés à l'intérieur du carré ABCD est donc :
$n^2 + (n-1)^2 – (4n-4) = n^2 – 4n + 4 +(n-1)^2 = (n-2)^2 + (n-1)^2$

On peut dénombrer d'une autre façon les carrés entièrement dessinés :
La bande délimitée par (A_1C) et sa parallèle passant par A est coupée par 2(n-1) droites pour former (2n-3) carrés.
(2n-3) + (2n-5) + ….+ 3 + 1 carrés sont au dessous de (A_1C) et (2n-5) + ….+ 3 + 1 carrés sont au dessus .
Or $1+3+….+(2p-1) = p^2$ et ici p = n-1 pour la première somme et p = n-2 pour la deuxième.
On retrouve $(n-1)^2 + (n-2)^2$ carrés entièrement dessinés.

Jean Centaire



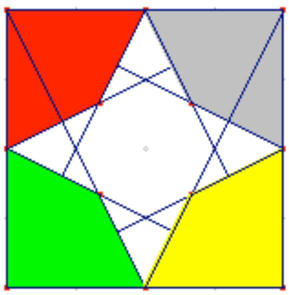
Les triangles BJG et BJA ont même hauteur issue de B et JG = JA / 3 car G est le centre de gravité du triangle BCA. Donc, aire (BJG) = aire (BJA) / 3

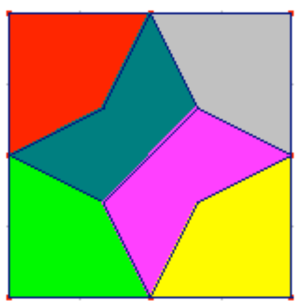
Les triangles BJA et BCA ont même hauteur issue de A et BJ = BC / 2 .
Donc, aire (BJA) = aire (BAC) / 2.
Aire (BAC) = aire (ABCD) / 2.
En conclusion, aire (BJG) = aire (ABCD) / 12.

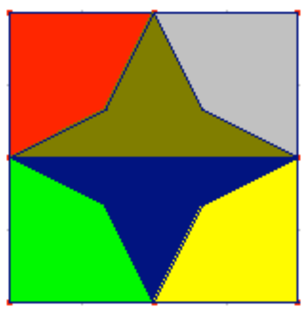
La parcelle de Jean est le quadrilatère IBJG dont l'aire est le double de celle du triangle BJG.
La parcelle de Jean a pour aire : aire (ABCD) / 6 ; les enfants de la famille Centaire ayant des

parcelles de même aire, il y a 6 enfants.
AC = AB × $\sqrt{2}$; AJ ^{2} = AB ^{2} + BJ ^{2} = 5 × AB ^{2} / 4 ; AJ = AB × $\sqrt{5}$ / 2 ; GJ = AB × $\sqrt{5}$ / 6 ;
Périmètre de la parcelle de Jean : AB × $\sqrt{5}$ / 3 + AB = AB (1 + $\sqrt{5}$ / 3).

Pour terminer le partage, on peut constituer 3 autres parcelles analogues à celle de Jean et partager le terrain restant selon un de ses axes de symétrie, par exemple :







TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2006

Les corrigés LYCÉE

Cinq par cinq

	1			
		2		
	3			
	5			**3**
				4

On peut procéder ainsi :

Dans la première ligne, la cinquième case ne peut contenir ni un 1 (1 est déjà dans cette ligne), ni un 2 (2 est déjà dans cette région) ni un 3 ni un 4 (3 et 4 sont déjà dans cette colonne), elle contient donc un 5.
Dans la deuxième colonne il manque les chiffres 2 et 4, un 2 figure déjà en deuxième ligne, le 2 est donc en cinquième ligne et le 4 en deuxième ligne.

	1			5
	4	**2**		
	3			
	5			**3**
	2			**4**

	1		4	5
	4	**2**	3	1
	3			2
	5		2	**3**
	2			**4**

Dans la deuxième ligne la cinquième case n'est ni 2 ni 5 déjà placés dans la région, ni 3 ni 4 déjà placés dans la colonne, c'est donc un 1.
On peut alors terminer la dernière colonne en plaçant un 2 et puis compléter la région centrale en plaçant un 2 dans la seule place possible.
On complète aussi la région Nord-Est avec 3 et 4

2	**1**	3	4	5
5	4	**2**	3	1
4	**3**			2
	5		2	**3**
	2			**4**

On sait alors compléter la première ligne puis la région Nord-Ouest

2	**1**	3	4	5
5	4	**2**	3	1
4	**3**			2
1	**5**	4	2	**3**
3	2			**4**

On complète la première colonne avec 1 et 3 puis la quatrième ligne

Les quatre cases restantes contiennent toutes 1 ou 5 qu'on peut disposer de deux façons.

Voici les deux solutions du problème :

2	**1**	3	4	5
5	4	**2**	3	1
4	**3**	1	5	2
1	**5**	4	2	**3**
3	2	5	1	**4**

2	**1**	3	4	5
5	4	**2**	3	1
4	**3**	5	1	2
1	**5**	4	2	**3**
3	2	1	5	**4**

Un chemin épineux : fractal !

A chaque étape le numéro d'un sommet est égal au nombre de segments qui le précèdent plus 1.

En passant d'une étape à la suivante on remplace 1 segment par 4 segments donc le nombre total de segments se trouve multiplié par 4.

A partir de la deuxième étape, le nombre de segments est un multiple de 4 et, du 1er sommet au sommet central, le nombre de segments est un mutiple de 2 (et même de 4 à partir de la troisième étape) ; le sommet central a donc un numéro impair :

2006 n'est jamais au sommet central.

Etape	Nombre de segments	Nombre de sommets	Nombre de segments jusqu'au sommet central	Nombre au sommet central	Longueur d'un segment
1	1	2			10 cm
2	4	5	2	2+1=3	10/3
3	$16 = 4^2$	17	8	8+1=9	$10/3^2$
4	$64 = 4^3$	65	32	33	
5	$4^4 = 256$	$4^4 + 1 = 257$	$2 \times 4^3 = 128$	129	
6	$4^5 = 1024$	$4^5 + 1 = 1025$	$2 \times 4^4 = 512$	513	
7	$4^6 = 4096$	$4^6 + 1 = 4097$	$2 \times 4^5 = 2048$	2049	$10/3^6$
…					
n	4^{n-1}	$4^{n-1} + 1$	$2 \times 4^{n-2}$	$2 \times 4^{n-2} + 1$ $= (4^{n-1} + 2) / 2$	

2006 apparaît à la 7ème étape.
Le sommet central de cette étape est alors 2049.

Pour aller de 1 à 2006, on parcourt 2005 segments de longueur $10/3^6$ soit 27,50 cm environ.

Des carrés en sommes

Observons les égalités suivantes :
$1^2 = 1$
$3^2 = 2+3+4$
$5^2 = 3+4+5+6+7$
On remarque que le nombre élevé au carré est impair, qu'il est le nombre central de la somme et qu'il est aussi le nombre de termes de cette somme ; on remarque aussi que la somme des extrêmes est le double du nombre central.

Décomposons de cette manière 19^2.
La somme à écrire comporte 19 termes, on écrit 9 termes avant 19 et 9 termes après :
S = (10+11+12+13+14+15+16+17+18)+**19**+(20+21+22+23+24+25+26+27+28)
On vérifie que cette somme est bien égale à 19^2.
On le voit facilement en regroupant les termes extrêmes :
S = (10+28)+ (11+27)+ (12+26)+ (13+25)+ (14+24)+ (15+23)+ (16+22)+ (17+21)+ (18+20)+19
S = 2×19 + 2×19 + 2×19 + 2×19 + 2×19 + 2×19 + 2×19 + 2×19 + 2×19 +19 S =19×19

On peut généraliser le résultat et sa justification à tout nombre impair x = 2p + 1
$(2p+1)^2 = [\ (p+1) + (p+2) + \cdots + (2p)\ ] + \mathbf{(2p+1)} + [\ (2p+2) + \cdots + (3p+1)\ ]$
ou $x^2 = \frac{x+1}{2} + \cdots + x + \cdots + \frac{3x-1}{2}$
Les p sommes des termes extrêmes sont chacune égale à 4p +2, la somme totale est donc égale à :
$p \times (4p+2) + (2p+1) = (2p+1)^2$

Le nombre 2006 intervient dans la décomposition si $(p+1) \leq 2006 \leq (3p+1)$
$2005/3 \leq p \leq 2005$ or 2005/3 = 668,33…
Le plus petite valeur de p est 669 ; 2p+1 = 1339 ; 3p + 1 = 2008
$1339^2 = 670 + \cdots + 1339 + \cdots + 2008$

Remarque : pour p = 2005, 2006 est le premier terme de la décomposition de 4011.

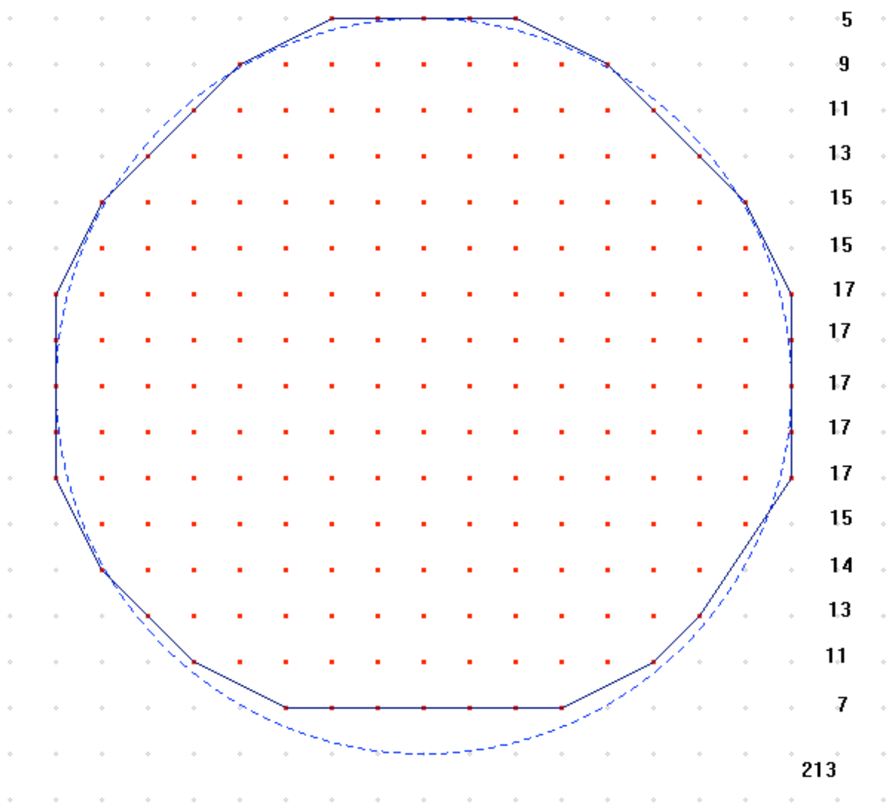
Est-il possible de décomposer le carré d'un nombre pair en somme de n entiers consécutifs ?

$n^2 = (p+1) + (p+2) + \cdots + (p+n)$
On sait calculer la somme de n entiers consécutifs ou on retrouve facilement le résultat en écrivant n^2 comme ci-dessus et dans l'ordre inverse puis on ajoute :
$n^2 = (p+1) + (p+2) + \cdots + (p+n-1) + (p+n)$
$n^2 = (p+n) + (p+n-1) + \cdots + (p+2) + (p+1)$
$2n^2 = (2p+n+1) \times n$
$2n = (2p+n+1)$

Si n est pair, (2p + n + 1) est impair, l'égalité n'est donc pas possible.

L'orée du bois

En première idée on peut tracer un cercle centré en un point du quadrillage et de rayon 50/2π soit environ 8 m ; on prend les points situés à l'intérieur du cercle, certains même à l'extérieur mais très proches et on trace le polygone les contenant tous. Si le périmètre dépasse 50, on supprime quelques points.
Voici le dessin correspondant au plus grand nombre de points trouvés à ce jour : 213



Calcul du périmètre p pour cette situation :

$p = 4 + \sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{5} + 4 + \sqrt{13} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + 6 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} + 4 + \sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{5}$
p vaut environ 49,98594918 m

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2007

Les corrigés LYCÉE

Placez bien vos billes

Le nombre 12 peut de décomposer en somme de quatre entiers distincts de deux manières seulement : 12 = 6 + 3 + 2 + 1 et 12 = 5 + 4 + 2 + 1.
On remarque que dans ces décompositions 3 et 6 sont associés, de même 4 et 5.

La première ligne qui contient 6 est donc 6, 1, 3, 2 ou 6, 1, 2, 3 mais la troisième colonne qui contient 4 ne peut pas contenir 3, la première ligne est donc 6, 1, 2, 3

6	1	2	3
		4	

La deuxième ligne contient les nombres 1, 2, 4, 5 ; 5 n'est ni dans la colonne de 3 ni dans celle de 6, donc 5 est dans la colonne de 1

6	1	2	3
	5	4	

La deuxième colonne contient les nombres 1, 5, 2, 4 et 4 n'est pas sur une diagonale qui contient déjà un 4, 4 est donc en dernière ligne.

6	1	2	3
	5	4	
	2		
	4		

On complète la troisième colonne 2, 4, 1, 5 car 5 n'est pas sur une diagonale qui contient déjà un 5.

6	1	2	3
	5	4	
	2	1	
	4	5	

On peut alors compléter la première colonne : 3 n'est pas sur les lignes qui contiennent déjà 4 et 5 et 2 n'est pas sur une diagonale qui contient déjà un 2.

6	1	2	3
2	5	4	
3	2	1	
1	4	5	

On complète facilement la quatrième colonne.		6	1	2	3
		2	5	4	1
		3	2	1	6
		1	4	5	2

Je vous ai apporté des bonbons

Jacques a 4 répartitions possibles :	Germaine a 6 répartitions possibles :
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 2, 2, 2, 2, 2 5, 5 10 Il y en a autant que de diviseurs de 10.	1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 2 2 1 1 1 1 2 2 2 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4

Jacques et Germaine ont au total 10 répartitions possibles.

Si on veut répartir n bonbons en k sachets de même contenance ou dont les contenances diffèrent de 1 :
On divise n par k : n = k q + r avec r inférieur à k
On constitue k sachets de q bonbons, on ajoute 1 bonbons à r sachets, on obtient k – r sachets de q bonbons et r sachets de q + 1 bonbons.
C'est possible pour toutes les valeurs de k de 1 à n.
Jacques et Germaine ont au total n répartitions possibles.

Germaine et Jacques peuvent avoir le même nombre de répartitions si le nombre de diviseurs de n est n/2 ; n est donc nécessairement pair.
On remarque que 2, 4, 6 ne répondent pas à la question.

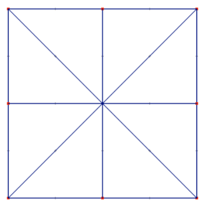
8 possède 4 diviseurs : 1, 2, 4, 8.	
Répartitions de Jacques pour n = 8	Répartitions de Germaine pour n = 8
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 2, 2, 2, 2 4, 4 8	1, 1, 1, 1, 1, 1, 2 1, 1, 1, 1, 2, 2 1, 1, 2, 2, 2 2, 3, 3

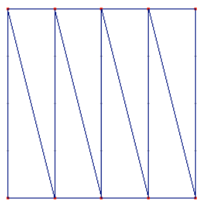
12 possède 6 diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, 12.	
Répartitions de Jacques pour n = 12	Répartitions de Germaine pour n = 12
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2 3, 3, 3, 3 4, 4, 4 6, 6 12	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2 1, 1, 1, 1 2, 2, 2 1, 1, 2, 2, 2, 2 2, 2, 2, 3, 3

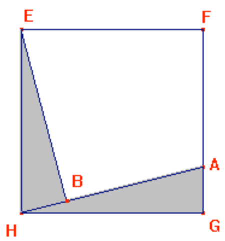
Supposons n > 8 ; 1, 2, n/2 et n sont des diviseurs de n, or de 1 à n/2 il y a n/2 nombres.
Les nombres de 1 à n/2 sauf l'un sont donc des diviseurs de n.
n/2 – 1 peut-il être diviseur de n ? Dans ce cas n = (n/2 – 1)× k, 2n = (n-2) × k donc (n-2) divise 2n or (n-2) divise 2n-4 donc (n-2) divise 4 et n-2>6, c'est impossible.
Quand n est solution, les diviseurs de n sont 1, 2, ….(n/2-2), n/2, n et (n/2-2) > 2,
(n/2-2) est donc un diviseur de n, n = (n/2 – 2) × k, 2n = (n-4) × k donc (n-4) divise 2n or (n-4) divise 2n-8 donc (n-4) divise 8 et (n-4) > 4 donc (n-4) = 8 donne n = 12
8 et 12 sont bien les seules solutions.

Huit triangles pour un carré

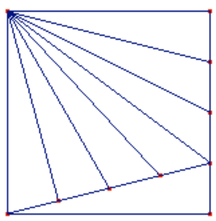
Exemples de découpage en 8 triangles superposables :







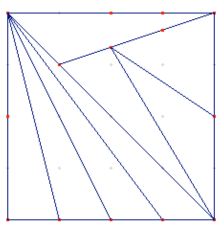
Supposons le carré de côté 1.Chaque triangle a pour aire 1/8
Aire HGA = 1/2 HG × AG donc AG = 1/4
Aire EBH = 1/2 EH × h où h est la hauteur issue de B donc h = 1/4 : B se projette sur HG au quart de HG.
Il reste à couper EFAB en 6 triangles de même aire pour un total de 6/8 or EFA a pour aire :
1/2 × 1 × 3/4 = 3/8, EAB a donc aussi pour aire 3/8.

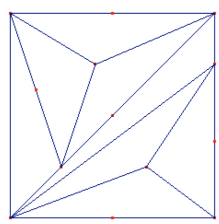


On peut partager AB en trois segments de même longueur de même pour AF pour faire apparaître 6 triangles de même aire.

Ex

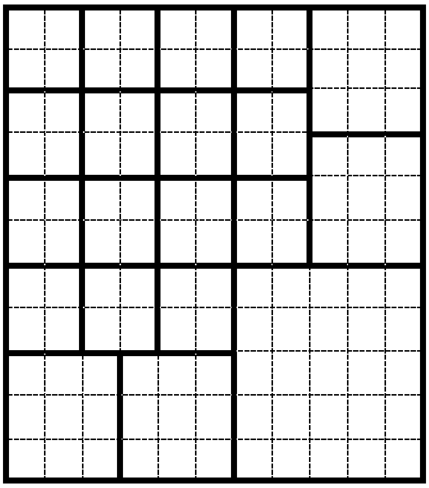
emples de découpages en huit triangles de même aire non superposables deux à deux

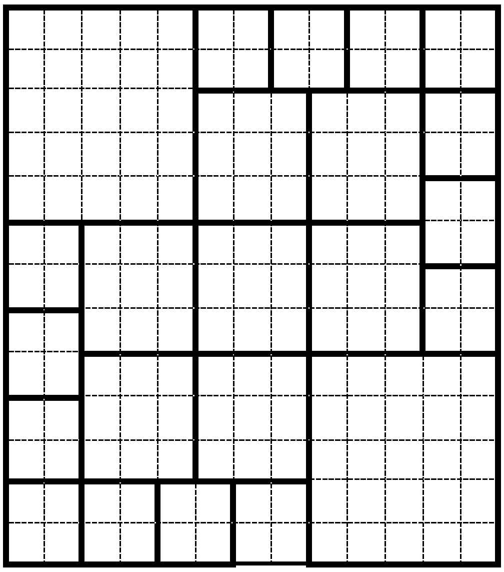


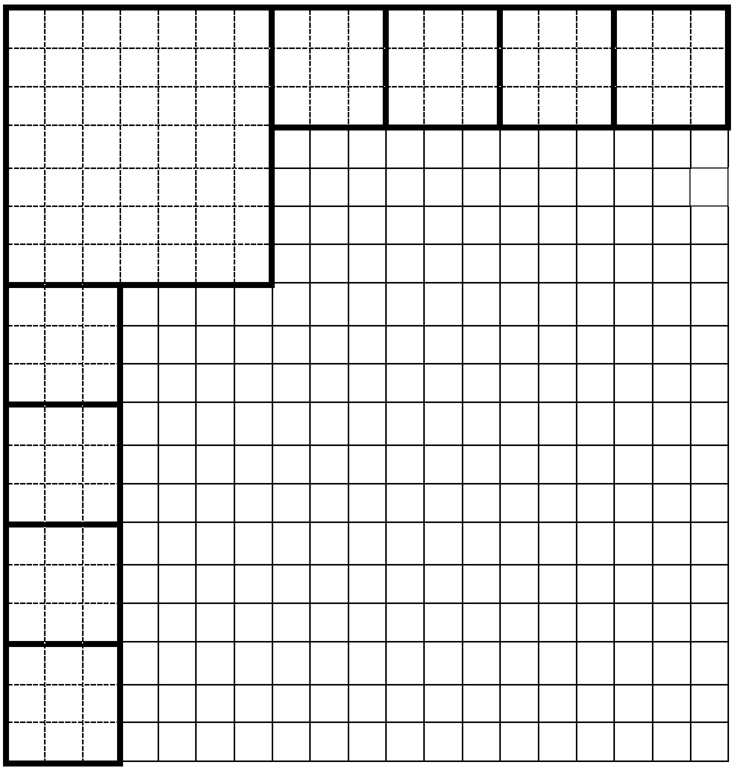


Avoir la tête … aux carrés

Pavages de carrés de côtés 11 et 13



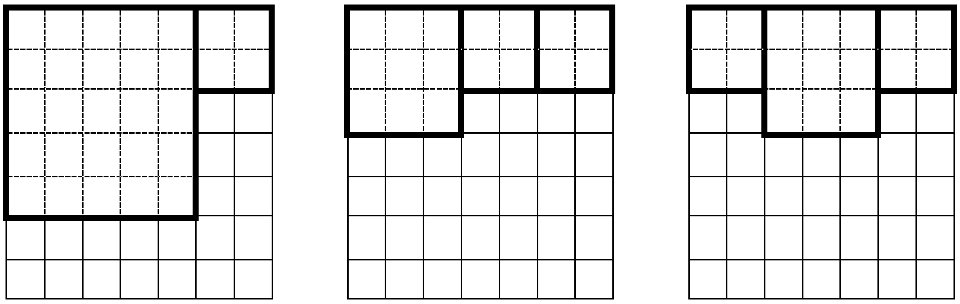




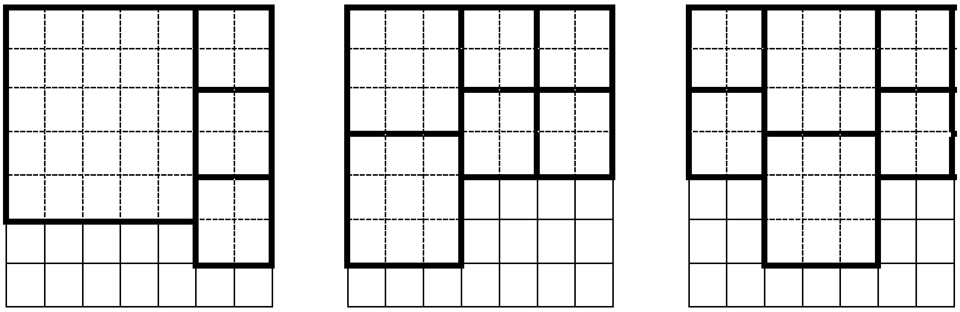
A partir d'un pavage d'un carré de côté n impair (pour le dessin n=7), on peut paver les carrés de côtés n + 6k en ajoutant sur deux bords 2k carrés de côté 3 (pour le dessin k=2), le reste est pavable avec des carrés de côté 2.

On sait paver les carrés de côté pair donc les carrés de côtés 6k, 6k + 2, 6k + 4.
On sait paver les carrés de côté multiple de 3 donc les carrés de côtés 6k +3.
On sait paver les carrés de côté 5 donc les carrés de côtés 6k + 5
On sait paver les carrés de côté 13 donc les carrés de côtés 6k + 1 pour k supérieur ou égal à 2

Montrons que ce n’est pas possible pour 7. Sur l’un des côtés trois cas sont possibles : 5+2, 3+2+2, 2+3+2.



On rajoute des pavés qui s’imposent :



On ne peut pas terminer le pavage. Seuls les carrés de côtés 1 et 7 ne sont pas pavables.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

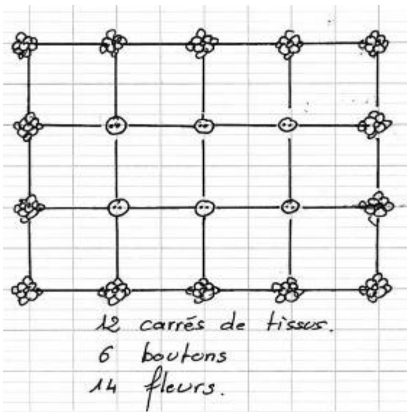
DU

LIMOUSIN

2008

Les corrigés LYCÉE

Mon beau tapis



Si les dimensions du tapis sont a et b avec a ≥ b, le nombre de carrés de tissu est a × b, le nombre de fleurs est 2a + 2b, le nombre de boutons est (a-1) × (b-1).

On utilise 24 carrés de tissu et 15 boutons : ab = 24 et (a-1)(b-1) =15
On écrit les décompositions de 24 en produits : 24 × 1, 12 × 2, 8 × 3, 6 × 4.
Parmi les solutions on cherche celles qui vérifient la deuxième égalité on obtient a = 6 et b = 4 ce qui fait 20 fleurs.
On utilise 2008 carrés de tissu et autant de boutons que l'on veut, on veut utiliser le plus petit nombre possible de fleurs de feutrine : a × b = 2008
On écrit les décompositions de 2008 en produits :

a	b	Fleurs : 2a + 2b	Boutons : (a-1)(b-1)	
2008	1	4018	0	
1004	2	2012	1003	
502	4	1012	1503	
251	8	518	1750	

Le plus petit nombre possible de fleurs de feutrine est 518.

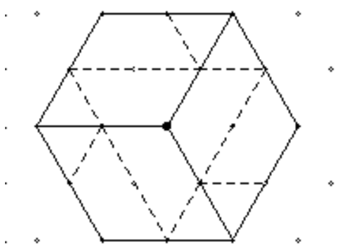
Si on veut autant de fleurs que de boutons $2a + 2b = (a-1)(b-1)$ soit en développant :
$a \times b + 1 - 3a - 3b = 0$ ou encore $(a-3) \times (b-3) = 8$
$(a-3) = 8$ et $(b-3) = 1$ ou $(a-3) = 4$ et $(b-3) = 2$
Les solutions sont donc $a = 11$ et $b = 4$ ou $a = 7$ et $b = 5$.

Autre méthode : On peut poser $a = b + t$ avec $t \geq 0$
L'égalité devient : $3b + 3(b+t) = b \times (b+t)+1$ ou encore : $b^2 + b(t-6) + 1 - 3t = 0$.
Le discriminant de cette équation du second degré d'inconnue b est $(t-6)^2 - 4(1-3t) = t^2 + 32$
b, t étant des entiers, $t^2 + 32$ doit être un carré ; posons $t^2 + 32 = u^2$ on obtient $(u-t)(u+t) = 32$ donc $(u-t)$ et $(u+t)$ sont des diviseurs positifs de 32, le plus grand étant $(u+t)$.

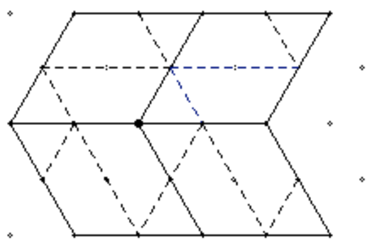
(u+t)	(u-t)	u	t	discriminant	b	a
32	1	Pas sol				
16	2	9	7	81	4	11
8	4	6	2	36	5	7

Calissons Z

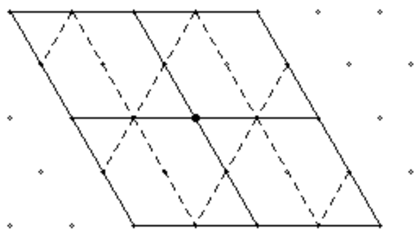
Un point étant choisi, disposons les calissons dont un sommet coïncide avec ce point de manière à cacher les six points les plus proches.
Les angles des sommets des calissons placés en ce point ont pour somme 360°. Ces angles ont pour valeur 60 ° ou 120° .
360 peut se décomposer de plusieurs manières conduisant à 5 possibilités faisant apparaître 5 polygones différents :



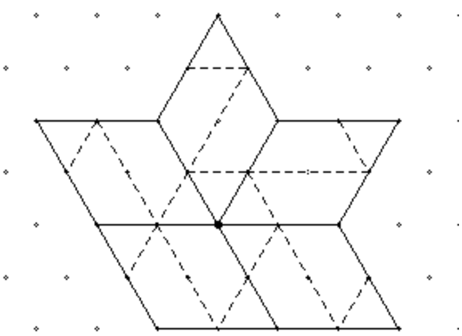
120+120+120



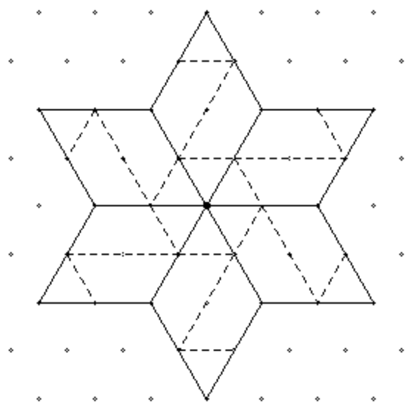
120+120+60+60



60+120+60+120



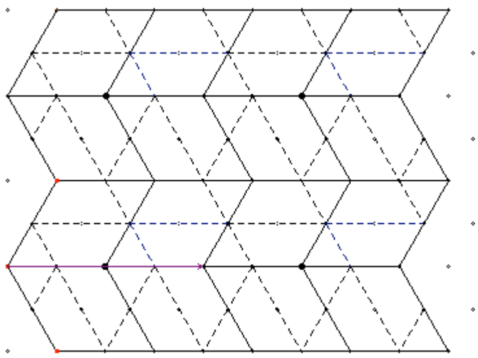
60+60+60+60+120

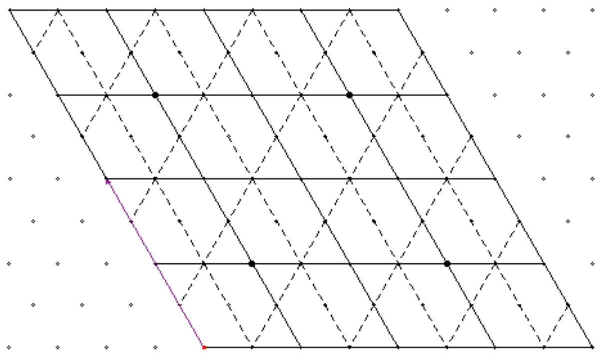


60+60+60+60+60+60

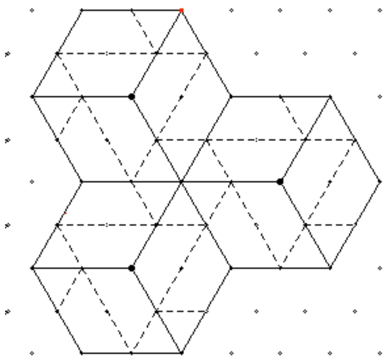
En prenant comme unité de surface celle d'un petit triangle équilatéral, les surfaces ont pour mesures respectives : 9, 8, 8, 7, 6.
En prenant comme unité de longueur la plus courte distance entre deux points de la grille, les périmètres ont pour mesures respectives : 9, 8, 8, 7, 6.
Parmi les polygones celui qui a la plus grande aire est le triangle équilatéral, celui qui a le plus petit périmètre est l'hexagone.

Arthur peut carreler sa salle de bain en ne faisant apparaître qu'une sorte de polygone en n'utilisant que le deuxième motif où n'apparaissent que des trapèzes, ou que le troisième motif où n'apparaissent que des losanges:





En complétant les quatrième et cinquième motifs, on fait apparaître trapèze ou triangle équilatéral.
Si on veut paver avec les hexagones du premier motif, on fait apparaître plusieurs types de polygones : hexagone et triangle équilatéral.



Enchaînons les dominos

Chaîne commençant par (4,2).
(4,2). (6,1). (0,1). (1,2). (3,5). Le domino suivant (1,6) est déjà posé..

Une chaîne contient le domino (1,3) et ce domino n'est pas le premier, cherchons le précédent .
Si (a,b) précède (1,3) alors b+1=3 (b+1=10 n'est pas possible) donc b=2 et a+b=8 (a+b=1 n'est pas possible) donc a = 6.
Le domino (6,2) précède (1,3) et le suivant est (4,0).

Chaînes les plus longues possibles contenant le domino formé des chiffres 3 et 5 :

(0,1) (1,2) (**3,5**) (1,6) (0,6) (6,5) (4,2)
(0,6) (6,5) (4,2) (6,1) (0,1) (1,2) (**3,5**)
(0,2) (2,4) (6,3) (2,5) (0,5) (**5,3**) (1,4)
(0,5) (**5,3**) (1,4) (5,2) (0,2) (2,4) (6,3)

On peut trouver des chaînes formées de 8 dominos par exemple :
(1,0) (1,1) (2,3) (5,1) (6,0) (6,6) (5,4) (2,6)

Montrons que c'est la longueur maximale :
Dans la suite « - m7 » signifie « moins un multiple de 7 ». Ecrivons la suite obtenue à partir de (a, b) :
(a, b) ; (a+b-m7, a+2b-m7) ; (2a+3b-m7, 3a+5b-m7) ; (5a+b-m7, a+6b-m7) ; (6a-m7, 6b-m7) ;
(6a+6b-m7, 6a+5b-m7) ; (5a+4b-m7, 4a+2b-m7) ; (2a+6b-m7, 6a+b-m7).
Le domino suivant serait (a-m7, b-m7) qui n'est autre que (a,b) qui est déjà posé.
La longueur maximale est de 8 dominos.
Remarque : on peut écrire la suite plus simplement en écrivant les nombres modulo 7
(a, b) ; (a+b, a+2b) ; (2a+3b, 3a+5b) ; (5a+b, a+6b) ; (6a, 6b) ;
(6a+6b, 6a+5b) ; (5a+4b, 4a+2b) ; (2a+6b, 6a+b).

Affranchissement

Répartition des 100 objets en 5 paquets :
On veut une répartition (b, a, a, a, a) avec $1 \leq b \leq a$; 100 - b doit être divisible par 4, b doit donc être divisible par 4. On obtient les solutions suivantes :
(20, 20, 20, 20, 20), (16, 21, 21, 21, 21), (12, 22, 22, 22, 22),
(8, 23, 23, 23, 23), (4, 24, 24, 24, 24)

Répartition des 100 objets en 3 paquets :
On veut une répartition (b, a, a) avec $1 \leq b \leq a$; 100 - b doit être divisible par 2 :
(2k, 50 - k, 50 - k) avec $1 \leq k \leq 16$
(2, 49, 49) - (4, 48, 48) - (6, 47,47) -…………- (30, 35,35) - (32, 34,34)

Répartition en 16 paquets :
$15\,a + b = 100$ $\quad 1 \leq b \leq a$ $\quad 1 \leq 100 - 15a \leq a$ $\quad 100/16 \leq a \leq 99/15$ $\quad 6.25 \leq a \leq 6.6$
pas de solution entière.

Répartition en 17 paquets :
$16\,a + b = 100$ $\quad 1 \leq b \leq a$ $\quad 1 \leq 100 - 16a \leq a$ $\quad 100/17 \leq a \leq 99/16$ $\quad 5.8 \leq a \leq 6.18$
On obtient a = 6. On a donc 16 paquets de 6 objets et 1 paquet de 4 objets.

Plus petite valeur de p pour laquelle il n'est pas possible de répartir les objets en p paquets :
Pour une répartition en p paquets (b, a, …..a), on a :
$(p-1)\,a + b = 100$ et $1 \leq b \leq a$
$b = 100 - (p - 1)\,a$ et $1 \leq 100 - (p - 1)\,a \leq a$ soit $(p - 1)\,a \leq 99$ et $100 \leq pa$
ou encore $\dfrac{100}{p} \leq a \leq \dfrac{99}{p-1}$.

Pour qu'il n'y ait pas de solution il est nécessaire que $\frac{99}{p-1} - \frac{100}{p} < 1$ ce qui donne :

$99\ p - 100\ p + 100 < p^2 - p$ ou encore $100 < p^2$; on obtient $p > 10$.

Prenons $p = 11$: $\frac{100}{11} \leq a \leq \frac{99}{10}$; $9{,}09 \leq a \leq 9{,}9$; il n'y a pas de solution.

La petite valeur de p pour laquelle il n'est pas possible de répartir les objets en p paquets est 11.

Remarquons que la condition $\frac{99}{p-1} - \frac{100}{p} < 1$ n'est pas suffisante : on a par exemple trouvé une répartition pour p =17.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2009

Les corrigés LYCÉE

Nombres croisés

Remarques préliminaires :
Carrés d'entiers : 1, 4, 9, 16.
Nombres pairs : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.
Multiples de trois : 3, 6, 9, 12, 15.
Il y a exactement deux nombres pairs par ligne, de même par colonne.
Seul le 9 est à la fois multiple de 3 et carré d'entier il est donc dans la case I C .

Le nombre 2 n'est pas voisin de 1, n'est pas dans la ligne I car il n'est pas multiple de 3, il n'est ni en II A ni en III A car aucun nombre ne pourrait aller en IV A en respectant les nombres ordonnés de la colonne A il est donc en IV A.
2 est le plus petit nombre de la ligne IV, le plus grand est donc 16 qui est un carré, 16 est donc en IV C, le dernier carré 4 va donc en II C (fig 2).
La ligne I contient deux nombres pairs multiples 3 non classés en décroissant, il s'agit de 6 et 12 (fig 3).

Le nombre 3 n'est voisin ni de 2 ni de 4, il n'est pas en II A d'après la règle sur la colonne A il est donc en IV D (fig 4).

Compte tenu des nombres déjà placés, la somme des trois premiers nombres de la ligne III est au moins 5 + 7+1 = 13, c'est donc 13 ou 14, ce n'est pas 13 car la ligne III ne contiendrait que des nombres impairs, c'est donc 14 qui va en III D ; la seule solution est 5 + 8 + 1 = 14 dans cet ordre car 5 n'est pas voisin de 4 (fig 5).
7 n'étant pas voisin de 8 va en II D (fig 6)
Il faut un nombre pair supplémentaire dans la colonne A, c'est 10 (fig 7).
11 n'est pas voisin de 10 donc il est en IV B et 13 est en II B (fig 8).

	A	B	C	D
I	15			
II				
III			1	
IV				

Fig 1

	A	B	C	D
I	15		9	
II			4	
III			1	
IV	2		16	

Fig 2

	A	B	C	D
I	15	6	9	12
II			4	
III			1	
IV	2		16	

Fig 3

	A	B	C	D
I	15	6	9	12
II			4	
III			1	
IV	2		16	3

Fig 4

	A	B	C	D
I	15	6	9	12
II			4	
III	5	8	1	14
IV	2		16	3

Fig 5

	A	B	C	D
I	15	6	9	12
II			4	7
III	5	8	1	14
IV	2		16	3

Fig 6

	A	B	C	D
I	15	6	9	12
II	10		4	7
III	5	8	1	14
IV	2		16	3

Fig 7

	A	B	C	D
I	15	6	9	12
II	10	13	4	7
III	5	8	1	14
IV	2	11	16	3

Fig 8

ARA mon perroquet

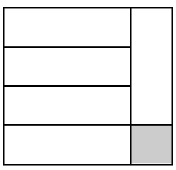
RAARA peut être remplacé par RRARARA et RRARARA peut être remplacé par RRAAA.

Quand on remplace A par RAR ou RAR par A, le nombre de A n'est pas modifié or RARAR contient deux A et RAARA contient trois A, RARAR ne peut pas être formé à partir de RAARA.

Est-ce que ARARA peut être formé à partir de RAARA ?
Le nombre de A est convenable.
Quand on remplace un A de rang n par RAR, on introduit un R de rang n et un R de rang n + 2, les rangs des R qui suivent augmentent de 2 ; la somme des rangs des R augmente donc d'un nombre pair.
La somme des rangs des R dans ARARA est : 2 + 4= 6
La somme des rangs des R dans RAARA est : 1 + 4 = 5
ARARA ne peut pas être formé à partir de RAARA .

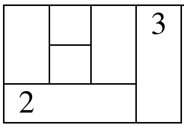
Une case en trop

On veut paver une grille 4 x 4 qui comporte 16 cases avec des rectangles 1 x 3, on peut recouvrir 15 cases, il reste une case non recouverte.

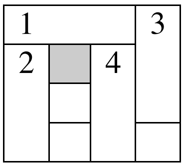


Le petit carré non recouvert peut être l'un des coins (grisé sur le dessin), comme le montre l'exemple ci-contre à une rotation près.

1		4	



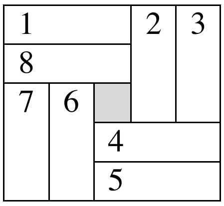
Essayons avec un autre carré de bord, carré grisé sur le dessin.
Le dessin indique dans quel ordre on a placé les rectangles 1 x 3 qui s'imposent et on voit qu'on ne peut pas finir.



Essayons avec un carré central grisé sur le dessin ; à une symétrie près on doit placer un rectangle comme celui qui est noté 1, 2 et 3 s'imposent alors, puis 4 et on ne peut pas finir.

Le carré non recouvert est l'un des coins

Grille 5 x 5 :



On peut recouvrir 24 cases comme montré ci-contre où le carré central n'est pas recouvert.

Notons L le numéro de la ligne et C le numéro de la colonne et numérotons les cases : L + C modulo 3, c'est-à-dire
- 0 si L + C est de la forme 3 k,
- 1 si L + C est de la forme 3 k + 1,
- 2 si L + C est de la forme 3 k + 2.

Chaque rectangle 1 x 3 recouvre une case 0, une case 1 et une case 2 ; quand on pose de tels rectangles il y a autant de cases 0 que de cases 1 que de cases 2 recouvertes.

2	0	1	2	0
0	1	2	0	1
1	2	0	1	2
2	0	1	2	0
0	1	2	0	1

Il y a 9 cases 0, 8 cases 1 et 8 cases 2, il reste une case 0 non recouverte.
Si on arrive à recouvrir 24 cases, toutes les cases portant les numéros 1 et 2 sont recouvertes et cela reste vrai si on effectue des numérotations symétriques (L remplacé par 6 – L ou C remplacé par 6 – C).

0	2	1	0	2
1	0	2	1	0
2	1	**0**	2	1
0	2	1	0	2
1	0	2	1	0

0	1	2	0	1
2	0	1	2	0
1	2	**0**	1	2
0	1	2	0	1
2	0	1	2	0

Avec ces deux symétries, on voit que la seule case qui porte toujours le numéro 0 est la case centrale

Grille 7 x 7 : On a 16 Cases 0, 16 cases 1, 17 cases 2 , **une case 2 sera non recouverte.**

2	0	1	**2**	0	1	**2**
0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	**2**	0	1	**2**
0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	**2**	0	1	**2**

2	1	0	**2**	1	0	**2**
0	2	1	0	2	1	0
1	0	2	1	0	2	1
2	1	0	**2**	1	0	**2**
0	2	1	0	2	1	0
1	0	2	1	0	2	1
2	1	0	**2**	1	0	**2**

2	0	1	**2**	0	1	**2**
1	2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2	0
2	0	1	**2**	0	1	**2**
1	2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2	0
2	0	1	**2**	0	1	**2**

On trouve 9 possibilités

Grille 8 x 8 : On a 22 cases 0, 21 cases 1, 21 cases 2 , **une case 0 sera non recouverte.**

2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	**0**	1	2	**0**	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	**0**	1	2	**0**	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1

0	2	1	0	2	1	0	2
1	0	2	1	0	2	1	0
2	1	**0**	2	1	**0**	2	1
0	2	1	0	2	1	0	2
1	0	2	1	0	2	1	0
2	1	**0**	2	1	**0**	2	1
0	2	1	0	2	1	0	2
1	0	2	1	0	2	1	0

0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	**0**	1	2	**0**	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	**0**	1	2	**0**	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0

On trouve 4 possibilités

Généralisation
Si n = 3k + 1, il reste une case 2 non recouverte et par symétrie seules les cases avec L et C congrus à 1 conviennent soit $(k+1)^2$ cases.
Si n = 3k + 2, il reste une case 0 non recouverte et par symétrie seules les cases avec L et C congrus à 0 conviennent soit k^2 cases.

Objectif dix sur dix

<table>
<tr><td>n° de la FRAME</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">9</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>Score</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>8</td><td>4</td><td>0</td><td>10</td><td></td><td>10</td><td></td><td>10</td><td></td><td>7</td><td>3</td><td>0</td><td>5</td><td>7</td><td>1</td><td>8</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Points acquis</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">14</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">30</td><td colspan="2">27</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">8</td><td colspan="3">16</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">22</td><td colspan="2">26</td><td colspan="2">56</td><td colspan="2">83</td><td colspan="2">103</td><td colspan="2">113</td><td colspan="2">118</td><td colspan="2">126</td><td colspan="3">142</td></tr>
</table>

Le score maximal est obtenu si on ne fait que des STRIKE soit 12 lancers (10 + 2 supplémentaires à la dixième FRAM E) : total 300 points.

A la fin d'une partie, on a fait 19 lancers avec les scores ci-dessous :

Nombre de quilles tombées	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de lancers	3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	3

Donnons le score minimal et celui maximal que l’on peut faire avec ces 19 lancers.

Pour un score maximal on doit réaliser le maximum de STRIKE et le maximum de SPARE, en les classant de sorte que dans les deux ou un lancers qui suivent un strike ou un spare le score soit maximal :

<table>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">9</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td><td>4</td><td>7</td><td>3</td><td>8</td><td>2</td><td>8</td><td>2</td><td>9</td><td>1</td><td>10</td><td></td><td>10</td><td></td><td>10</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td colspan="2">16</td><td colspan="2">33</td><td colspan="2">51</td><td colspan="2">69</td><td colspan="2">88</td><td colspan="2">108</td><td colspan="2">138</td><td colspan="2">163</td><td colspan="3">178</td></tr>
</table>

Score minimal :
Remarquons d’abord que s’il y a x strikes et y lancers supplémentaires, on a :
$x + 2(10 - x) + y = 19$ d’où $x = y + 1$ et il y a donc 3 cas à examiner.
Pour $x = 3$ on trouve 105 comme minimum
Pour $x = 2$ on trouve 104
Pour $x = 1$ on trouve 105 avec (10, -) (0, 9) (4, 6) (0, 10) (0, 10) (2, 8) (1, 8) (3, 6) (2, 7) (4,5)

Solution avec 104

<table>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">9</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>10</td><td>-</td><td>0</td><td>3</td><td>10</td><td>-</td><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>0</td><td>9</td><td>2</td><td>8</td><td>0</td><td>8</td><td>2</td><td>7</td><td>4</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="2">13</td><td colspan="2">16</td><td colspan="2">32</td><td colspan="2">38</td><td colspan="2">48</td><td colspan="2">57</td><td colspan="2">67</td><td colspan="2">75</td><td colspan="2">84</td><td colspan="3">104</td></tr>
</table>

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2010

Les corrigés LYCÉE

Survol du Limousin

a) Parti de Limoges, l'hélicoptère peut desservir en premier l'une des 7 villes, il a 6 choix pour desservir la deuxième, 5 choix pour la troisième, …., 2 choix pour la sixième, 1 choix pour la septième ; il y a donc 7×6×5×4×3×2×1 = 7 ! possibilités ; c'est le nombre de permutations des 7 villes à desservir. 7 ! = 5040.

b) En toute rigueur il faut examiner tous les parcours possibles pour être sûr d'avoir les distances maximale et minimale, ce que fait instantanément un programme avec un ordinateur (il n'y a que 5040 trajets à examiner) ; cependant, la position de Limoges à l'intérieur du polygone formé par les sept villes permet de deviner quel sera le trajet le plus court :

Limoges	**Rochechouart**	**Bellac**	**Guéret**	**Aubusson**	**Ussel**	**Tulle**	**Brive**	**Limoges**	**Total**
	33	36	64	33	45	52	21	77	361

On construit un trajet susceptible d'être le plus long en s'éloignant au maximum à chaque étape et en évitant des étapes courtes ; on obtient :

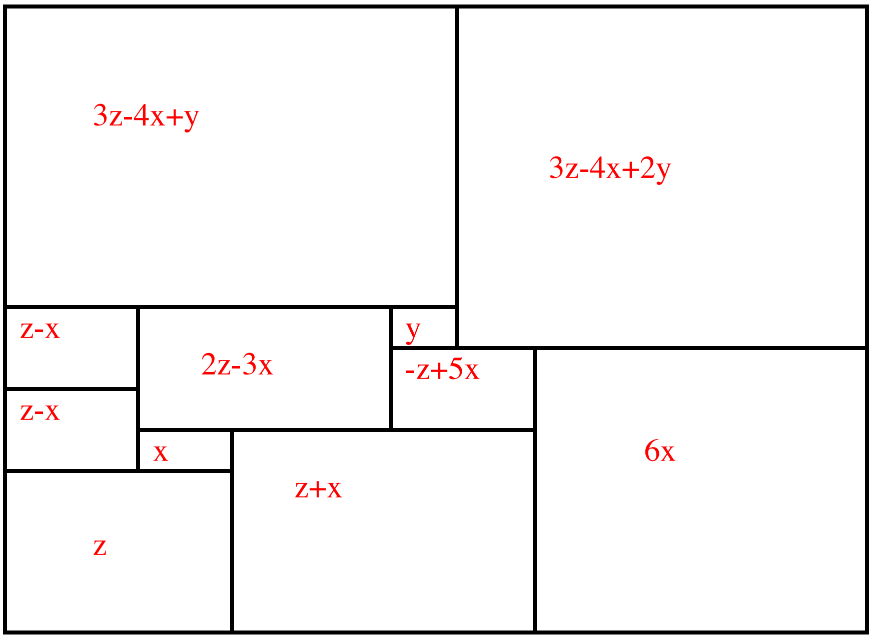
Limoges	**Brive**	**Guéret**	**Tulle**	**Bellac**	**Ussel**	**Rochechouart**	**Aubusson**	**Limoges**	**Total**
	77	114	100	109	116	120	106	73	815

En échangeant Brive et Tulle on obtient un trajet un peu moins long : 814 km.

c) Dans le cas où l'hélicoptère a une autonomie de 200 km, il n'est pas possible de passer par Aubusson ou Tulle quand on va à Ussel ; il y a donc nécessairement le trajet Limoges, Ussel, Limoges : 88+88=176.
On doit ensuite faire le trajet Limoges, Tulle, Brive, Limoges : 74+21+77=172
puis Limoges, Guéret, Aubusson, Limoges : 61+33+73=167
et enfin Limoges, Rochechouart, Bellac, Limoges : 33+36+34=103
la distance totale parcourue est de 618 km.

Des carrés pour un rectangle

Chaque carré a pour côté 5m et pour aire $25m^2$; 594 tels carrés ont pour aire totale 594×25.
Les dimensions *l* et L du rectangle sont telles que *l*+L=1005 et chacune doit être divisible par 5 ; on peut donc poser *l* =5x et L=5y d'où x+y=201 et x×y=594.
x doit être au moins égal à 3 (sinon x×y=594 entraîne y>201) ; on essaie x=3 d'où y=198 qui convient car 3×198=594. C'est la seule solution avec x<y.
L=5×198=990 et *l* = 15.
Si on veut partager le rectangle en carrés de côté c, c doit être diviseur commun à 990 et 15, or 15 est diviseur de 990, c doit donc être diviseur de 15. Les 3 autres façons de partager le rectangle sont donc: c=1 (14850 carrés), c=3 (1650 carrés) et c= 15 (66 carrés).



Appelons z le côté du carré situé en bas à gauche ; plusieurs carrés ont des côtés qui s'expriment en fonction de z et x : z - x, z - x, z + x, 2z - 3x, -z + 5x, 6x.
Deux autres ont des mesures qui s'expriment en fonction de z, x et y : 3z - 4x + y et 3z - 4x + 2y.
Il y a deux conditions supplémentaires:
2z -3x = y + (5x-z) qui donne y = 3z - 8x
(-z + 5x) + 6x = y + (3z - 4x + 2y) qui donne 15x = 4z + 3y d'où z = 3x et y = x
On en déduit que le grand rectangle a pour côtés 6x +7x =13x, c'est donc un carré (on n'avait pas besoin de cette hypothèse !)
Si on prend comme unité x = 1 le côté du grand carré vaut 13.

2010

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	7	**8**	**9**	**10**
11	**12**	13	**14**	**15**	**16**	17	**18**	19	**20**
21	**22**	23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	29	**30**

Somme des entiers répondant à la question (en gras ensemble A) : 345
Leur moyenne : 345/22 = 15 +15/22

De 31 à 60, on a 22 nouveaux nombres, les précédents auxquels on a ajouté 30, leur somme est donc 345 + 22×30 ; donc de 1 à 60, on a 44 nombres de somme 345×2 + 22×30 et de moyenne (345×2 + 22×30)/44 ; soit : 345/22 +15 = 30 + 15/22

De 1 à 90 on a 22×3 nombres de somme 345 + (345 + 22×30) + (345 + 22×60)
De moyenne 345/22 + (22×30 + 22×60)/22×3 = 345/22 + 30 = 45 + 15/22

On peut conjecturer que pour chaque nouvelle tranche de 30 nombres, la moyenne augmente de 15.
On obtiendrait pour n = 2010 = 30×67, une moyenne de 345/22 + 15×66 = 1005 + 15/22.

Montrons que la conjecture est vraie.
Les nombres d'une tranche s'écrivent 30p + x avec x entre 1 et 30 et sont divisibles par 2, 3 ou 5 si et seulement si x l'est c'est-à-dire appartient à A, leur somme est donc 22×30×p + 345.
De 1 à 30k, on a 22k nombres de somme S:
S= 345 + (345 + 22×30) + (345 + 22×60) + ··· + [345 + 22×30×(k-1)]
S= 345×k + 22×30× [1+2+···+ (k-1)] =345×k + 22×30×k× (k-1)/2
S= (22×15 +15) ×k+22×15×k × (k-1)=22×15×k^2+15k
Moyenne : [22×15×k^2+15k]/[22k]=15k +15/22

Remarque : Ce calcul nécessite de connaître le résultat 1+ 2 +···+ (k-1) = k × (k-1)/2

-- Autre méthode
On remarque que pour les entiers de 1 à 30 divisibles par 2, 3 ou 5, on peut les grouper par paires de somme 30 : (2 + 28, 3 + 27, …14+16) sauf 15 et 30 qui restent seuls, d'où un total de
(22-2) ×15 +15 +30 = (22 +1) ×15 et une moyenne de 15 +15/22.

2010 = 30×67, donc 22×67 entiers entre 1 et 2010 et divisibles par 2, 3 ou 5 (car 2 divise 30×n+k si et seulement si 2 divise k, idem pour 3 et 5), qu'on peut grouper en (22×67-2) paires de somme 2010 = 2×1005, en mettant de côté 1005 et 2010,
d'où un total de : (22×67-2) × 1005 + 1005 + 2×1005= (22×67 +1) × 1005
et une moyenne de : 1005 +1005/ (22×67)=1005 +15/22.

N=30k, donc 22k entiers entre 1 et N et divisibles par 2, 3 ou 5, qu'on peut grouper en (22k-2) paires de somme N=2×15k, en mettant de côté N/2 =15k et N = 2×15k.
On obtient un total de : (22k-2) ×15k +15k+2×15k = (22k+1) ×15k
et une moyenne de : 15k +15k/(22k) =15k +15/22.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2011

Les corrigés LYCÉE

Une histoire de moyennes

Soit S la somme des n nombres, $M = S / n$
$S = M \times n$, de plus $S + 1 = (M - 67) \times (n + 1)$ et $S + 2011 = (M + 67) \times (n + 1)$
En faisant la différence des deux dernières égalités, on obtient : $2010 = (n + 1) \times 67 \times 2$
D'où $n + 1 = 15$, $n = 14$
La différence des deux premières égalités donne : $1 = (M - 67) \times 15 - M \times 14 = M - 15 \times 67$
$M = 1 + 15 \times 67 = 1006$

Où se cache 2011 ?

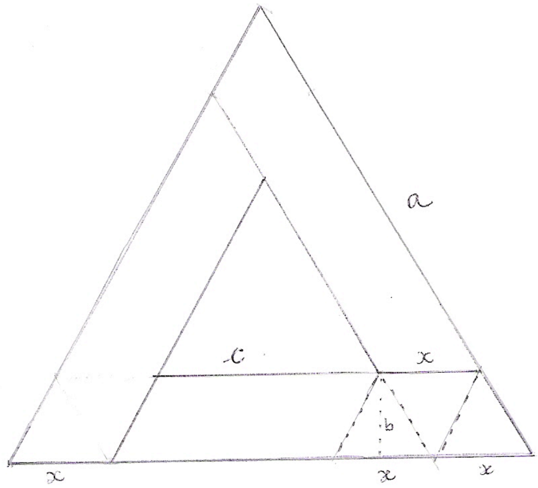
La ligne 1 contient 1 nombre
La ligne 2 contient 3 nombres : 2, 3, 4, le dernier est 2^2
La ligne 3 contient 5 nombres : 5, 6, 7, 8, 9, le premier est $2^2 + 1$, le dernier est 3^2

La ligne n contient $(2n - 1)$ nombres, le premier est $(n - 1)^2 + 1$, dernier est n^2 (récurrence)

Sur la ligne commençant par 101, on va de 101 à $11^2 = 121$
120 est dans la colonne commençant par 10^2
119 est dans la colonne commençant par 9^2
118 est dans la colonne commençant par 8^2
117 est dans la colonne commençant par 7^2

$44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$ donc 2011 est entre 44^2 et 45^2
Il est sur la ligne qui se termine par 45^2 et qui commence par $44^2 + 1 =$ **1937**
2025 est dans la colonne qui commence par $2025 = 45^2$
2024 est dans la colonne qui commence par 44^2
2023 est dans la colonne qui commence par 43^2
.
.
2011 est dans la colonne qui commence par $31^2 =$ **961**

Triangle de signalisation



Aire du triangle équilatéral de côté a : A $= a^2 \times \sqrt{3} / 4$
Aire du triangle équilatéral de côté c : C $= c^2 \times \sqrt{3} / 4$
D'autre part, $a = c + 3x$ et $b = x \times \sqrt{3} / 2$

Les quatre régions ayant la même aire, $A = 4C$ donc $a = 2c$
$c + 3x = 2c$ donc $c = 3x$ et $a = 6x$ d'où l'on tire : $a / b = 4\sqrt{3}$

Passez au peigne fin !

Si $n = 1$ ou si $p = 1$ et $n = 2011$, le peigne n'a pas de dent ! Nous éliminerons ces deux cas pour la suite.
L'une des dimensions, par exemple n, doit être impaire et on a : $n \geq 3$ et $p \geq 2$.
Le nombre de dents est alors $(n+1) / 2$
Aire intérieure : aire des dents plus aire de la base.
Aire intérieure : $A = (p-1) \times (n+1) / 2 + 1 \times n = (np + p - n - 1 + 2n) / 2$

$= (np + p + n + 1 - 2) / 2 = [(n+1) \times (p+1) - 2] / 2 = [(n+1) \times (p+1) - 2] / 2$

Périmètre du peigne : $P = 2n + (n+1) \times (p-1) + 2 = np + n + p + 1 = (n+1) \times (p+1) = 2A + 2$.

$A = 2011$ est équivalent à $(n+1) \times (p+1) = 4024$.

Les décompositions de 4024 en produit de deux facteurs sont :
$4024 = 1 \times 4024 = 2 \times 2012 = 4 \times 1006 = 8 \times 503$ (503 est un nombre premier)

n étant impair, n + 1 est pair, n + 1 ≥ 4 et p + 1 ≥ 3

n + 1	4	8	1006
n	**3**	**7**	**1005**
p + 1	1006	503	4
p	**1005**	**502**	**3**

Pour n = 3 et p = 1005 le peigne a 2 dents et sa hauteur est 1005
Pour n = 7 et p = 502 le peigne a 3 dents et sa hauteur est 502
Pour n = 1005 et p = 3 le peigne a 502 dents et sa hauteur est 3

Dans les 3 cas le périmètre est le même, P = 2A + 2 = 4024.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

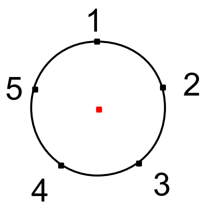
LIMOUSIN

2012

Les corrigés LYCÉE

Une disposition en cercle

Une disposition en cercle



La disposition proposée par le texte sera notée 1, 2, 3, 4, 5 ou 1, 5, 4, 3, 2 ou n'importe quelle autre permutation circulaire

1- On remarque que chaque nombre est un diviseur de la somme de ses deux voisins :
1 est entre 2 et 5, 1 divise 7 ; 2 est entre 1 et 3, 2 divise 4 ; 3 est entre 2 et 4, 3 divise 6
4 est entre 3 et 5, 4 divise 8 ; 5 est entre 4 et 1, 5 divise 5
Remarquons que pour 3 entiers consécutifs, celui du milieu est la demi-somme des deux autres, c'est donc un diviseur de cette somme, d'autre part 1 est un diviseur de n'importe quelle somme.

2- Les sommes de deux entiers pris entre 1 et 5 sont comprises entre 3 et 9 et 5 est le seul multiple de 5 compris entre 3 et 9 et 5 = 1+4 = 2+3.
Les voisins possibles pour 5 sont donc 1 et 4 ou 2 et 3.
Premier cas : Les voisins de 5 sont 1 et 4
Outre la disposition du texte on peut avoir cette autre disposition pour 2 et 3 : 1, 3, 2, 4, 5
Et la propriété n'est pas vérifiée.
Deuxième cas : Les voisins de 5 sont 2 et 3 ; on a deux possibilités pour placer 1 et 4 :
2, 5, 3, 4, 1 et 2, 5, 3, 1, 4 ; seule la première convient.
A une rotation ou symétrie près, les seules solutions sont : 1, 2, 3, 4, 5 et 1, 2, 5, 3, 4

3- Pour les entiers de 1 à 7, la disposition 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 est telle que chaque nombre est un diviseur de la somme de ses deux voisins :
Il suffit de contrôler pour 7 : 7 est entre 6 et 1 et 7 divise 7.
Les sommes de deux entiers pris entre 1 et 7 sont comprises entre 3 et 13
Le seul multiple de 7 compris entre 3 et 13 est 7, et 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4

On peut donc avoir les séquences 1, 7, 6 ou 2, 7, 5 ou 3, 7, 4.
Premier cas : 6 est suivi de 5 car 12 est le seul multiple de 6 convenable ; on obtient 1, 7, 6, 5.
Par le même raisonnement on obtient 1, 7, 6, 5, 4, 3, 2 ou à symétrie ou rotation près 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, c'est la disposition déjà citée.
Deuxième cas : 5 est suivi de 3 car 10 est le seul multiple de 5 convenable.
3 peut être suivi de 1 ou 4 après quoi il reste deux nombres à placer d'où les possibilités :
2, 7, 5, 3, 1, 4, 6 ou 2, 7, 5, 3, 1, 6, 4 ou 2, 7, 5, 3, 4, 1, 6 ou 2, 7, 5, 3, 4, 6, 1, aucune ne convient.
Troisième cas : 4 est suivi de 1 ou 5. D'autre part, 6 est obligatoirement entre 1 et 5 (car 4 n'est pas voisin de 6).
Si 4 est suivi de 1, on obtient 3, 7, 4, 1, 6, 5, 2 qui ne convient pas.
Si 4 est suivi de 5, on obtient 3, 7, 4, 5, 6, 1, 2 qui convient, d'où la solution : 1, 2, 3, 7, 4, 5, 6.

4- Généralisation
Pour les nombres de 1 à 5 on a obtenu les suites 1, 2, 3, 4, 5 et 1, 2, 5, 3, 4 ; on remarque que c'est la place 5 qui diffère.
Pour les nombres de 1 à 7 on a obtenu les suites 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 1, 2, 3, 7, 4, 5, 6 ; on remarque que c'est la place de 7 qui diffère.
Plus généralement, pour les entiers de 1 à 2n +1 on peut vérifier que conviennent les séquences
1, 2, 3, …..n-1, n, n+1, n+2, ………….2n-1, 2n, **2n+1**
1, 2, 3, …..n-1, n, **2n+1**, n+1, n+2, ………….2n-1, 2n

Il suffit de contrôler pour les entiers n, 2n + 1, n + 1, 2n, ce qui est facile à vérifier.

Questions ouvertes :
Pour n = 5 ou n = 7 les solutions ci-dessus sont les seules ; pour un entier impair y a-t-il toujours deux solutions seulement ? Qu'en est- il pour un entier pair ?

Somme d'entiers qui diffèrent de 1

1- Les suites les plus courtes qu'on peut écrire :
Un terme : **1** ;
Deux termes : 1 + 2 = **3**
Trois termes : 1 + 2 + 1 = **4** ou 1 + 2 + 3 = **6**
Avec un nombre supérieur de termes on atteint ou dépasse 6 donc 2 et 5 ne peuvent pas être obtenus.
(1 + 2) + (1 + 2) + …… + (1 + 2) permet d'obtenir tous les nombres de la forme 3n
(1 + 2) + (1 + 2) +……+ (1 + 2) + 1 permet d'obtenir tous les nombres de la forme 3n +1
1 + 2 + 3 + 2 = 8
(1 + 2 + 3 + 2) + (1 + 2) + (1 + 2) +……+ (1 + 2) permet d'obtenir tous les nombres de la forme 3n + 2 à partie de 8.

2- Pour obtenir la suite la plus longue convenant pour 100, il suffit de n'employer que des 1 et des 2 ; 100 est de la forme 3n + 1, voir ci-dessus : (1 + 2) + (1 + 2) +……+ (1 + 2) + 1
33 fois
3- Pour obtenir une suite la plus courte on essaie d'utiliser des nombres de plus en plus grands :
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11+ 12 + 13 = 91 on glisse 9 = 4 + 5 après 5
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + (4 + 5) + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + **13** = 100 (15 termes, le plus grand est 13)
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6+ 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78 il manque 22 = 5 + 6 + 11.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + (5 + 6) + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + **12** + 11 =100 (15 termes, le plus grand est 12)
(1 + 2 + 3 + ……….. + 10 + 11) = 66, il manque 34
En écrivant 34 sous forme de la somme de deux impairs inférieurs ou égaux à 11, on obtient d'autres décompositions en 15 termes :
34 = 13 + 21 = (6 + 7) + (10 + 11)
34 = 15 + 19 = (7 + 8) + (9 + 10)
34 = 17 + 17 = (8 + 9) + (8 + 9)
On glisse les sommes entre parenthèses à une place convenable.
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (6 + 7) + 8 + 9 + (10 + 11) + 10 + **11**
1 + 2 + 3 + 4 + 5+ 6 + 7 + 8 + (7 + 8) + 9 + 10 + **11**+ (10 + 9)
1 + 2 + 3 + 4 + 5+ 6 + 7 + 8 + (7 + 8) + 9 + 10 + (9 + 10) +**11**
1 + 2 + 3 + 4 + 5+ 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + **11**+ (10 + 9) + (8 + 7)
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + (8 + 9) + (8 + 9) + 10 + **11**
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + **10** + (9 + 10 + 9 + 8 + 9)
1 + 2 + 3 + 4 + 5+ 6 + 7 + 8 + 9 + (8 + 9) + **10** + (9 + 10 + 9)

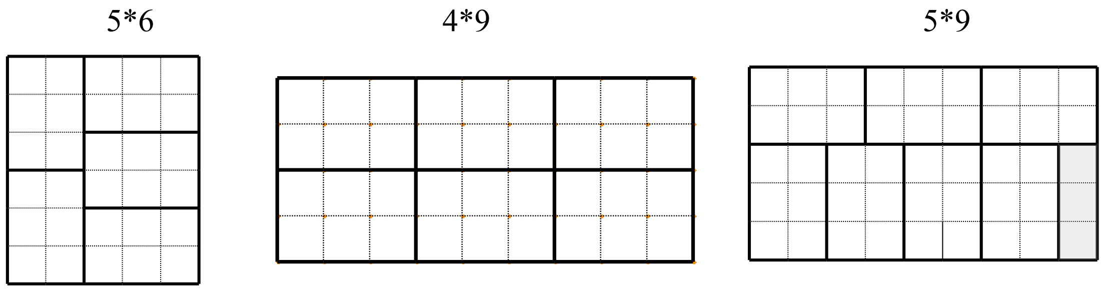
Existe-t-il des sommes avec 14 termes ?
Soit p le plus grand des termes écrits, la somme des nombres de 1 à p figure nécessairement dans l'écriture.
Si p = 13, 91 + a = 100, a = 9 qu'on ne peut glisser dans la suite.
Si p = 12, 78 + a + b = 100, a + b = 22 avec a et b inférieurs ou égaux à 12 ; a = 11 et b = 11 ou a = 10 et b = 12 qu'on ne peut glisser dans la suite.
Si p = 11, le maximum en 14 termes est 1 +….+ 11 + 10 + 11 + 10 = 97 on ne peut pas atteindre 100 en 14 termes dont le plus grand est 11
Si p = 10, le maximum en 14 termes est 1 + ….+ 10 + 9 + 10 + 9 + 10 = 93 on ne peut pas atteindre 100 en 14 termes dont le plus grand est 10.

4- Généralisation

On notera t(p)= 1 + 2 +…+ (p-1) + p.
Si n est la somme de p entiers qui diffèrent de 1 (en commençant par 1) alors n est au maximum égal à t(p). De plus n a la même parité que t(p) puisque n et t(p) sont obtenus en ajoutant à 1 un entier pair, puis un impair, puis un pair,…, avec le même nombre d'entiers.
Soit n un entier strictement compris entre t(p-1) et t(p) avec p > 3. Notons f(n) le minimum de termes quand on exprime n comme somme d'entiers qui diffèrent de 1. f(n) est donc au moins égal à p.
Si f(n) = p alors t(p)-n est pair. Réciproquement, si n = t(p)-2k avec 1 < k <p/2 on peut écrire :
n = 1 +2 +…+ (p-k) + (p-k-1) + (p-k) +…+ (p-2) car on a retranché (p-1) + p et ajouté (p-k-1) + (p-k).
On a aussi t(p)-2 = 1 + 2 +…+ (p-2) + (p-1) + (p-2).
Conclusion : pour les entiers t(p)-2k compris entre t(p-1) et t(p) on a montré que f(n) = p.
Si t(p)-n est impair, on a donc f(n) > p.
Si f(n) = p+1 alors t(p+1)-n est pair. Réciproquement, si t(p+1)-n est pair (c'est-à-dire si p est pair), n = t(p-1) + 2k + 1 (car t(p+1)-t(p-1) = 2p +1) ; si k>0, on peut insérer (k+1)+ k dans l'écriture de t(p-1): n = 1 + 2 +…+ k+ (k+1) + k+ (k+1) +…+ (p-1).
Si k = 0 on a t(p-1)+1 = (1+2)+ 1 + 2 +…+ (p-2) + (p-1)
Conclusion : si p est pair, pour les entiers t(p)-(2k+1) compris entre t(p-1) et t(p) on a montré que f(n) = p+1.
Enfin, si t(p)-n et t(p+1)-n sont impairs (cela entraîne que p est impair), on a f(n) > p+1. Mais on peut écrire : n = t(p)-(2k+1) = (1+2) + t(p) - 2(k+2) et comme f(t(p)-2(k+1)) = p, on a bien f(n) = p+2.

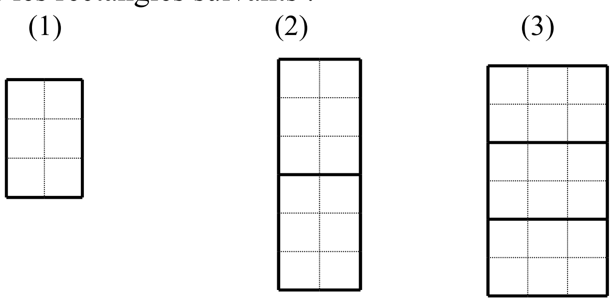
Pavage avec des rectangles 2*3

1-Pavage pour les grilles 5*6, 4*9, 5*9



Pour la grille 5*9, il y a 45 carrés, chaque rectangle 2*3 recouvre 6 carrés, il reste 3 carrés non recouverts.

2- Pour qu'il ne reste aucun carré non recouvert il faut que le produit a*b soit multiple de 6, de plus a et b doivent être au moins égaux à 2. Ces conditions sont-elles suffisantes ?
Considérons les rectangles suivants :

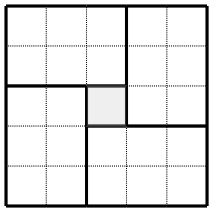


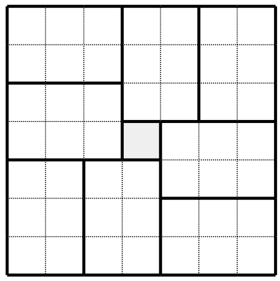
En juxtaposant des rectangles du type (1) on peut paver les rectangles a*b où a est multiple de 3 et b pair ($b \geq 2$).
En juxtaposant des rectangles du type (2) on peut paver les rectangles a*b où a est multiple de 6 et b pair ($b \geq 2$).
En juxtaposant un rectangle du type (3) et des rectangles du type (2), on peut paver les rectangles a*b où a est multiple de 6 et b impair ($b \geq 3$).

3- Si on ne peut pas paver complètement la grille, le nombre de carrés non recouverts peut être égal à 1, 2, 3, 4 ou 5 en effet, si p est le reste de la division de ab par 6, ab = 6n + p, le nombre minimum de carrés non recouverts est p.

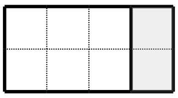
Exemples :

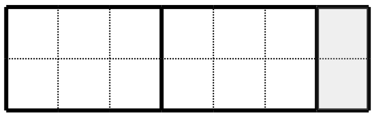
p = 1, grilles 5*5 ou 7*7

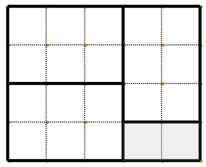




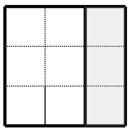
p = 2, grilles 2*4 ou 2*7 ou 4*5

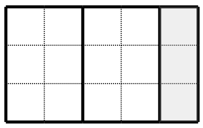


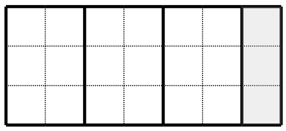




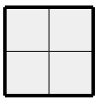
p = 3, grilles 3*3 ou 3*5 ou 3*7

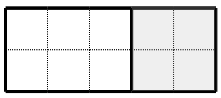


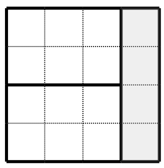


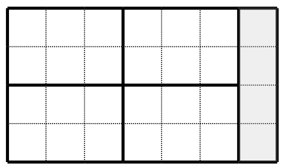


p = 4, grilles 2*2 ou 2*5 ou 4*4 ou 4*7

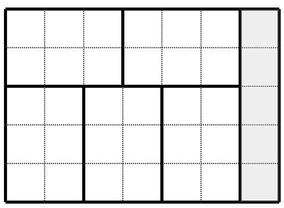








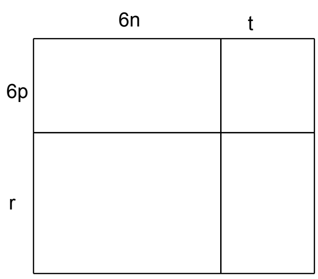
p = 5, grille 5*7



4- On suppose a et b au moins égaux à 2 et non multiples de 6 ; on peut écrire a = 6p + r et b = 6n + t avec r et t égaux à 2, 3, 4, 5 ou 7. Le produit ab n'est pas multiple de 6 pour les couples (r, t) suivants : (2, 2) (2, 4) (2, 5) (2, 7) (3, 3) (3, 5) (3, 7) (4, 4) (4,5) (4, 7) (5, 5) (5, 7) (7, 7).

On peut décomposer la grille à recouvrir en 4 rectangles dont 3 peuvent être entièrement recouverts puisque l'une des dimensions est multiple de 6 ; d'après ce qui précède, le nombre de carrés non recouverts pour le rectangle de dimensions r et t est au minimum 1, 2, 3, 4, ou 5.

On a

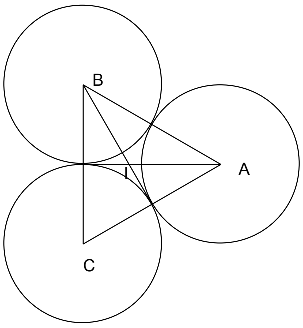


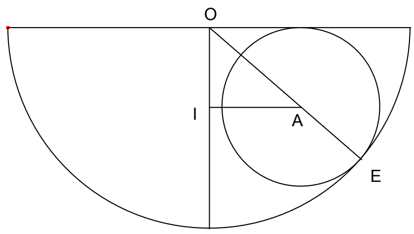
vu ci-dessus tous les couples (r, t) possibles.

On peut donc toujours paver la grille en ne laissant au maximum que 5 carrés non recouverts.

La demi-sphère

Les trois boules sont placées à la même hauteur et sont tangentes deux à deux et tangentes au couvercle.
Le plan passant par les centres des trois boules les coupe en trois cercles deux à deux tangents et dont les centres A, B, C forment un triangle équilatéral de côté 10 cm, de centre I situé sur l'axe de la sphère.





IA = IB = IC = $10 \times \sqrt{3}/2 \times 2/3 = 10/3 \times \sqrt{3}$
Dans le dessin en coupe par le plan passant par l'axe de la sphère et par A centre de l'une des boules :
OI = 5 ; AI = $\frac{10}{3} \times \sqrt{3}$; $OA^2 = 25 + \frac{100}{3} = \frac{175}{3}$; OA = $5 \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$
OE = $5 \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} + 5$: c'est le rayon de la sphère.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2013

Les corrigés LYCÉE

2 + 0 + 1 = 3

1) Pour former un nombre avec les quatre chiffres distincts 1, 2, 3 et 6 on choisit d'abord le premier chiffre : il y a 4 possibilités. Ensuite on choisit le deuxième chiffre : il n'y a plus que trois possibilités. Puis on choisit le troisième chiffre : il ne reste plus que deux possibilités. Pour le dernier chiffre il ne reste plus qu'une possibilité. Il y a donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ possibilités (on dit factorielle 4).

2) Pour former un nombre compris entre 1000 et 9999 avec les quatre chiffres distincts 0, 1, 2 et 3 on choisit d'abord le premier chiffre : il y a seulement 3 possibilités car 0 est exclu. Ensuite on choisit le deuxième chiffre : il reste trois possibilités car on peut maintenant choisir 0 mais pas le premier chiffre déjà choisi. Puis on choisit le troisième chiffre : il ne reste plus que deux possibilités. Pour le dernier chiffre il ne reste plus qu'une possibilité. Il y a donc au total $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ possibilités.

3) Dénombrons les nombres à quatre chiffres distincts (compris entre 1000 et 9999) tels que le plus grand des chiffres soit égal à la somme des trois autres.

Premier cas : l'un des chiffres est 0. Les autres chiffres sont alors a, b et a+b avec 0<a<b et a+b<10.
Pour a=1 il y a 7 valeurs pour b : 2, 3, …, 8.
Pour a=2 il y a 5 valeurs pour b : 3, 4, …, 7.
Pour a=3 il y a 3 valeurs pour b : 4, 5 et 6.
Pour a=4 il y a 1 valeur pour b : 5.
Au total il y a 16 possibilités pour (0, a, b, a+b). D'après la question 2 on peut former 18 entiers convenables pour chacune de ces possibilités, donc $16 \times 18 = 288$ nombres.

Deuxième cas : les chiffres sont différents de 0. Ce sont a, b, c et a+b+c avec 0<a<b<c et a+b+c<10.
Pour a=1 et b=2 il y a 4 valeurs pour c : 3, 4, 5 et 6.
Pour a=1 et b=3 il y a 2 valeurs pour c : 4 et 5.
Pour a=2 et b=3 il y a 1 valeur pour c : 4.
Au total il y a 7 possibilités pour (a, b, c, a+b+c). D'après la question 1 on peut former 24 entiers convenables pour chacune de ces possibilités, donc $7 \times 24 = 168$ nombres.

Conclusion : Il y a 288 + 168 = 456 nombres à quatre chiffres distincts (compris entre 1000 et 9999) tels que le plus grand des chiffres soit égal à la somme des trois autres.

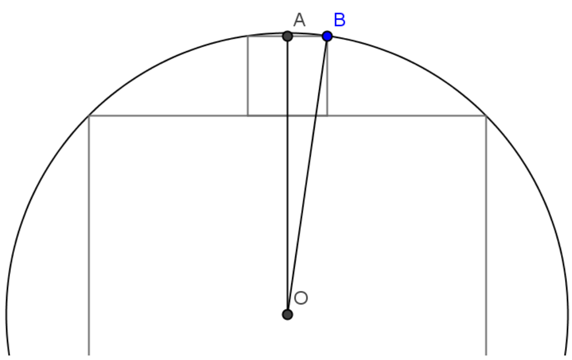
Différence de deux carrés d'entiers

1) $0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$. Calculons les différences de deux de ces carrés.
De 1 en 1 : 1, 3, 5, 7, 9.
De 2 en 2 : 4, 8, 12, 16.
De 3 en 3 : 9, 15, 21.
De 4 en 4 : 16, 24.
On a donc obtenus seulement les entiers 1, 3, 4, 5, 7, 8 et 9. Les entiers 2, 6 et 10 ne peuvent donc pas s'écrire comme une différence de deux carrés.

2) On a obtenu les premiers nombres impairs par différence de deux carrés consécutifs.
De façon générale, la différence de deux carrés consécutifs s'écrit : $(k+1)^2-k^2=2k+1$.
On obtient bien ainsi tous les nombres impairs.

3) On a obtenu les premiers multiples de 4 par différence des carrés pris de 2 en 2.
De façon générale, la différence de deux carrés pris de 2 en 2 s'écrit : $(k+2)^2-k^2=4(k+1)$.
On obtient ainsi tous les multiples de 4.
Plus généralement, une différence de deux carrés pris de p en p s'écrira : $(k+p)^2-k^2=2kp+p^2$.
Si p est impair, cette différence est un nombre impair ; si p est pair, cette différence est un multiple de 4.
Les nombres pairs non multiples de 4 ne sont jamais obtenus. Ce sont les nombres qui s'écrivent $N=4k+2$.
$N=4k+2$ est compris entre 1 et 100 quand k est compris entre 0 et 24.
Cela fait donc 25 entiers compris entre 1 et 100 qui ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers : 2, 6, 10, 14, …, 94, 98.

Encore des carrés



Le rayon R du cercle vérifie $R^2+R^2=c_1^2$.

Dans le triangle rectangle OAB on a : $OB^2 = 0A^2 + AB^2$ qui donne $R^2 = \left(\frac{c_1}{2} + c_2\right)^2 + \left(\frac{c_2}{2}\right)^2$

Soit encore : $\frac{c_1^2}{2} = \left(\frac{c_1}{2} + c_2\right)^2 + \left(\frac{c_2}{2}\right)^2$ d'où en divisant par c_2^2 et en posant $x = \frac{c_1}{c_2}$:

$\frac{x^2}{2} = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 + \frac{1}{4}$ d'où après avoir multiplié par 4 : $x^2 - 4x - 5 = 0$.

Cette équation s'écrit encore $(x-2)^2 = 9$ d'où x=5 (puisque x est positif).

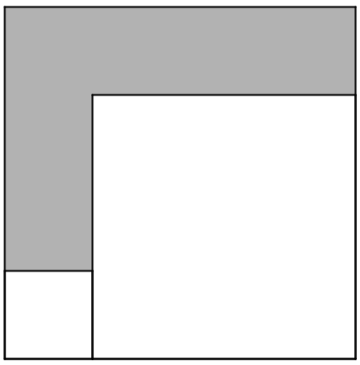
Deux pavés de même volume

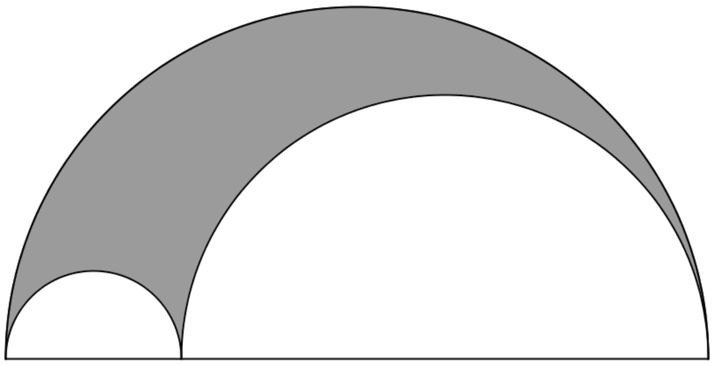
Les deux faces qui ont une aire égale à 4 cm² sont parallèles; on peut les placer parallèlement au sol. Les quatre autres faces qui ont chacune une aire égale à x cm² ont la même hauteur donc elles ont aussi la même largeur. Les faces d'aire 4 cm² sont donc des carrés de côté 2 cm. Le volume du pavé est donc égal à $V = 2x$ (base x multipliée par hauteur 2).

Pour le pavé de Lucas, les quatre faces qui ont leurs diagonales de longueur égale à x cm ayant la même hauteur, elles ont aussi la même largeur. Les faces ayant leurs diagonales de longueur 4 cm sont donc des carrés de côté $2\sqrt{2}$ cm. Les faces de diagonale de longueur égale à x ont des côtés de longueurs $2\sqrt{2}$ et y avec $(2\sqrt{2})^2 + y^2 = x^2$ d'où $y = \sqrt{x^2 - 8}$. Le volume du pavé est donc égal à $V = (2\sqrt{2})^2\sqrt{x^2-8}$.

Puisque les deux pavés ont le même volume on a l'équation : $2x = 8\sqrt{x^2-8}$ soit en élevant au carré $4x^2 = 64(x^2-8)$ d'où $15x^2 = 128$. On a donc $x = \sqrt{\frac{128}{15}} \cong 2{,}92$ cm et $V = 2x \cong 5{,}84$ cm.

Matière grise





1) Les petits carrés ont pour côtés a et b. Le côté du grand carré est donc égal à a + b. L'aire de la partie grisée est donc égale à $(a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$.

2) Notons r_1 et r_2 les rayons des deux petits demi-disques. On a alors $\frac{\pi r_1^2}{2} = a^2$ et $\frac{\pi r_2^2}{2} = b^2$.

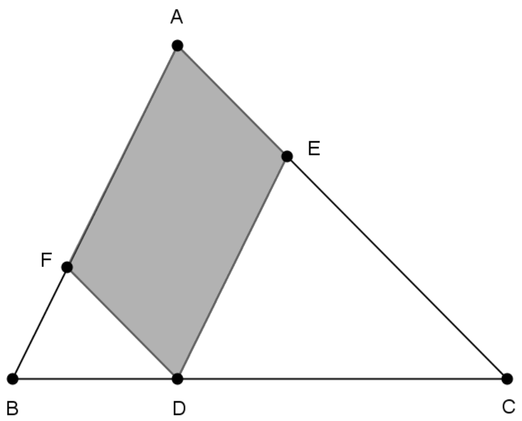
Le rayon du grand demi-cercle est égal à $r_1 + r_2$. L'aire du grand demi-disque est $\frac{\pi(r_1+r_2)^2}{2}$ et celle de la partie grisée est $\frac{\pi(r_1+r_2)^2}{2} - \frac{\pi r_1^2}{2} - \frac{\pi r_2^2}{2} = \pi r_1 r_2 = 2ab$.

3) L'homothétie de centre B et de rapport $\frac{BD}{BC}$ transforme le triangle BCA en le triangle BDF puisque (FD) est parallèle à (CA). Si S est l'aire du triangle ABC et a^2 celle du triangle BDF on a $\frac{a^2}{S} = (\frac{BD}{BC})^2$.

De même par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{CD}{CB}$ on obtient $\frac{b^2}{S} = (\frac{CD}{CB})^2$.

On en déduit en prenant les racines carrées : $\frac{a+b}{\sqrt{S}} = \frac{BD+DC}{BC} = 1$. On a donc $S = (a + b)^2$.

Par suite l'aire du parallélogramme DEAF est égale à $S - a^2 - b^2 = 2ab$.



Ce même raisonnement s'applique aussi aux deux premières questions : les homothéties qui transforment le grand carré (respectivement le grand demi-disque) d'aire S en l'un des petits ont pour rapports $\frac{a}{\sqrt{S}}$ et $\frac{b}{\sqrt{S}}$. Comme $\frac{a+b}{\sqrt{S}} = 1$ on déduit $S = (a + b)^2$ d'où l'aire hachurée : $S - a^2 - b^2 = 2ab$.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2014

Les corrigés LYCÉE

Des carrés dans un carré (pour les secondes)

Si un carré peut être partagé en N carrés il peut l'être aussi en N + 3 carrés : en partageant l'un des carrés en 4 carrés cela ajoute 3 carrés.
Le partage est possible pour N=1 donc pour N=4, 7, 10, … c'est-à-dire quand N = 3k + 1.
Le partage est possible pour N=6 donc pour N=9, 12, … c'est-à-dire quand N = 3k avec k au moins égal à 2.
Le partage est possible pour N=8 donc pour N=11, 14, … c'est-à-dire quand N = 3k + 2 avec k au moins égal à 2.
Les seuls entiers pour lesquels cela ne semble pas possible sont 2, 3 et 5.
Démontrons le. Si on partage un carré en plusieurs carrés, il en faut au moins un pour chaque angle, donc il faut au moins 4 carrés ; cela élimine N=2 et N=3.
Si N est supérieur à 4, il y a au moins 3 carrés sur l'un des côtés et il n'est alors pas possible de compléter par deux autres carrés, donc le partage pour N=5 n'est pas possible non plus.

A la queue leu leu (pour les premières et terminales)

Avec 3 nombres 1, x et y il faut d'abord que $1 + x = (x-1)^2$ c'est-à-dire $x^2 = 3x$ donc x=0 ou x=3.
Puis il faut que $x + y = (y-x)^2$. Si x=0 cela entraîne $y^2 = y$ donc y=0 ou y=1 : c'est impossible car les entiers doivent être distincts deux à deux.
On a donc x=3 d'où $y + 3 =(y-3)^2$ ou encore $y^2 -7y +6 =0$. y=1 est une solution particulière mais elle ne convient pas (il y a déjà 1 dans la suite). On peut factoriser en (y-1)(y-6)=0 d'où y=6.
On a obtenu une seule suite convenable avec 3 termes : 1, 3, 6.

Continuons avec un quatrième nombre z qui doit vérifier $6 + z =(z-6)^2$ ou encore $z^2 - 13z +30=0$.
z=3 est solution mais ne convient pas (on a déjà x=3). On peut factoriser en (z-3)(z-10)=0 d'où z=10.

Continuons avec un cinquième nombre t qui doit vérifier $10 + t =(t-10)^2$ ou encore $t^2 - 21t +90=0$. t=6 est solution mais ne convient pas (on a déjà y=6). On peut factoriser en $(t-6)(t-15)=0$ d'où t=15. On a obtenu une seule suite convenable avec 5 termes : 1, 3, 6, 10, 15.

Généralisons : supposons qu'on a déjà obtenu une suite strictement croissante se terminant par …, a, b. On a donc $a + b =(b-a)^2$. Recherchons c tel que $b + c =(c-b)^2$.
C'est une équation du second degré qui a une solution évidente, c = a. Mais elle ne convient pas puisque c doit être différent de a.
L'autre solution de cette équation peut s'obtenir en mettant (c-a) en facteur (en utilisant $b^2 - b = a - a^2 +2ab$) :
$(c-b)^2 - (b + c) = c^2 - (2b+1)c +b^2 - b = c^2 - (2b+1)c + a - a^2 +2ab = (c-a)(c-1+a-2b)=0$ donc $c=2b - a + 1$ est la solution qui est différente des entiers qui précèdent puisque $c=b+(b-a)+1 > b$.
On a pu compléter la suite par un terme de plus. On peut donc la compléter indéfiniment de façon unique.

Montrons par récurrence que le N-ième terme de cette suite est égal à $N(N+1)/2$.
On le vérifie pour N=1 et N=2.
Avec les notations qui précèdent supposons que $a= (N-1)N/2$ et $b=N(N+1)/2$; on en déduit avec la formule trouvée précédemment : $c=2b - a + 1=N(N+1) – (N-1)N/2 +1 =N^2/2+3N/2+1= (N+1)(N+2)/2$.
Cela démontre par récurrence que le N-ième terme de la suite est égal à $N(N+1)/2$.
C'est le N-ième nombre triangulaire ; il est égal à la somme des entiers de 1 à N.

Palindromes (pour tous)

1) $N=abcba=10100\times a + 1010\times b + 101\times a + 100\times(c-2a)$.
N est donc divisible par 101 si c-2a est divisible par 101, c'est-à-dire si c=2a (a et c sont compris entre 0 et 9).
Comme a est au moins égal à 1, le plus petit nombre est obtenu pour a=1 et b=0, c'est <u>10201</u>.
Le plus grand nombre est obtenu pour a=4 et b=9, c'est <u>49894</u>.
Comme il y a 4 choix possibles pour a et 10 choix pour b, il y a au total <u>40 palindromes</u> divisibles par 101.

2) $N=abcba=10300\times a + 1030\times b + 100\times(c-3a) -20\times b +a =103\times(100\times a+10\times b+c-3\times a) +10\times a - 20\times b - 3\times c$.
N est donc divisible par 103 si $10\times a - 20\times b - 3\times c$ est divisible par 103 ou encore si $10\times(a - 2b + 10c)$ est divisible par 103 c'est-à-dire si $a – 2b + 10c = 0$ (car $-17 \le a - 2b + 10c \le 99$).
Comme $a – 2b$ est compris entre -17 et 9 on a c=0 ou c=1.
Quand c=0 on déduit a=2b donc il y a 4 possibilités : b=1, 2, 3 ou 4 d'où les nombres 21012, 42024, 63036 et 84048.
Quand c=1 on déduit a=2b-10 donc il y a également 4 possibilités : b=6, 7, 8 ou 9 d'où les nombres 26162, 47174, 68186 et 89198.
Le plus petit nombre est donc <u>21012</u>, le plus grand est <u>89198</u>.
Il y a au total <u>8 palindromes</u> divisibles par 103.

Héritage fractionné (pour tous)

1) Quand le deuxième est servi il reste S – S/2 – S/3 = S/6. Comme il faut en laisser pour le quatrième le troisième prendra S/7 et il restera S/6 – S/7 = S/42.
Le quatrième prendra donc S/43 et il laissera S/42 – S/43 = S/1806 pour le cinquième et dernier.

S'il y avait eu 6 héritiers, le cinquième n'aurait pu prendre que S/1807 et il aurait donc laissé S/1806 - S/1807 = S/3263442 pour le sixième et dernier.

2) Notons 1/a, 1/b, 1/c et 1/d les fractions de S reçues par les héritiers avec $a \leq b \leq c \leq d$. La plus petite part est donc S/d, la plus grande est S/a. Comme 1/a + 1/b + 1/c + 1/d =1 on déduit que $1 \geq 4/d$ (par suite $d \geq 4$) et que $1 \leq 4/a$ (par suite $a \leq 4$). Puisque a=1 n'est pas possible on a : $2 \leq a \leq 4$.
Si a=4 alors on a nécessairement a=b=c=d=4.
La plus petite part est donc au maximum égale à S/4 et c'est le cas lorsque les quatre parts sont égales.

Si a=3 alors 1/b + 1/c + 1/d =1 -1/3 = 2/3. On en déduit que $2/3 \leq 3/b$ d'où $b \leq 9/2$ donc $b \leq 4$ (et $b \geq a=3$).
Pour b=4 on obtient 1/c + 1/d = 2/3 – 1/4 = 5/12 avec $c \geq b=4$ donc $1/c \leq 1/4$ et $1/d \geq 5/12 - 1/4 = 1/6$.
Pour b=3 on obtient 1/c + 1/d = 2/3 – 1/3 = 1/3 avec $c \geq 4$ (puisque c=3 est impossible) donc $1/c \leq 1/4$ et $1/d \geq 1/3 - 1/4 = 1/12$.

Si a=2 alors 1/b + 1/c + 1/d =1 -1/2 = 1/2. On en déduit que $1/2 \leq 3/b$ d'où $b \leq 6$ et $b \geq 2$.
Pour b=6 on obtient 1/c + 1/d = 1/2 – 1/6 = 1/3 avec $c \geq b=6$ donc $1/c \leq 1/6$ et $1/d \geq 1/3 - 1/6 = 1/6$.
Pour b=5 on obtient 1/c + 1/d = 1/2 – 1/5 = 3/10 avec $c \geq b=5$ donc $1/c \leq 1/5$ et $1/d \geq 3/10 - 1/5 = 1/10$.
Pour b=4 on obtient 1/c + 1/d = 1/2 – 1/4 = 1/4 avec $c \geq 5$ (puisque c=4 est impossible) donc $1/c \leq 1/5$ et $1/d \geq 1/4 - 1/5 = 1/20$.
Pour b=3 on obtient 1/c + 1/d = 1/2 – 1/3 = 1/6 avec $c \geq 7$ (puisque c=6 est impossible) donc $1/c \leq 1/7$ et $1/d \geq 1/6 - 1/7 = 1/42$.
Conclusion : la plus petite part est au minimum égale à S/42. Elle est obtenue pour a=2, b=3, c=7 et d=42.

2014 (pour tous)

Notons A (respectivement B et C) la somme des chiffres de la colonne des centaines (respectivement des dizaines et des unités).
En ajoutant les trois nombres écrits horizontalement on obtient 100*A + 10 *B +C =2014.
Si on divise cette égalité par 9 le reste est égal à la somme des chiffres de 2014 soit 2+0+1+4=7.
Mais ce reste est aussi égal au reste de la division par 9 de A+B+C qui est la somme des chiffres présents dans la grille. Comme la somme de tous les chiffres de 0 à 9 est égale à 45, il faut retirer le chiffre 2 pour que la somme des chiffres restants ait pour reste 7 dans la division par 9.

Comme 0+1+3=4 ≤ B ≤ 7+8+9 = 24 et que la retenue de la colonne des unités vaut au maximum 2, les valeurs possibles de B augmenté de la retenue de la colonne des unités sont 11 ou 21, et donc la retenue de la colonne des dizaines vaut 1 ou 2.
Si elle vaut 1 alors A=19=9+7+3 ou 9+6+4 ou 8+7+4 ou 8+6+5 (à l'ordre près).
Si elle vaut 2 alors A=18=9+8+1 ou 9+6+3 ou 9+5+4 ou 8+7+3 ou 8+6+4 ou 7+6+5 (à l'ordre près).

Dans les écritures possibles pour A on observe qu'il y a au moins l'un des chiffres 7, 8 ou 9 dans la colonne des centaines. C ne peut donc pas être égal à 24=7+8+9. Donc C=4=0+1+3 (à l'ordre près) ou C=14=9+5+0 ou 9+4+1 ou 8+6+0 ou 8+5+1 ou 7+6+1 ou 7+4+3 ou 6+5+3 (à l'ordre près).
La retenue de la colonne des unités est donc égale à 0 ou à 1.

Si C=4=0+1+3, la retenue de la colonne des unités est égale à 0 et B est au moins égal à 4+5+6=15 donc
B=21=9+8+4=9+7+5=8+7+6 (à l'ordre près) et A=18.

Si C=14, la retenue de la colonne des unités est égale à 1 donc B=10 ou B=20.
Mais B=20 entrainerait A=18 d'où A+B+C=52 au lieu de 43.
Donc B=10=9+1+0=7+3+0=6+4+0=6+3+1=5+4+1 (à l'ordre près) et A=19.

Pour trouver une solution, commençons par le cas C=0+1+3, A=18 et B=21.
La somme des chiffres de la première ligne doit être égale à 18 ou à 19.
Choisissons-la égale à 19 donc nécessairement 973 ou 793 en première ligne.
Pour 973 il y a nécessairement 0 et 1 dans la colonne des unités, 6 et 8 dans la colonne des dizaines.
(car B=9+7+5 n'est pas possible) et donc 5 et 4 dans la colonne des centaines.
On obtient une solution : 973+460+581 =2014 (qui donne une solution symétrique: 945+768+301=2014).

Avec 793 en première ligne on trouve deux solutions : 793+541+680 et 793+640+581.

A l'aide d'un programme informatique on peut montrer qu'il y a au total <u>20 solutions</u> :

$$\left[\begin{bmatrix}4&6&9\\7&3&0\\8&1&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&7&8\\6&3&1\\9&0&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&7&8\\9&0&1\\6&3&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&9&6\\7&0&3\\8&1&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&3&9\\4&1&5\\8&6&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&3&9\\4&6&0\\8&1&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&4&8\\3&1&6\\9&5&0\end{bmatrix},\right.$$

$$\begin{bmatrix}7&4&8\\3&6&1\\9&0&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&4&8\\9&0&1\\3&6&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&4&8\\9&1&0\\3&5&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&5&6\\9&4&8\\3&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&6&5\\9&4&8\\3&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&9&3\\4&0&6\\8&1&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&9&3\\4&1&5\\8&0&6\end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{bmatrix}7&9&3\\5&4&1\\6&8&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&9&3\\6&4&0\\5&8&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8&6&5\\7&3&0\\4&1&9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8&7&4\\6&3&1\\5&0&9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9&4&5\\7&6&8\\3&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9&7&3\\4&6&0\\5&8&1\end{bmatrix}\right]$$

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2015

Les corrigés LYCÉE

Chassez l'intrus (uniquement pour les secondes)

Notons x l'entier qu'Arthur a ajouté deux fois. On a à résoudre l'équation $\frac{n(n+1)}{2} + x = 2015$ avec x compris entre 1 et n. On en déduit : $\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leq 2015 \leq \frac{n(n+1)}{2} + n$. On obtient en multipliant par 8 : $(2n+1)^2 \leq 16113$ et $16129 \leq (2n+3)^2$ d'où $2n+1 \leq 126{,}9$ et $127 \leq 2n+3$. La seule valeur entière pour n est n = 62 d'où l'on déduit $x = 2015 - \frac{62\times 63}{2} = 62$.

Bonus : Soit S = 1 + 2 + 3 $+ \cdots + (n-1) + n$.
On a aussi S = n $+(n-1) + (n-2) + \cdots +$ 2 $+ 1$.
En ajoutant par colonne on obtient : $2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$ d'où :
$2S = n(n+1)$.

Des rectangles avec des tiges (uniquement pour les premières et terminales)

Comme il y a 4 côtés et qu'un côté ne peut pas être égal à 1, il faut au moins 5 baguettes.
On voit rapidement que ce n'est pas possible pour n=5 et n=6 mais que c'est possible pour n=7 et n=8.

Pour n=7, le périmètre est égal à $28 = 2\times14$. On peut former 4 rectangles non aplatis :
un de largeurs 3 et 1+2, de longueurs 4+7 et 5+6
un de largeurs 5 et 1+4, de longueurs 2+7 et 3+6
un de largeurs 6 et 2+4, de longueurs 1+7 et 3+5
un carré de côtés 7, 1+6, 2+5 et 3+4.

Pour n=8, le périmètre est égal à $36 = 2\times18$. On peut former 7 rectangles non aplatis :
un de largeurs 3 et 1+2, de longueurs 7+8 et 4+5+6
un de largeurs 4 et 1+ 3, de longueurs 6+8 et 2+5+7
un de largeurs 5 et 1+4, de longueurs 6+7 et 2+3+8
un de largeurs 6 et 1+5, de longueurs 4+8 et 2+3+7
un de largeurs 7 et 1+6, de longueurs 3+8 et 2+4+5
un de largeurs 8 et 1+7, de longueurs 4+6 et 2+3+5
un carré de côtés 1+8, 2+7, 3+6 et 4+5.

La somme des longueurs des tiges doit être égale au périmètre du rectangle et doit donc être un entier pair.
Il faut donc que de $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$ soit un entier pair ou encore que 4 divise le produit n (n + 1). C'est seulement le cas quand 4 divise n ou quand 4 divise n+1, donc quand n=4k-1 ou quand n=4k.
Si n=4k-1, on peut former un rectangle de largeurs 3 et 1+2 car il reste alors 4+(4k-1) = 5+(4k-2) = … = (2k+1)+(2k+2) soit 2(k-1) sommes égales à 4k+3: on peut donc former deux longueurs égales à (k-1)(4k+3).
Si n=4k avec $k \geq 3$, on peut former un rectangle de largeurs 3 et 1+2 car il reste alors :
4 + 5 + 6 = 7 + 8
9+(4k) = 10+(4k-1) = … = (2k+4)+(2k+5) soit 2(k-2) sommes égales à 4k+9 : on peut donc former deux longueurs égales à 15+(k-2)(4k+9).

Pour pouvoir former un carré, le périmètre doit être multiple de 4, donc n(n+1) doit être multiple de 8.
C'est seulement possible si 8 divise n ou si 8 divise n+1.
Si n=8q-1, on a 8q-1=1+(8q-2)=2+(8q-3)=…=(4q-1+4q) donc 4q sommes égales à 8q-1 : on peut former un carré de côté q(8q-1).
Si n=8q, on a 1+8q=2+(8q-1)=3+(8q-2)=…=(4q+4q+1) donc 4q sommes égales à 8q+1 : on peut former un carré de côté q(8q+1).

Toujours par 17 (pour tous)

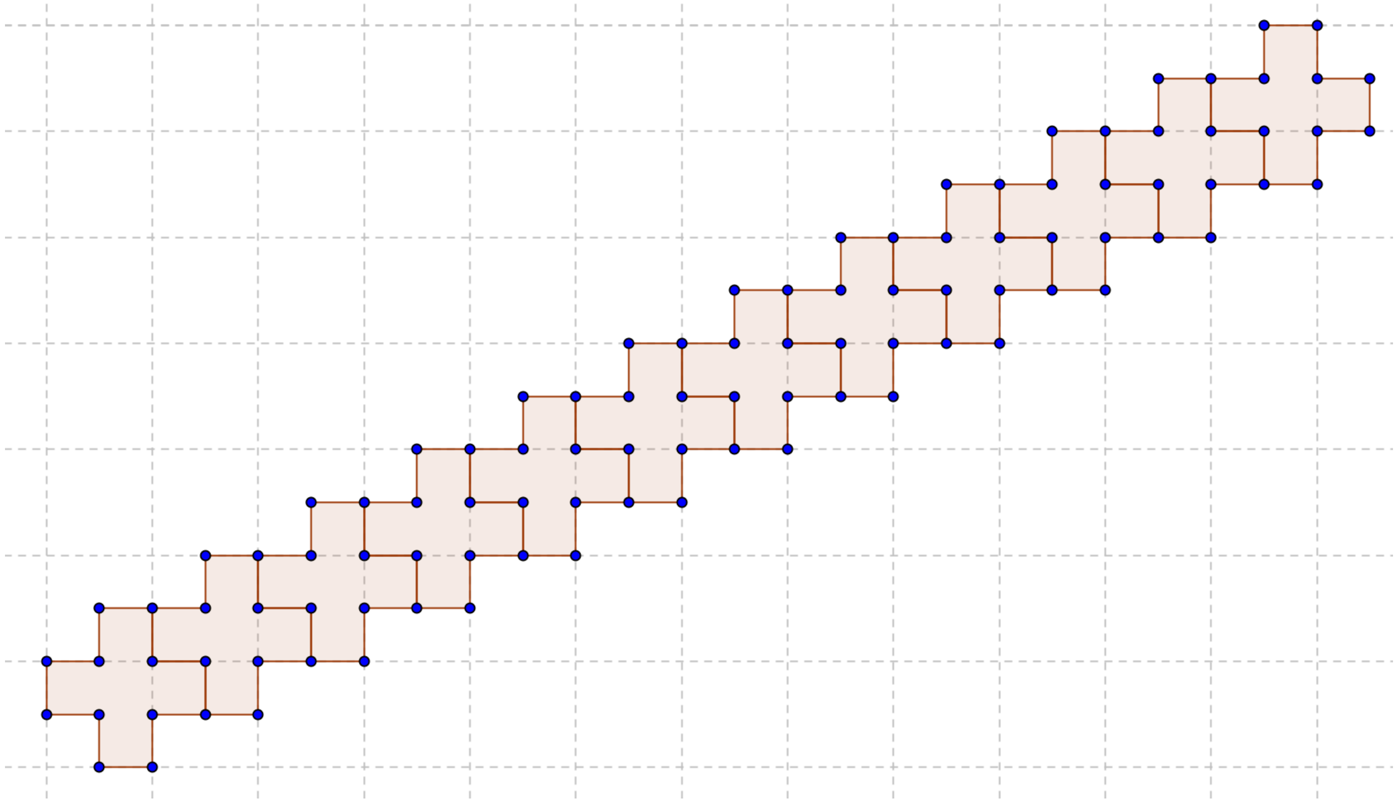
Comme $2015 = 17\times118 + 9$, il faut au moins 119 étapes. C'est possible avec 119 étapes.
Les 117 premières étapes consistent à retourner 17 jetons noirs, il y a ensuite 26 jetons noirs et 1989 blancs sur la table. Si pour la 118ème étape on retourne x noirs et 17-x blancs, il y aura 26 – x + 17 – x jetons noirs sur la table. En choisissant x = 13, il reste 17 jetons noirs que l'on retourne à la 119ème étape.

Comme $2016 = 17 \times 118 + 10$, il faut au moins 119 étapes.
Mais si à une étape on retourne x jetons noirs et 17 - x jetons blancs, le nombre de jetons noirs varie de x - (17 - x) = 2x – 17 qui est un nombre impair. Pour passer de 2016 jetons noirs à 0 jetons noirs il faut donc un nombre pair d'étapes, donc au moins 120 étapes. Montrons que c'est possible avec 120 étapes.
Les 118 premières étapes consistent à retourner 17 jetons noirs, il y a ensuite 10 noirs et 2006 blancs sur la table. Si pour la 119$^{\text{ème}}$ étape on retourne x noirs et 17-x blancs, il y aura 10 – x + 17 – x jetons noirs sur la table. En choisissant x = 5, il reste 17 jetons noirs que l'on retourne à la 120$^{\text{ème}}$ étape.

Posons n = 17q + r avec $0 \leq r \leq 16$ et $q \geq 1$.
Si r = 0, on retourne q fois 17 jetons noirs.
Sinon, il faut au moins q + 1 étapes.
Mais si à une étape on retourne x jetons noirs et 17 - x jetons blancs, le nombre de jetons noirs varie de x - (17- x) = 2x – 17 qui est un nombre impair. Pour passer de n jetons noirs à 0 jetons noirs, le nombre d'étapes doit donc avoir la même parité que n.
Si r est impair, q + 1 a la même parité que 17q + r = n, donc q + 1 étapes vont suffire :
on retourne d'abord (q-1) fois 17 jetons , il reste ensuite 17 + r jetons noirs ; si on retourne ensuite x jetons noirs et 17-x blancs, il restera 17 + r – x + 17 – x jetons noirs ; en prenant $x = \frac{17+r}{2}$, il reste 17 jetons noirs que l'on retourne à la (q+1)$^{\text{ème}}$ étape.
Si r est pair, q + 1 n'a pas la même parité que 17q + r = n, donc il faut au moins q + 2 étapes :
on retourne d'abord q fois 17 jetons , il reste ensuite r jetons noirs ; si on retourne ensuite x jetons noirs et 17-x blancs, il restera r – x + 17 – x jetons noirs ; en prenant $x = \frac{r}{2}$, il reste 17 jetons noirs que l'on retourne à la (q+2)$^{\text{ème}}$ étape.

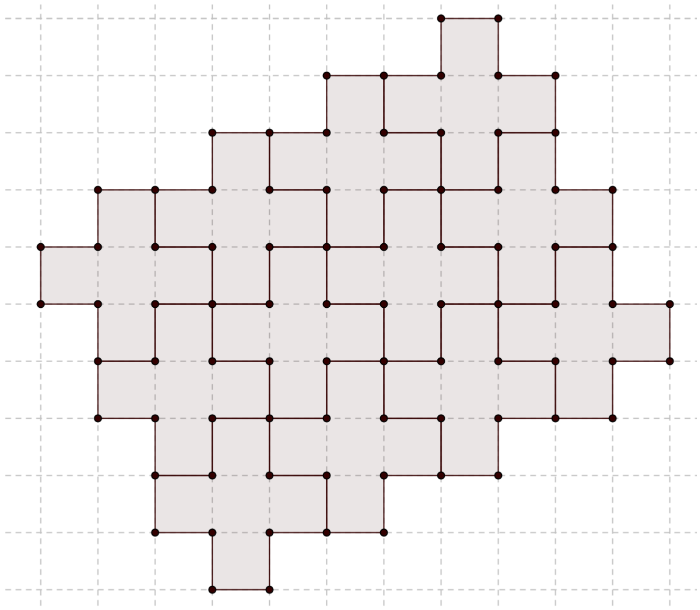
Avec des croix (pour tous)

Pour avoir un périmètre le plus grand possible il faut limiter au maximum les contacts entre les croix. On peut par exemple aligner les 2015 croix en enfilade comme sur ce dessin fait avec 12 croix :



Il y a 2014 contacts entre deux croix. Chaque contact ayant pour longueur 3, il retire 6 à la somme des périmètres des 12 croix. Comme chaque croix a pour périmètre 12, le périmètre du polygone est égal à :
$2015 \times 12 - 2014 * 6 = 12096$.

Pour avoir un périmètre le plus petit possible il faut compacter les croix pour avoir un maximum de contacts, comme sur ce dessin fait avec 12 croix :



Si on compacte p alignements de q croix, il y a $p\times(q-1)+q\times(p-1)$ contacts entre deux croix donc on obtient un périmètre égal à 12 pq – 6 (2pq –p - q) = 6(p + q).
En y accolant r croix (avec $r < p \leq q$) , il y a r + (r-1) = 2r - 1 nouveaux contacts, donc le périmètre augmente de 12 r - 6 (2r-1) = 6. On obtient finalement un périmètre égal à 6(p + q + 1).
Il faut donc minimiser p + q quand n = pq + r avec r < p.
Pour $2015 = 44\times45 + 35$ on obtient un périmètre égal à 6 (44+45+1) = 540.

Schéma de déverrouillage (pour tous)

$AF = FG = CD = DI = IB = \sqrt{5}$,$GC = 2\sqrt{2}$, BH = 2 et HE = 1. La ligne a pour longueur:
$5\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3 \cong 17{,}009$.

Pour avoir la plus petite longueur, il faut joindre les points par des segments de longueur égale à 1, par exemple la ligne ABCFEDGHI. On obtient une longueur égale à 8.

Les segments joignant deux points ont pour longueurs possibles : 1 , $\sqrt{2}$, 2 , $\sqrt{5}$ et $\sqrt{8}$.
Une ligne brisée est formée de 8 segments ; pour trouver la plus grande longueur il faut choisir un maximum de grands segments, mais il faut au moins un segment de longueur 1 ou $\sqrt{2}$ pour joindre le point E.
Premier cas : il y a deux segments de longueur $\sqrt{8}$ (joignant deux sommets opposés). Il y a alors au maximum 4 segments de longueur $\sqrt{5}$ (car ces segments partent d'un sommet du grand carré). On peut compléter par 2 et 1 (mais pas $\sqrt{2}$) pour obtenir la longueur $2\sqrt{8} + 4\sqrt{5} + 3 \cong 17{,}6$. Exemple : la ligne EHCGBIAFD.
S'il n'y a que 3 segments de longueur $\sqrt{5}$, on peut compléter avec 2 segments de longueur 2 et un de longueur $\sqrt{2}$ pour obtenir $2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} + \sqrt{2} + 4 \cong 17{,}78$. Exemple : la ligne EIAFDCGBH.
Si on complète avec 2 fois 2 et 1 on obtient seulement $2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} + 5 \cong 17{,}365$.
Avec au plus 2 segments de longueur $\sqrt{5}$ la ligne est plus courte.

Deuxième cas : il y a un seul segment de longueur $\sqrt{8}$. Il y a alors au maximum 6 segments de longueur $\sqrt{5}$ et on complète par 1 pour obtenir $\sqrt{8} + 6\sqrt{5} + 1 \cong 17{,}245$. Exemple : la ligne EBGFAIDCH.
S'il y a 5 segments de longueur $\sqrt{5}$ on peut compléter par 2 et $\sqrt{2}$ pour obtenir $\sqrt{8} + 5\sqrt{5} + \sqrt{2} + 2 \cong 17{,}42$. Exemple : la ligne EIAFGBHCD.
Avec au plus 4 segments de longueur $\sqrt{5}$ la ligne est plus courte.

Troisième cas : il n'y a pas de segment de longueur $\sqrt{8}$. Il y a alors au maximum 7 segments de longueur $\sqrt{5}$ et on complète par $\sqrt{2}$ pour obtenir $7\sqrt{5} + \sqrt{2} \cong 17{,}067$. Exemple la ligne EAFGBIDCH. Avec au plus 6 segments de longueur $\sqrt{5}$ la ligne est plus courte.

La ligne la plus longue a donc pour longueur 17,78 cm. Il existe au total 11 longueurs supérieures à 17 : celle donnée en exemple, les 6 précédentes et 4 autres : $2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2 \cong 17{,}193$, $\sqrt{8} + 4\sqrt{5} + \sqrt{2} + 4 \cong 17{,}187$, $2\sqrt{8} + 2\sqrt{5} + 7 \cong 17{,}129$ et $2\sqrt{8} + 4\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1 \cong 17{,}015$.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2016

Les corrigés LYCÉE

Les nombres triangulaires

1. **Pour tous**

a) T(5) = 15 , T(6) = 21 , T(7) = 28 , T(8) = 36.

b) T(n) = 1 + 2 + … + (n-1) + n.

c) T(63) = 63×32 = 2016.

d) T(8) = 36 = 6^2 , T(49) = 1225 = 35^2 , T(288) = 41616 = 204^2 , …
Il en existe une infinité. Une solution détaillée figure page 75 du livre :
Le Tournoi Mathématique du Limousin, Sujets et corrigés des problèmes de 1996 à 2010, édité chez Pulim.

2. Uniquement pour les premières et les terminales :

e) $T(n)^2 - T(n-1)^2 = (n(n+1)/2)^2 - (n(n-1)/2)^2 = n^3$
On en déduit que la somme des cubes des n premiers entiers positifs est égale à $T(n)^2$.

f) Si n=20q+r avec r compris entre 0 et 19 on calcule : $T(n) = (n^2 + n)/2 = 200q^2 + 20qr + 10q + T(r)$.
T(n) a donc le même chiffre des unités que T(r). Il suffit donc de calculer le chiffres des unités des T(r) pour r compris entre 0 et 19 : 0,1,3,6,0,5,1,8,6,5,5,6,8,1,5,0,6,3,1,0.
Les nombres triangulaires peuvent donc se terminer par les chiffres 0,1,3,5,6,8 mais pas par les chiffres 2,4,7,9.

Il neige des flocons… de Von Koch !

1. La figure 1 a pour périmètre 36 cm.
Dans la figure 2 il y a 12 segments de longueur 4 cm, son périmètre est donc égal à 48 cm.
Dans la figure 3 il y a $4\times12 = 48$ segments de longueur 4/3 cm, son périmètre est donc égal à 64 cm.

2. Quand on passe d'une figure à la suivante, le nombre de segments est multiplié par 4 alors que la longueur de chaque segment est divisée par 3. Le périmètre est donc multiplié par 4/3.
Pour la figure 4 on obtient $64 \times 4/3 = 256/3$ cm.
Pour la figure n on obtient $36 \times (4/3)^{n-1}$ (suite géométrique de raison 4/3).

3. Pour passer de la figure 1 à la figure 2 on ajoute à l'extérieur 3 triangles équilatéraux de côté égal à 4 cm. Chacun de ces triangles a donc une aire égale à A/9. L'aire de la figure 2 est donc égale à $A+3A/9 = 4A/3$.

Pour passer de la figure 2 (qui est formée de 12 segments) à la figure 3 on ajoute à l'extérieur 12 triangles équilatéraux de côté égal à 4/3 cm. Chacun de ces triangles a donc une aire égale à A/81. L'aire de la figure 3 est donc égale à $4A/3 + 12A/81 = 40A/27$.

Pour passer de la figure n-1 (qui est formée de $3\times4^{n-2}$ segments) à la figure n on ajoute à l'extérieur $3\times4^{n-2}$ triangles équilatéraux de côté égal à $12/3^{n-1}$ cm. Chacun de ces triangles a donc une aire égale à $A/9^{n-1}$. L'aire de la figure n est donc égale à $u(n) = u(n-1) + 3\times4^{n-2}\times A /9^{n-1} = u(n-1) + A/3 \times (4/9)^{n-2}$
Avec $u(1) = A$ on obtient $u(n) = A + A/3\,(1 + 4/9 + \ldots + (4/9)^{n-2}) = 8A/5 - 3A/5 \times (4/9)^{n-1}$.

L'invasion des 1

1.

$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$

$1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 3$

$1 + 1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 = 4$

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 \times 1 = 5$

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1) + 1 = 7$

$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) = 8$

$(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) = 9$

2. En remplaçant le premier 1 par 1×1 dans les égalités précédentes on peut déjà obtenir tous les entiers de 1 à 9 avec exactement 7 fois 1. On a de plus :

$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 10$
$(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) = 12$

On ne peut pas obtenir 11 ni les entiers strictement supérieurs à 12.

3. Avec 10 fois le nombre 1 on peut obtenir $36 = (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1)$.

4. On peut obtenir 2016 avec 22 fois le nombre 1 :
$2016 = (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times ((1 + 1) \times (1 + 1 + 1) + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1)$
Avec 21 fois le nombre 1 on peut obtenir $3^7 = 2187$ mais si on remplace 3×3 par 2×4 on n'arrive qu'à 1944.

5. $(1 + \ldots + 1)$ avec n fois 1 est plus petit que $(1 + 1 + 1) \times (1 + \ldots + 1)$ avec n-3 fois 1 entre les deuxièmes parenthèses si $n < 3\times(n-3)$ c'est-à-dire $n > 4$.
On peut remplacer $(1 + 1 + 1 + 1)$ par $(1 + 1) \times (1 + 1)$.
$(1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1)$ est plus petit que $(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1)$.
Par suite, quand on écrit un entier N comme un produit d'entiers en utilisant le minimum de 1, il y a des 3 et au maximum deux fois 2. Le plus grand entier N qu'on peut obtenir avec exactement n fois le nombre 1 est :
- si $n=3k$, $N = 3^k = (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times \ldots \times (1 + 1 + 1)$ avec k fois $(1 + 1 + 1)$.
- si $n=3k+1$, $N = 4\times3^{k-1} = (1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times \ldots \times (1 + 1 + 1)$ avec k-1 fois $(1 + 1 + 1)$.
- si $n=3k+2$, $N = 2\times3^k = (1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times \ldots \times (1 + 1 + 1)$ avec k fois $(1 + 1 + 1)$.

C'est renversant

1.
a) Par exemple S = 451 + 672 + 893 =2016 qui donne S' = 154 + 276 + 398 = 828.
Ou bien S = 312 + 746 + 958 = 2016 qui donne S' = 213 + 647 + 859 = 1719.

b) Notons A la somme des chiffres des centaines des 3 nombres choisis par Léon, B la somme des chiffres des dizaines et C la somme des chiffres des unités. On a donc S = 100A + 10B + C et S' = 100C + 10B + A.
De plus, A+B+C = 1+2+…+9 = 45. On en déduit S=99A + 9B + 45 = 9(11A+B)+45.
Par suite S = 2016 est équivalent à 11A+B=219.
De plus, les sommes A, B et C sont comprises entre 1+2+3 = 6 et 7+8+9 = 24 donc A est compris entre $(219-24)/11 \approx 17{,}7$ et $(219-6)/11 \approx 19{,}4$. Par suite il n'y a que deux possibilités:
A=18, B=21, C=6 qui donne S' = 828
A=19, B=10, C=16 qui donne S' = 1719.

2.
a) Avec les notations précédentes, S'=S est équivalent à A=C. On a alors B = 45-2A d'où S = 81A+450 .
Mais $2A = A+C \geq 1+2+\ldots+6 = 21$ et $2A \leq 4+5+\ldots+9 = 39$ donc $11 \leq A \leq 19$. Il y a 9 possibilités pour A donc 9 possibilités pour S : 1341, 1422, 1503, 1584, 1665, 1746, 1827, 1908, 1989.

b) Il y a deux possibilités pour S' quand il y a deux triplets (A,B,C) donnant S.
S = 100A + 10B + C = 100A' + 10B' + C' avec A+B+C= 45 donne B-B' = 11(A'-A).

Puisque B et B’ sont compris entre 6 et 24, $|B'-B| \leq 18$. La seule possibilité avec $A < A'$ est donc $A' = A+1$ d’où $B' = B-11$ et $C' = C+10$. Comme B, B’, C et C’ sont compris entre 6 et 24, cela impose :
$17 \leq B \leq 24$ et $6 \leq C \leq 14$. On en déduit $23 \leq B+C \leq 38$ donc $7 \leq A = 45 - (B+C) \leq 22$.
Il y a donc $8\times9=72$ couples (B,C) possibles (A s’en déduit) donc il y a 72 sommes S qui donnent deux S’.

On les calcule par la formule $S = 4500 - 90B - 99C$ pour B variant de 17 à 24 et pour C variant de 6 à 14, puis on les trie par ordre croissant :

954, 1044, 1053, 1134, 1143, 1152, 1224, 1233, 1242, 1251, 1314, 1323, 1332, 1341, 1350, 1404, 1413, 1422, 1431, 1440, 1449, 1494, 1503, 1512, 1521, 1530, 1539, 1548, 1584, 1593, 1602, 1611, 1620, 1629, 1638, 1647, 1683, 1692, 1701, 1710, 1719, 1728, 1737, 1746, 1782, 1791, 1800, 1809, 1818, 1827, 1836, 1881, 1890, 1899, 1908, 1917, 1926, 1980, 1989, 1998, 2007, 2016, 2079, 2088, 2097, 2106, 2178, 2187, 2196, 2277, 2286, 2376.