TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2000

Les sujets COLLÈGE

Objectif 2000

En partant de 1, on peut arriver à 2000 en n'utilisant que deux opérations :

- *ajouter 1,*
- *multiplier par 3.*

Donnez un exemple et dites en combien d'étapes vous avez réussi.
Quel est le nombre minimum d'étapes à utiliser ?

Abattez vos cartes !

On veut recouvrir en partie un rectangle de 13 cm sur 8 cm en utilisant sept cartes de 5 cm sur 3 cm. Les cartes peuvent se chevaucher (mais ne les coupez pas !).
Proposez trois dispositions laissant :

- *la première, une partie découverte de 4 cm^2,*
- *une autre, une partie découverte de 3 cm^2,*
- *la dernière, une partie découverte de 2 cm^2.*

Bonne route !

Thomas, Martine et Lucie habitent les trois maisons T, M, L.

$\times T$

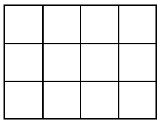
$M \times$

$\times L$

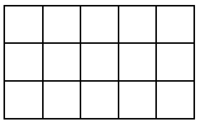
Une route rectiligne doit être construite. Les trois maisons doivent être à la même distance de la route.
Dessinez une route. Justifiez votre construction. Plusieurs tracés sont-ils possibles ?

Attention ! Un carré peut en cacher un autre !

Des rectangles de largeur 3 sont divisés en petits carrés de côté 1.



Sur ce rectangle, on compte 20 carrés (mais oui !).



Comptez les carrés sur ce deuxième rectangle.

Sur un troisième rectangle de largeur 3, on a compté 2000 carrés. Quelle est la longueur de ce dernier rectangle ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2001

Les sujets COLLÈGE

Il était deux foix

Vous allez écrire un nombre à huit chiffres, le plus grand possible, répondant aux conditions suivantes :
Il y a deux fois le chiffre 4, deux fois le chiffre 3, deux fois le chiffre 2 et deux fois le chiffre 1.
Entre les deux chiffres 4, il y a quatre chiffres ; entre les deux chiffres 3, il y a trois chiffres ; entre les deux chiffres 2, il y a deux chiffres ; entre les deux chiffres 1, il y a un chiffre.
Racontez-nous comment vous faites.

Le prix du Soleil

Alice vend les voyelles mais offre gratuitement les consonnes et les accents.
Au pays d'Alice, Vénus vaut 30 euros, Mercure vaut 43 euros et Uranus 54 euros. Jupiter vaut le double de Mars et Pluton a le même prix que la Terre.
Quel est le prix du Soleil ?

Coupez, assemblez

Théo veut découper un rectangle en quatre trapèzes rectangles de même aire.
Comment peut-il faire ?
Léa veut découper un trapèze rectangle et reconstituer avec tous les morceaux quatre trapèzes rectangles de même aire. Aidez-la.
Attention : les trapèzes rectangles dont il est question ici ne doivent pas être des rectangles.

2001 Oh dis c'est….

Clément écrit une suite de nombres.

La somme de trois nombres consécutifs dans la suite est toujours égale à 20.

Le deuxième nombre est 5 ; le septième est 8.

Quel est le 2001ème ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2002

Les sujets COLLÈGE

Ce millénaire a déjà un an !

Chaque case blanche contient un nombre de un chiffre.

Racontez comment vous faites pour remplir la grille suivante :

	a	b	c	d
1				
2				
3				
4	2	0	0	2

HORIZONTALEMENT

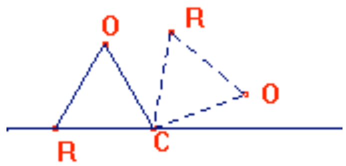
1) Leur produit est le carré de 8.
2) Leur produit est 8 et leur somme aussi.

VERTICALEMENT

a) Leur produit est 8 et leur somme aussi.
b) Leur produit est 8 et leur somme 1 de plus (2 premières cases).
c) Leur produit est 8 et leur somme 2 de moins (2 premières cases).
d) Leur produit est 8 et leur somme 1 de moins.

A vous de trouver une définition pour la ligne 4), en utilisant le nombre 8.

Roc and roll…



Un triangle équilatéral ROC, de côté 4 cm, « roule » sur une droite.

Dans sa position initiale, R et C sont sur la droite. On fait basculer le triangle autour de C pour amener le point O sur la droite ; puis on le fait basculer autour de O pour amener R sur la droite et on continue, toujours dans le même sens …

Dessiner le trajet parcouru par le point R pendant trois basculements.

Combien de basculements faut-il effectuer pour que la longueur du trajet parcouru par R dépasse 2002 cm ?

Faces cachées….

On veut assembler, en les collant, trois cubes d'arêtes 2 cm, 6 cm et 8 cm, afin de cacher le plus de surface possible.
Faites un dessin de l'assemblage trouvé et calculez la surface d'encollage.

Rendez-vous au plus près !

Anémone, Marguerite, Rose et Violette habitent le long de la même route en A, M, R et V.
Anémone, Marguerite et Rose décident de se rencontrer en un point de cette route.
Où la rencontre doit-elle avoir lieu pour que la somme des distances parcourues par les trois amies soit la plus petite possible ?

Le lendemain, elles veulent se rencontrer toutes les quatre. Où la rencontre doit-elle avoir lieu pour que la somme des distances parcourues par les quatre amies soit la plus petite possible ?

Et si elles étaient 5 amies ? 6 amies ? ….

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2003

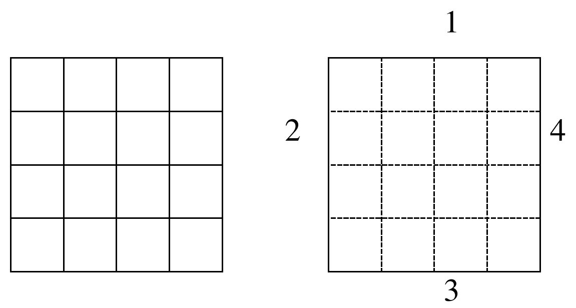
Les sujets COLLÈGE

Chaîne numérique

Classez les entiers de 1 à 15 de sorte que la somme de deux nombres placés côte à côte soit toujours le carré d'un entier.

Coloriez au quart de tour

On dispose de deux grilles carrées 4×4.



1e grille 4 × 4 *2e grille 4 × 4*

Dans la deuxième grille on découpe des petits carrés pour l'utiliser comme un pochoir :
en le posant sur la première grille et sans jamais le retourner, on va colorier certaines cases de la première grille.

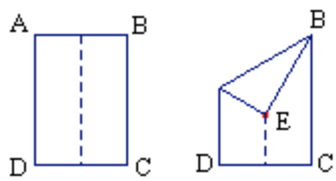
Quand le 1 est en haut, on colorie en rouge, on fait tourner, avec le 2 en haut on colorie en bleu, avec le 3 en haut on colorie en vert, et enfin, avec le 4 en haut, on colorie en gris (chaque case ne doit être coloriée qu'une fois).

Combien de petits carrés faut-il découper au minimum pour qu'en faisant tourner le pochoir sur la première grille on puisse en colorier toutes les cases ?

Dessinez la grille coloriée et collez le pochoir qui a permis ce coloriage.

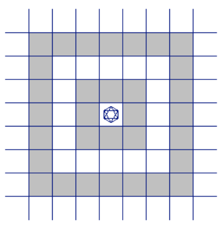
Proposez un pochoir permettant le coloriage d'une grille 6 × 6.
Quels sont les entiers n pour lesquels les grilles n × n peuvent être coloriées de cette façon ?

Deux plus, un triangle



Pliez en deux, dans le sens de la longueur, une feuille rectangulaire ABCD.
Ouvrez la feuille et formez un nouveau pli passant par B de manière à amener le point A en un point du premier pli (notez E ce point).
Dépliez la feuille, tracez le triangle ABE et démontrez qu'il est équilatéral.

C'est l'heure des anneaux



Le premier « anneau » autour du carré central contient 8 carrés gris ; le deuxième « anneau » contient 16 carrés blancs ; le troisième contient …

Combien y aurait-il de carrés dans le 2003ème « anneau » ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2004

Les sujets COLLÈGE

Comptez les moutons, mais ne vous endormez pas

Le berger a réparti ses moutons dans huit enclos. Le nombre de moutons dans chaque enclos est indiqué sur le schéma par une lettre. Sa cabane, située au centre, possède une ouverture sur chaque face de laquelle il peut voir les moutons des trois enclos d'une même ligne ou d'une même colonne. Quelle que soit l'ouverture par laquelle il regarde, il compte 501 moutons. Combien a-t-il de moutons au minimum ? au maximum ?

a	b	a
b		b
a	b	a

Le bon plan

Sur une île, il y a six villages A, B, C, D, E, F. Le tableau suivant donne les distances à vol d'oiseau (en km) entre certains de ces villages.

B	5				
C	5	5			
D		5	5		
E		5		10	
F	5			10	
	A	B	C	D	E

Proposez un plan représentant ces six villages (1 cm pour 1 km) en expliquant votre procédé de construction.

Avec son avion, un pilote survole cette île et remarque que les six villages sont les sommets de cinq triangles équilatéraux. Dites lesquels en justifiant vos réponses.

Le nombre et son double

Trouvez un nombre entier de cinq chiffres, le plus grand possible, sachant que son double est un nombre de cinq chiffres et que les dix chiffres sont tous différents ; racontez comment vous faites.

Le dessous des cartes

Sept cartes sont numérotées 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Marius, Sébastien et Agnès tirent chacun une carte et sans la regarder, la montrent aux deux autres.
Un observateur leur dit : « Tiens ! Le produit des trois nombres est le carré d'un nombre entier ».
Citez toutes les situations où Sébastien, voyant les cartes d'Agnès et de Marius, peut trouver le nombre inscrit sur la sienne.
Donnez une situation où tous les trois peuvent trouver la valeur de leur carte (sans la regarder). Expliquez pourquoi.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2005

Les sujets COLLÈGE

Cinq pour un

On dispose de cinq carrés identiques de côté 2 cm.

Quatre de ces carrés sont découpés chacun en deux rectangles identiques.

Quatre de ces rectangles sont découpés chacun en deux triangles rectangles identiques.

Assemblez les treize pièces obtenues pour former un carré (on placera le carré de côté 2 cm au centre).

Dans le carré obtenu, trouvez une disposition pour les nombres entiers de 1 à 13 qui respecte les consignes suivantes :

- les nombres qui s'écrivent 1 plus un multiple de 3 sont dans des pièces n'ayant ni sommet ni côté en commun, le 1 étant dans la pièce centrale ;

- les nombres qui s'écrivent 2 plus un multiple de 3 sont dans des pièces n'ayant ni sommet ni côté en commun.

Plus ou moins

On construit un triangle de signes + ou – en partant de la base formée de quatre signes (+ ou –) puis en formant les étages supérieurs par application de la règle des signes pour le produit ; par exemple :

```
      –
    +   –
  +   +   –
+   +   +   –
```

(il y a sur cet exemple quatre signes – et six signes + dans le triangle).

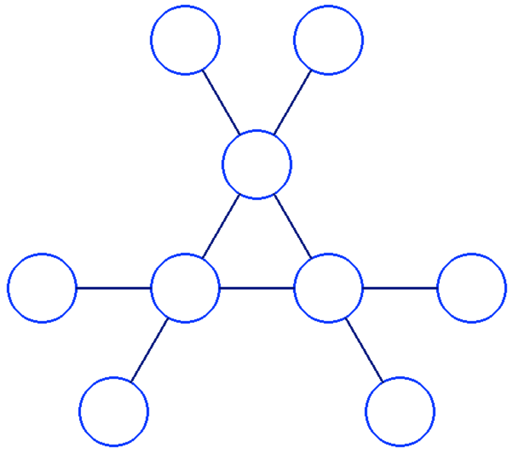
Comment choisir la base de quatre signes pour qu'il y ait autant de signes + que de signes – dans le triangle ?
Comment choisir la base de quatre signes pour qu'il y ait le maximum de signes – dans le triangle ; comment savez-vous que c'est le maximum ?

Lignes magiques

Proposez un placement des nombres entiers de 1 à 9 dans les disques de sorte que la somme des nombres situés sur une même ligne soit la même pour les trois lignes.

Donnez une disposition pour la plus petite valeur possible de la somme et expliquez pourquoi c'est la plus petite possible.

Faites de même pour la plus grande valeur possible de cette somme.



Entiers symétriques

On dira qu'un nombre entier est symétrique s'il est égal à la somme des termes d'une suite finie d'entiers strictement positifs vérifiant les 3 conditions :

- *le premier terme de la suite est 1,*
- *la suite est symétrique, c'est-à-dire que deux termes équidistants des extrêmes sont égaux,*
- *deux termes consécutifs diffèrent de 1.*

Par exemple 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 est une suite vérifiant ces trois conditions.
La somme de ses termes vaut 14 ; 14 est donc un entier symétrique.
Quels sont les nombres symétriques inférieurs ou égaux à 10 ?
Montrez que si n est symétrique, n + 6 l'est aussi.
2005 est-il symétrique ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

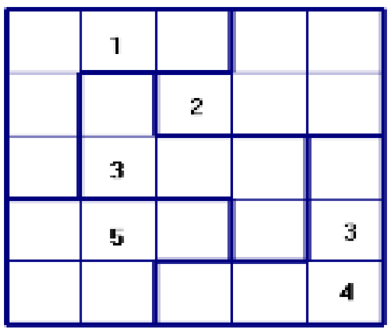
LIMOUSIN

2006

Les sujets COLLÈGE

Cinq par cinq

Voici une grille 5 × 5 contenant cinq régions, délimitées par les traits épais :



On veut compléter cette grille avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 en respectant la règle suivante : chaque ligne, chaque colonne et chaque région contiennent les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 une fois et une seule.

Commencez à compléter la grille, case après case, à chaque fois qu'un seul chiffre convient en expliquant votre démarche pour les trois premières cases remplies.

Achevez de remplir la grille.
Combien y a-t-il de grilles solutions ?

Plus vrai que vrai

*« **Six plus deux égale huit**.»*
C'est vrai aussi en écrivant :

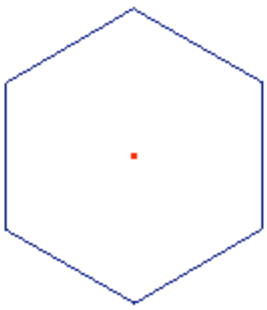
```
   S I X
+ D E U X
---------
= H U I T
```

où chaque lettre représente un chiffre de 0 à 7, avec les trois règles suivantes :

- *aucun nombre ne peut commencer par zéro ;*
- *deux lettres différentes doivent être remplacées par deux chiffres différents ;*
- *deux lettres identiques doivent être remplacées par deux chiffres identiques.*

Ecrivez les opérations que vous avez trouvées et indiquez les remarques qui vous ont permis de les obtenir.

Tout en triangles

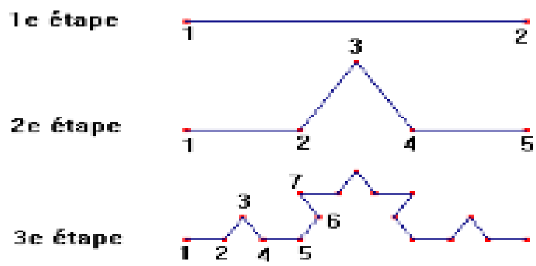


Voici un hexagone régulier.
Reproduisez-le sur votre copie en l'agrandissant si vous voulez.
Construisez, en expliquant, un triangle équilatéral de même périmètre que votre hexagone.
En imaginant un découpage du triangle obtenu, peut-on reconstituer l'hexagone ?
Combien au minimum faudrait-il découper de triangles identiques au précédent pour reconstituer un nombre entier d'hexagones comme le vôtre (tous les morceaux doivent être utilisés) ?

Un chemin épineux : fractal !

Observez :

Pour passer d'une étape à la suivante on remplace chaque segment par quatre segments de longueur trois fois plus petite et on numérote les extrémités des segments comme indiqué ci-contre.



Sur la feuille jointe, construisez et numérotez la 4e étape.

Y a-t-il une étape où on peut obtenir 2006 au sommet central ?

A quelle étape 2006 apparaît-il pour la première fois ? Quel est alors le nombre situé au sommet central ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

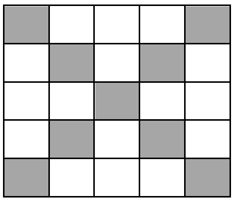
DU

LIMOUSIN

2007

Les sujets COLLÈGE

Carrés sur diagonales



Sur ce quadrillage de côté 5, on a noirci les 9 carrés situés sur les diagonales.

Sur un quadrillage de côté n, on noircit tous les carrés situés sur les diagonales.

Peut-on obtenir 2007 carrés noircis ? Dites pourquoi en justifiant votre réponse.

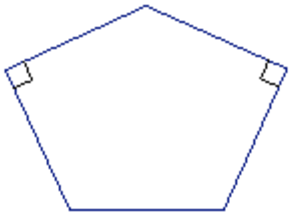
Placez bien vos billes

6	1		
		4	

Quarante-huit billes doivent être rangées dans ce casier de 16 cases. Il doit y avoir douze billes par ligne et par colonne. De plus, aucune case ne doit être vide et sur chaque ligne, chaque colonne et même sur chacune de deux diagonales les cases contiennent des nombres de billes tous différents. Onze des quarante-huit billes ont déjà été placées comme indiqué sur le dessin.

Proposez un rangement en justifiant la position des trois premiers nombres que vous placez.

Quatre pentagones pour un hexagone



Ce pentagone a ses cinq côtés de même longueur et deux angles droits ; proposez une construction de ce pentagone et expliquez-la.

Quatre pentagones identiques à celui-ci pavent complètement et sans chevauchement un hexagone (polygone à 6 côtés).
Dessinez ou réalisez ce pavage et justifiez-le.

Je vous ai apporté des bonbons

Jacques a dix bonbons qu'il doit, soit mettre dans un sachet, soit les répartir dans plusieurs sachets qui devront avoir le même nombre de bonbons. Donnez toutes les façons de les répartir.

Germaine possède aussi dix bonbons qu'elle veut répartir en sachets de sorte que le ou les sachets qui en contiennent le plus aient un bonbon de plus que le ou les sachets qui en contiennent le moins.
Donnez, dans ce cas également, toutes les façons de les répartir.

Peut-on remplacer dix par un autre nombre entier de façon que Germaine et Jacques aient le même nombre de répartitions ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

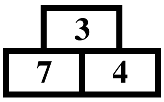
2008

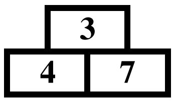
Les sujets COLLÈGE

Chamboule tout

Un stand de kermesse propose un « chamboule tout » formé de briques posées sur une planche. Le jeu consiste à les faire tomber.
Chaque brique porte un nombre entier (de 0 à 9), différence des deux nombres inscrits sur les deux briques qui la supportent.

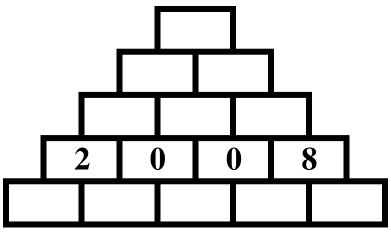
Par exemple :





Le score de chaque joueur correspond à la somme de tous les nombres marqués sur les briques qu'il a fait tomber.

Voici les nombres marqués sur quatre des briques :



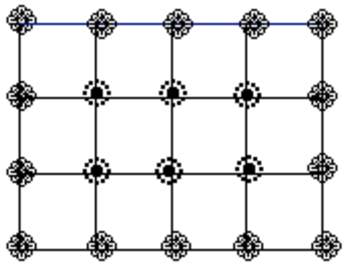
1) Inscrivez les nombres manquants en donnant toutes les possibilités. Expliquez comment vous les avez trouvés.

2) Quel est le score maximal que vous pouvez obtenir en faisant tomber cet assemblage ?

3) Prolongement : si aucune brique n'est numérotée, pouvez-vous proposer une numérotation des briques de cet assemblage, en conservant la règle des différences, permettant d'obtenir un score supérieur à celui de la question précédente ?

Mon beau tapis

Pour réaliser un tapis rectangulaire, on utilise des carrés de tissu, des boutons et des fleurs en feutrine. On coud un bouton à chaque intersection intérieure, et une fleur en feutrine à chaque intersection de la bordure comme dans l'exemple ci-dessous :



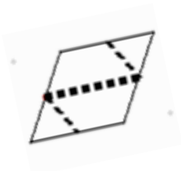
12 carrés de tissu
6 boutons
14 fleurs

1) Pour fabriquer un tapis on utilise 24 carrés de tissu et 15 boutons. Combien de fleurs de feutrine faut-il pour le réaliser ? Dessinez ce tapis.

2) On utilise 2008 carrés de tissu et autant de boutons que l'on veut : réaliser un tapis en utilisant le plus petit nombre de fleurs de feutrine.

Calissons Z

Arthur veut carreler sa salle de bain. Les carreaux blancs qu'il utilise ont la forme de calissons d'Aix en Provence (losanges formés de deux triangles équilatéraux juxtaposés) sur chacun desquels est dessiné, à partir des milieux des côtés , un Z en pointillés :



Sur la feuille jointe, on a dessiné une grille dont les points sont les sommets de triangles équilatéraux et on a commencé un carrelage qui fait apparaître un trapèze dont les côtés sont en pointillés.

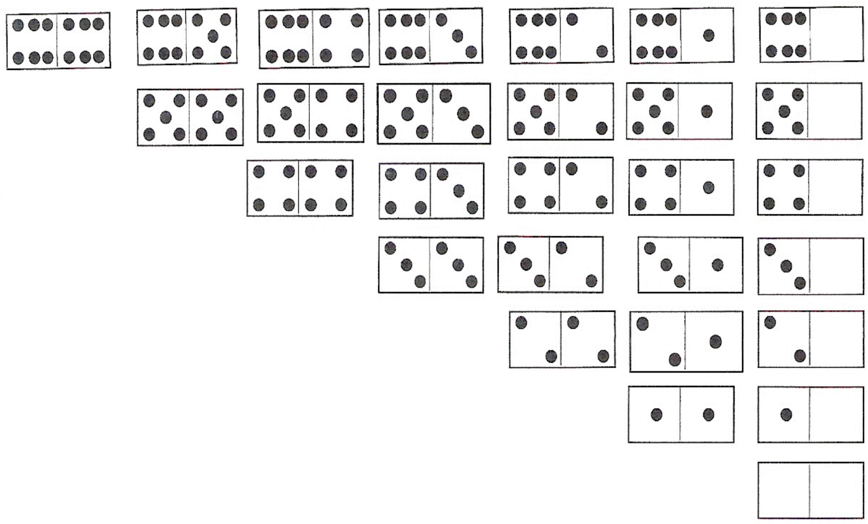
1) Quels sont les autres débuts de carrelage que l'on peut proposer et qui font apparaître d'autres polygones en pointillés et qui n'ont pas de pointillés à l'intérieur ?

2) Parmi ces polygones quel est celui qui a la plus grande aire ?

3) Parmi ces polygones quel est celui qui a le plus petit périmètre ?

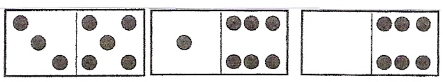
Enchaînons les dominos

Voici les 28 dominos d'un jeu de dominos :

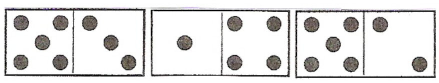


On pose un premier domino, puis on fait une chaîne de dominos, en allant de gauche à droite, de manière à obtenir une suite de nombres entiers compris entre 0 et 6 ; chaque nombre de la chaîne est la somme, si elle est inférieure à 7, des deux nombres qui le précèdent ; si la somme est supérieure ou égale à 7, on la diminue de 7 .
On arrête quand le domino qu'il faudrait poser est déjà utilisé.

Exemples de débuts de chaînes :



etc… qu'on notera : (3,5) (1,6) (0,6) etc.



etc… qu'on notera : (5,3) (1,4) (5,2) etc.

1) Formez la chaîne commençant par le domino noté (4,2).

2) Une chaîne contient le domino noté (1,3) et ce domino n'est pas le premier, quel est le précédent ?

3) Formez une chaîne la plus longue possible contenant le domino formé des chiffres 3 et 5.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2009

Les sujets COLLÈGE

Croisons les nombres

Remplissez la grille avec les nombres entiers de 1 à 16 en respectant les informations suivantes :

(R1) Deux nombres consécutifs ne peuvent pas être placés dans deux cases voisines par un côté.

(R2) Il y a exactement deux nombres pairs et deux nombres impairs par ligne et par colonne.

	A	*B*	*C*	*D*
I				
II		*13*		*7*
III	*5*		*1*	
IV	*2*	*11*		*3*

Colonne C : *Carrés de nombres entiers*
Ligne I : *Nombres multiples de 3*
Ligne III : *Le dernier nombre est la somme des trois premiers*

Expliquez comment vous placez vos 5 premiers nombres.

Surveillance rapprochée

Les salles d'un musée sont représentées par un quadrillage 3 x 3. Dans certaines salles, un gardien surveille, outre la salle où il se trouve, les salles qui ont un côté commun avec sa salle.
Quel est le nombre minimum de gardiens pour que toutes les salles soient sous surveillance ?
Dessinez un quadrillage avec les emplacements des gardiens.
Reprenez ce problème pour un quadrillage 4 x 4 puis pour un quadrillage 5 x 5.

ARA mon perroquet

Mon perroquet ARA n'utilise que les lettres A et R. Il peut remplacer un mot par un autre en respectant la règle suivante : un A peut être remplacé par RAR ou bien RAR peut être remplacé par A.
Par exemple, à partir de AA, il peut construire RARA , ARAR , RARRAR , …
Donnez trois mots qu'il peut construire à partir de ARARA.
Montrez qu'il peut former RRAAA à partir de RAARA.
Pourquoi RARAR ne peut-il pas être formé à partir de RAARA ?

Une case en trop

Avec des rectangles 1 x 3 on veut paver une grille carrée 4 x 4 ; montrez qu'il reste exactement un petit carré de côté 1 non pavé ; quelles sont les différentes possibilités pour la position du petit carré non pavé ?
Mêmes questions avec un carré 5 x 5.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2010

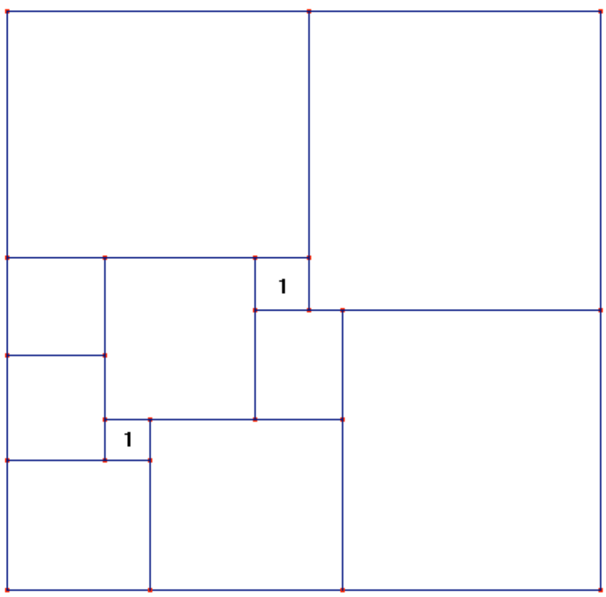
Les sujets COLLÈGE

La plus jeune

Anaïs, Barbara et Chloé ont des âges différents. Une seule des trois affirmations suivantes est vraie :
« Anaïs est la plus âgée »
« Barbara n'est pas la plus âgée »
« Chloé n'est pas la plus jeune »
Qui est la plus jeune ? Expliquez votre démarche pour trouver la réponse.

Des carrés pour un carré

Un carré a été partagé en 11 carrés selon le schéma suivant (les dimensions ne sont pas respectées). Les côtés des carrés sont des nombres entiers et deux des carrés notés sur le dessin ont pour côté 1. Quel est le côté du carré qui a été partagé? Expliquez votre démarche.

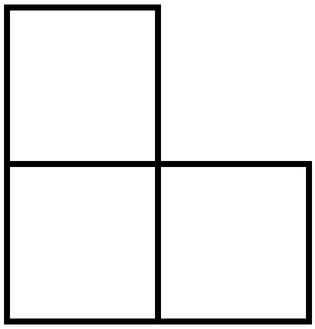


Rapprochez-vous

En utilisant tous les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 formez deux nombres de quatre chiffres de sorte que leur différence (le plus grand moins le plus petit) soit la plus petite possible. Expliquez votre démarche.

Les paires de triminos

On dispose de deux pièces comme celle qui est dessinée (chaque pièce est formée de trois carrés).



Dessinez le maximum de formes différentes que l'on peut obtenir en disposant ces deux pièces de façon qu'elles se touchent par au moins un côté de petit carré. Deux formes sont différentes si on ne peut pas les superposer après découpage (même en les retournant).

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2011

Les sujets COLLÈGE

Différences interdites

On dispose des vingt premiers entiers en partant de 1.

Parmi ces 20 entiers on a choisi une liste de 7 nombres : 1, 5, 10, 11, 15, 16, 20. On remarque que les différences que l'on peut calculer entre deux entiers quelconques de cette liste ne sont jamais égales à 3. Vérifiez-le.

Trouvez, parmi ces 20 entiers, une liste de 11 entiers de façon que la différence entre deux entiers quelconques de cette liste ne soit jamais égale à 3.

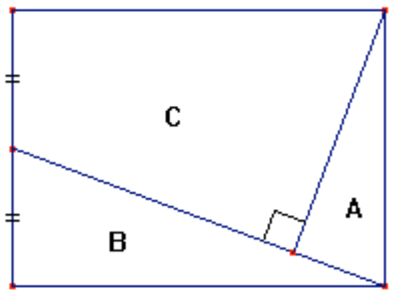
Donnez, parmi ces 20 entiers, la plus longue liste que vous pouvez obtenir, de façon que la différence entre deux entiers quelconques de cette liste ne soit jamais égale à 4.

Deux listes d'entiers

Anaïs construit une liste d'entiers (positifs ou négatifs) avec la règle suivante : à partir du troisième, chaque entier de la liste est égal à celui qui le précède moins celui qui est juste avant ; elle choisit 20 en premier et 11 en deuxième, le troisième est donc égal à 11-20 = - 9.
Ecrivez les dix premiers entiers de la liste d'Anaïs et calculez leur somme.
Quelle est la somme des 2011 premiers entiers de la liste d'Anaïs ? Expliquez.

Un puzzle

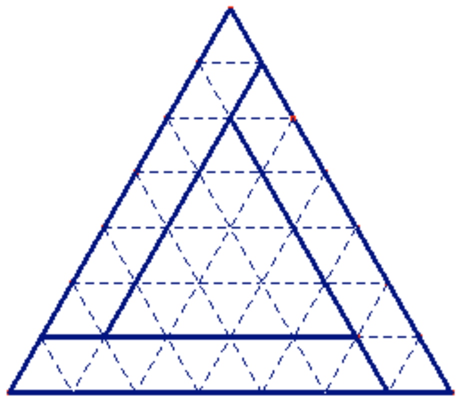
Alice a tracé un rectangle et l'a découpé en trois morceaux en prenant un milieu et en construisant une perpendiculaire comme sur la figure ; en déplaçant les morceaux A et B, elle peut former un nouveau rectangle. Faites une figure ou un collage pour montrer comment procède Alice. Justifiez qu'elle obtient bien un rectangle.

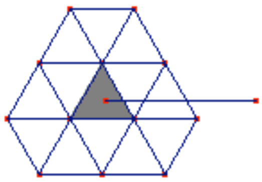


Bob voudrait dessiner un rectangle et, en faisant le même découpage qu'Alice, obtenir un nouveau rectangle qui aurait les mêmes dimensions que son rectangle de départ.
Aidez Bob à construire avec règle, compas ou équerre, le rectangle de ses rêves.

Partage d'un triangle

*Sur une grille dont les **mailles** sont des triangles équilatéraux, on a dessiné un triangle équilatéral et on l'a partagé en quatre **régions** : trois trapèzes superposables et un triangle. Le côté d'une maille est pris comme unité de longueur. Voici le dessin pour un triangle de* côté 7 :





On désigne par n la longueur du côté du triangle de départ. Complétez le tableau et faites les dessins correspondants sur la feuille jointe qui sera à rendre avec votre copie.

Que remarque-t-on pour n = 6, pour n = 8 ?
Pour un triangle de départ de côté n, trouvez le périmètre et le nombre de mailles de chacune des quatre régions. Pour quelle(s) valeur(s) de n les quatre régions ont-elle le même périmètre ?
Pour quelle(s) valeur(s) de n les quatre régions ont-elle la même aire ? (on remarquera que dans ce cas l'aire de la région triangulaire est égale au quart de l'aire du triangle de départ)

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2012

Les sujets COLLÈGE

Jouer avec 2012

Quelle est la somme des chiffres du nombre 10000 - 2012, puis du nombre 100000 - 2012 ?

Quelle est la somme des chiffres du nombre 1000…000 – 2012 ? (le premier terme de la différence s'écrit avec le chiffre 1 suivi de 2012 zéros)

Somme d'entiers qui diffèrent de 1

On cherche à écrire un entier comme la somme d'une suite d'entiers strictement positifs vérifiant les 2 conditions :
(a) la suite débute par un 1,
(b) deux termes consécutifs de la suite ont toujours une différence (le plus grand moins le plus petit) égale à 1.
Par exemple 11=1+2+3+2+3 ou 11=1+2+3+2+1+2.

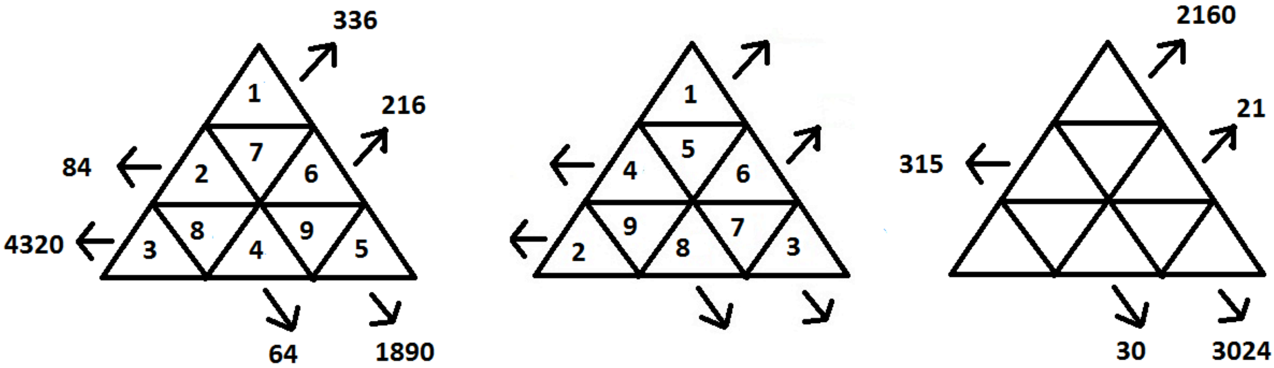
1) Ecris de cette façon les entiers inférieurs ou égaux à 10 quand c'est possible.

2) Ecris de cette façon 50 avec une suite la plus longue possible.

3) Ecris de cette façon 50 avec une suite la plus courte possible.

Les triangles

Dans un premier triangle divisé en neuf cases on a placé les nombres de 1 à 9 puis on a calculé les six produits comme indiqué sur la figure :

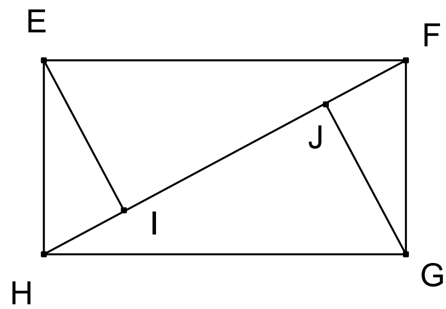


1) Calcule les produits du second triangle de la même façon que pour le premier triangle.

2) Dans le troisième triangle seuls cinq produits sont indiqués. Place les entiers de 1 à 9 de façon à obtenir les produits indiqués par les flèches. Explique comment tu as placé tes trois premiers nombres. Donne toutes les solutions.

Ouvrir ou fermer l'enveloppe

Partant d'un rectangle ABCD, on a placé des points : E sur [AB], F sur [BC], G sur [CD] et H sur [DA]. Puis on a plié selon [EF], [FG], [GH], [HE]. Après pliage, A et B viennent en I, C et D viennent en J où I et J sont sur [HF]. (Dessin joint)



A partir du rectangle EFGH dessine et explique comment tu retrouves le rectangle ABCD de départ.

A partir d'un rectangle ABCD tel que AB soit inférieur à BC, place les points E, F, G, H pour obtenir un pliage comme sur le dessin. Explique.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2013

Les sujets COLLÈGE

Le temps passe

Combien de minutes séparent le 10/11/12 à 13h14 du 11/12/13 à 14h15 ? Détaille tes calculs.

Anniversaire d'exception en 2013

Karim B., né en 1987, a fêté ses 25 ans en 2012. Or 25 est égal à la somme des chiffres de 1987.
En quelle(s) année(s) sont nés ceux qui fêteront en 2013 un âge égal à la somme des chiffres de leur année de naissance ?

Multiple caché

Claude écrit tous les nombres de quatre chiffres distincts formés avec 2, 4, 5 et 7. Combien en écrit-il ?

Deux de ces nombres sont tels que l'un est multiple de l'autre. Lesquels ?

Du rectangle au carré

1. *Manon découpe un rectangle dont la longueur est le double de la largeur en trois morceaux. Elle reconstitue un carré avec les trois morceaux. Trouve son découpage et explique pourquoi elle obtient bien un carré.*

2. *On peut aussi découper un rectangle de largeur 4 cm et de longueur 9 cm en deux morceaux de façon à pouvoir reconstituer un carré avec les deux morceaux. Trouve ce découpage.*

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2014

Les sujets COLLÈGE

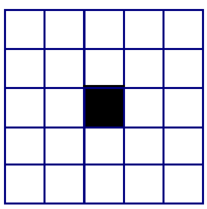
Code oublié

Arthur a oublié le code à quatre chiffres qui permet d'ouvrir son cadenas. Il se souvient qu'il n'y a pas de zéro, que les deux chiffres du milieu sont identiques, que le chiffre des milliers est supérieur au chiffre de unités et que le code est divisible par 5 et par 9.

Quels sont tous les codes possibles ? Expliquez.

Beaucoup de carrés

Dans cette grille 5 × 5 dessinée ci-dessous il y a cinq sortes de carrés : 1 × 1 ; 2 × 2 ; 3 × 3 ; 4 × 4 et 5 × 5.
Combien de carrés de chaque sorte contiennent le carré noir ?



On remplace cette grille 5 × 5 par une grille 11 × 11, le carré noir étant encore au centre.
Combien de carrés de toutes tailles (de 1 × 1 à 11 × 11) contiennent le carré noir ?

Encore des carrés

Partagez un carré en 4, 6, 7, 8, 9, 10 carrés pas nécessairement de même taille.
Faites une figure pour chaque cas.

Familles de trois enfants

Dans une cité il y a 200 familles qui ont 1, 2 ou 3 enfants. Le nombre total de ces enfants est égal à 330.

On compte le nombre de familles ayant 1 enfant, puis le nombre de familles ayant 2 enfants, puis le nombre de familles ayant 3 enfants. Deux des trois nombres obtenus sont égaux. Combien y a-t-il de familles ayant 3 enfants ? Expliquez votre démarche.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2015

Les sujets COLLÈGE

C'est renversant

Nous dirons que le renversé de 124 est 421 ; un palindrome est un entier égal à son renversé.

On prend un entier et on lui ajoute son renversé ; si le nombre obtenu n'est pas un palindrome, on lui ajoute son renversé ; on continue ainsi jusqu'à obtenir un palindrome.

Par exemple pour 23, une seule addition donne un palindrome : 23 + 32 = 55.

Pour 19 il faut deux additions : 19 + 91 = 110 puis 110 + 011 = 121.

Combien faut-il d'additions pour obtenir un palindrome en partant de 87 ?

Quels sont les entiers inférieurs à 87 qui nécessitent au moins 4 additions pour obtenir un palindrome ?

Toujours par 3

On dispose de jetons qui sont blancs d'un côté et noirs de l'autre. Au départ les jetons sont posés sur une table, le côté noir étant visible. Une étape consiste à choisir 3 jetons et à les retourner.

a) Montrez que si on a placé 10 jetons sur la table, on peut arriver en 4 étapes à ce que tous les jetons montrent leur face blanche. Indiquez pour chaque étape le nombre de jetons noirs et le nombre de jetons blancs que vous retournez.

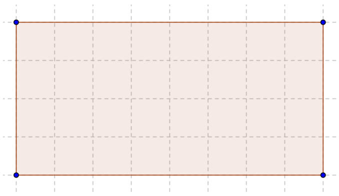
b) Si on place 11 jetons sur la table combien faut-il d'étapes au minimum pour passer de la situation où tous les jetons montrent leur face noire à la situation où tous les jetons montrent *leur face blanche ?*

c) Reprendre la question b) avec 2015 jetons.

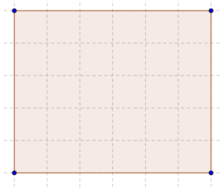
Jouons avec des périmètres et des aires

Reproduisez les trois rectangles sur votre copie en utilisant votre quadrillage.

a) En suivant les lignes du quadrillage partagez le rectangle 4 x 8 en quatre morceaux ayant la même aire mais des périmètres tous différents.
Ecrivez dans chaque morceau son périmètre et donnez l'aire commune.



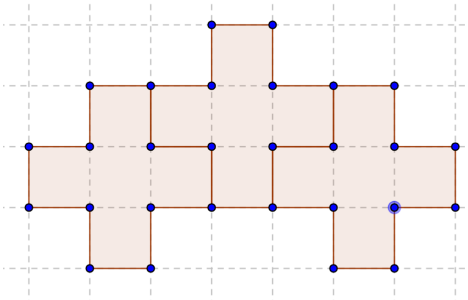
b) En suivant les lignes du quadrillage partagez le rectangle 5 x 6 en quatre morceaux ayant le même périmètre mais des aires toutes différentes.
Ecrivez dans chaque morceau son aire et donnez le périmètre commun.



c) En suivant les lignes du quadrillage partagez le rectangle 4 x 6 en quatre morceaux ayant le même périmètre, la même aire mais des formes toutes différentes.
Donnez le périmètre commun et l'aire commune.

Avec des croix

On dispose de 12 croix identiques constituées de 5 carrés de côtés de longueur 1 cm. On assemble ces croix, pour former un polygone, de façon que deux croix en contact se touchent par 3 côtés. Par exemple avec trois croix on peut former ce polygone :



Quel est le plus grand périmètre que l'on peut obtenir pour un polygone formé de cette façon avec les 12 croix ?

Quel est le plus petit périmètre que l'on peut obtenir pour un polygone formé de cette façon avec les 12 croix ?

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2016

Les sujets COLLÈGE

Le tour du champ

Un champ rectangulaire est divisé en 4 parcelles également rectangulaires comme l'indique la figure ci-dessus qui n'est pas à l'échelle. Lorsqu'on fait le tour de 2 parcelles contigües (ayant un côté commun), on parcourt respectivement 1416m, 1500m, 1516m, 1616m.

Quel est le périmètre du champ ?

Il neige des flocons … de Von Koch !

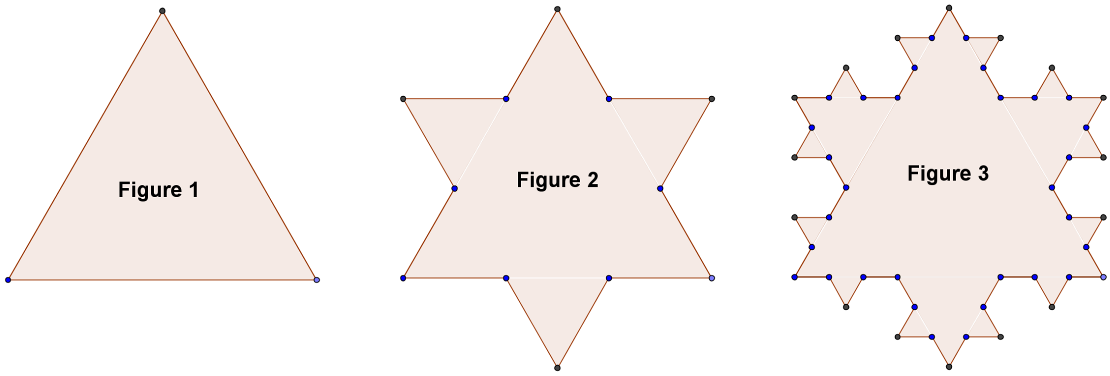
Pour obtenir un flocon de Von Koch, on considère un triangle équilatéral de 9 cm de côté sur lequel on procède au programme suivant:

- on divise chacun des segments de la figure en trois segments de même longueur

- on construit sur chaque segment médian à l'extérieur du triangle de base, un triangle équilatéral

- on supprime chacun des segments médians

- *on recommence les étapes précédentes.*



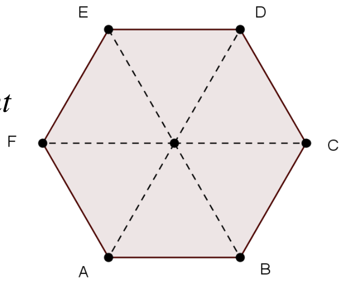
1. *Construisez les trois figures en vraie grandeur.*

2. *Calculez le périmètre de chacune des trois figures.*

3. *Quel serait le périmètre de la figure 4 ? De la figure 6 ?*

4. *On désigne par A l'aire de la figure 1. Montrez que l'aire de la figure 2 est égale à 4/3 de A. Quelle fraction de A mesure l'aire de la figure 4 ?*

Des triangles en famille



Un hexagone régulier ABCDEF est formé de 6 triangles équilatéraux ayant chacun une aire égale à 1 cm².

1. *Écrivez la liste des triangles ayant pour sommets trois points distincts pris parmi A, B, C, D, E et F.*

2. *Combien de formes différentes observe-t-on pour ces triangles ?*

3. *Calculez l'aire d'un triangle de chaque forme.*

4. *Calculez la moyenne des aires de tous les triangles obtenus à la première question.*

L'invasion des 1

Dans ce problème on a seulement le droit d'utiliser le nombre 1, des additions, des multiplications et des paires de parenthèses (mais on ne peut pas utiliser les nombres 11, 111, …).
En utilisant exactement 5 fois le nombre 1 on peut obtenir tous les entiers compris entre 1 et 6.
Par exemple : $1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 = 3$ *et* $(1 + 1) \times (1 + 1 + 1) = 6$.

1. *Montrez qu'avec exactement 6 fois le nombre 1 on peut obtenir tous les entiers de 1 à 9.*

2. *Quels entiers peut-on obtenir avec exactement 7 fois le nombre 1 ?*

3. *Quel est le plus grand entier qu'on peut obtenir avec exactement 8 fois le nombre 1 ?*

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2000

Les corrigés COLLÈGE

Objectif 2000

Il est plus économique (en étapes) de multiplier par 3 que d'ajouter 1, a fortiori quand le nombre est « grand ».
Le plus grand multiple de 3 inférieur à 2000 est 1998, c'est donc lui qu'on cherche à atteindre.

$$1998 = 3 \times 666$$
$$666 = 3 \times 222$$
$$222 = 3 \times 74$$

On cherche alors le plus grand multiple de 3 inférieur à 74 : c'est 72 ,

$$72 = 3 \times 24$$
$$24 = 3 \times 8$$

puis le plus grand multiple de 3 inférieur à 8 : c'est 6,

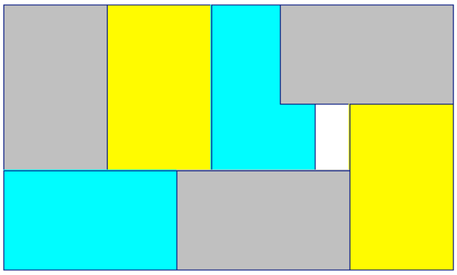
$$6 = 3 \times 2$$

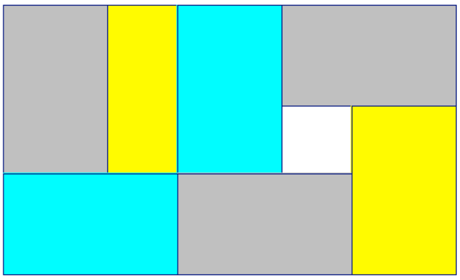
On a alors les 13 étapes suivantes :

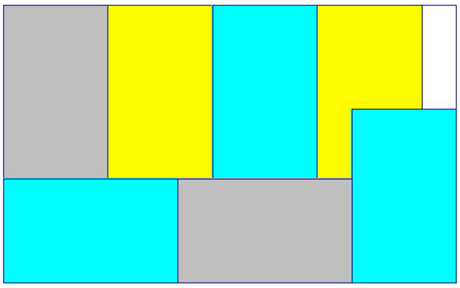
$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{+1} 7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{\times 3} 24 \xrightarrow{\times 3} 72 \xrightarrow{+1}$$

$$73 \xrightarrow{+1} 74 \xrightarrow{\times 3} 222 \xrightarrow{\times 3} 666 \xrightarrow{\times 3} 1998 \xrightarrow{+1} 1999 \xrightarrow{+1} 2000$$

Abattez vos cartes !



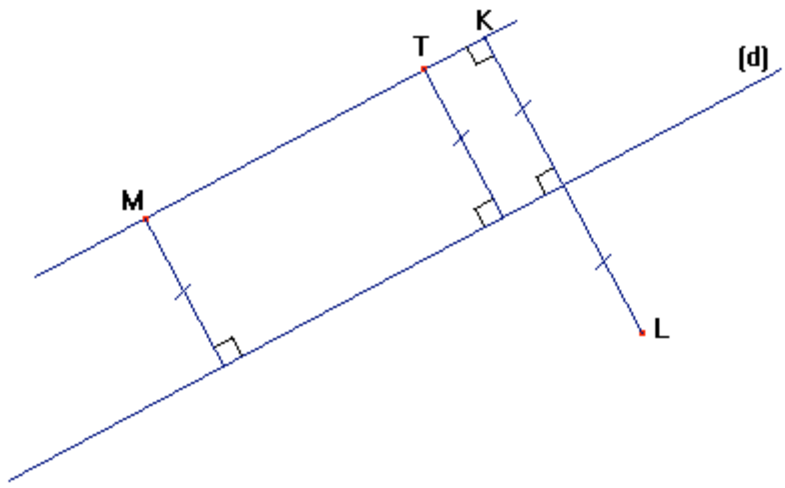


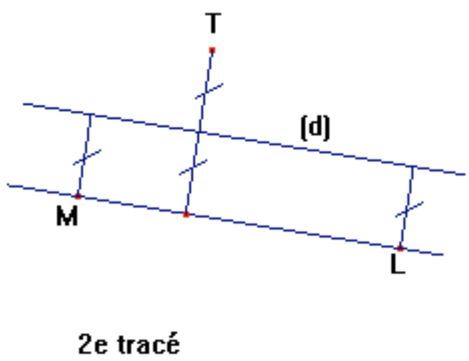


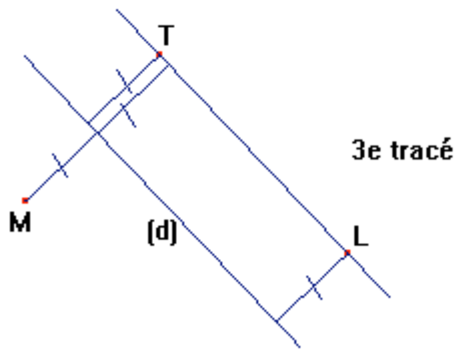
Bonne route !

Soit (d) la droite représentant la route. Les points T, M, L, représentant les maisons, ne sont pas alignés.
Il y a obligatoirement au moins deux points d'un même côté de la droite (d), par exemple : T et M.
Pour que les points T et M soient équidistants de (d), il faut que (d) soit parallèle à (TM).
La perpendiculaire à (TM) passant par L coupe (TM) en K.
La médiatrice de [LK] convient : T, M et L sont à la même distance de (d).

Il y a deux autres tracés possibles : l'un parallèle à (ML) et l'autre parallèle à (LT).







Attention ! Un carré peut en cacher un autre

Sur le rectangle de longueur 5 et de largeur 3, on compte :

15 carrés de côté 1	(3 × 5)
8 carrés de côté 2	(2 × 4)
3 carrés de côté 3	(5 - 2)

soit en tout 26 carrés.

Soit n la longueur du rectangle. Comptons :

les carrés de côté 1 :	il y en a 3n
les carrés de côté 2 :	il y en a 2(n – 1)
les carrés de côté 3 :	il y en a n – 2

soit en tout 3n + 2(n – 1) + n – 2, c'est-à-dire 3n + 2n – 2 + n – 2 ou encore 6n – 4.

On a alors : $6n - 4 = 2000$
$6n = 2004$
$n = 334$.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2001

Les corrigés COLLÈGE

Il était deux fois…

Pour écrire un nombre de 8 chiffres le plus grand possible avec les chiffres imposés, on doit le commencer ainsi :

4 •   • • •   • • •

Comme il doit y avoir quatre chiffres entre les deux chiffres 4, on a :

4 •   • • •   4 • •

Il n'y a plus de 4 à placer. Essayons de placer les 3 (en partant de la gauche pour que le nombre soit le plus grand possible). La disposition 4 3   • • •   4 • • est à rejeter, car il est alors impossible de placer le deuxième 3 (il faut qu'il y ait trois chiffres entre les deux 3).
Essayons alors :

4 •   3 • •   4 • •

On est amené à placer le deuxième 3 ainsi :

4 •   3 • •   4 3 •

Il n'y a plus de 3 à placer. Essayons de placer les 2 (toujours en partant de la gauche pour que le nombre soit le plus grand possible).
La disposition 4 2   3 • •   4 3 • impose de placer le deuxième 2 de la façon suivante : 4 2   3 • 2   4 3 •, mais on ne peut plus placer les deux 1 (ces derniers ne doivent encadrer qu'un seul chiffre).
La disposition 4 •   3 2 •   4 3 • ne permet pas de placer le deuxième 2 (il faut qu'il y ait deux chiffres entre les deux 2).
Essayons alors :

4 •   3 • 2   4 3 •

On est amené à placer le deuxième 2 ainsi :

4 •   3 • 2   4 3 2

Il reste deux emplacements pour les deux chiffres 1 et ces deux emplacements conviennent ; le nombre attendu est donc le suivant :

4 1   3 1 2   4 3 2

Remarquons qu'en fait, un seul autre nombre satisfait aux conditions de ce texte, c'est le nombre 23 421 314 qui, lui, est le plus petit possible.

Le prix du Soleil

Appelons a, e, i, o, u les valeurs en euros des voyelles correspondantes.

Le prix, en euros, de Vénus s'obtient ainsi : $e + u = 30$
celui de Mercure ainsi : $2e + u = 43$
Par différence, on trouve : $e = 13$
Comme $e + u = 30$ $u = 30 - 13 = 17$.

Le prix d'Uranus s'obtient ainsi : $2u + a = 54$
Donc $a = 54 - 2 \times 17 = 20$.

Le prix de Jupiter est le double de celui de Mars, donc :
$u + i + e = 2a$ d'où $17 + i + 13 = 40$ et $i = 10$.

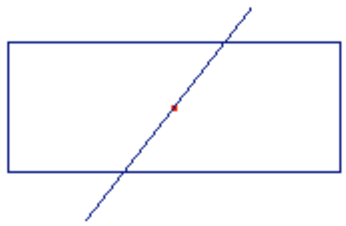
Pluton et la Terre ont le même prix, donc : $u + o = 2e$ d'où $17 + o = 26$ et $o = 9$

Le prix du Soleil se calcule ainsi : $o + e + i = 9 + 13 + 10 = 32$

Le prix du Soleil est 32 euros.

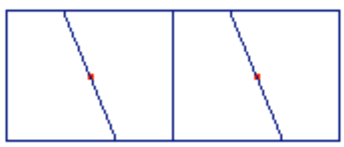
Coupez, assemblez

Théo peut utiliser le partage d'un rectangle en deux trapèzes de même aire à l'aide d'une droite passant par le centre de symétrie du rectangle (les deux trapèzes sont symétriques par rapport au centre du rectangle et ont donc la même aire) :

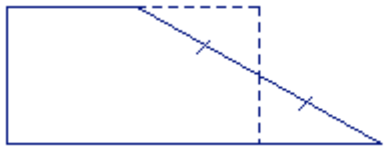


On peut donc découper le rectangle de départ en deux rectangles de même aire, grâce à un de ses axes de symétrie et ensuite découper les deux rectangles obtenus comme expliqué ci-dessus.

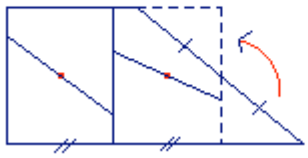
Théo peut obtenir :



Léa peut facilement découper un trapèze rectangle et assembler les morceaux pour obtenir un rectangle. Sur la figure ci-dessous, les deux triangles rectangles sont symétriques par rapport à leur sommet commun.



Léa peut ensuite appliquer le même procédé que Théo :



Bien entendu, il y a d'autres solutions ...

2001 Oh dis c'est…

Numérotons les nombres de la suite :

1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	...
a	b = 5	c	d	e	f	g = 8	h	...

En ajoutant les 2e, 3e et 4e nombres on obtient 20, d'où :

$$b + c + d = 20 \text{ donc } 5 + c + d = 20 \text{ et } c + d = 15$$

En ajoutant les 5e, 6e et 7e nombres, on obtient 20, d'où :

$$e + f + g = 20 \text{ donc } e + f + 8 = 20 \text{ et } e + f = 12$$

Mais : $(a + b + c) + (d + e + f) = 20 + 20 = 40$

donc $a + b + (c + d) + (e + f) = 40$

$a + 5 + 15 + 12 = 40$

$a = 8$

$a + b + c = 20$ donc $8 + 5 + c = 20$ et $c = 7$.

la suite commence donc ainsi : 8 5 7 ...

Le 4^e nombre est 8 (5 + 7 + 8 = 20), le 5^e nombre est 5 (7 + 8 + 5 = 20), le 6^e nombre est 7, ... etc.

Les nombres 8 5 7 se répètent dans cet ordre :

$\underline{8\ 5\ 7}\ \underline{8\ 5\ 7}\ \underline{8\ 5\ 7}\ \underline{8\ 5\ 7}$ ...

Donc, si son rang est un multiple de 3, le nombre de la suite est 7. Comme 2001 est un multiple de 3, le 2001^e nombre de la suite est 7.

N.B. : on peut éviter la plupart des calculs en remarquant :
$a + b + c = b + c + d$ donc $a = d$
De même $b = e$ et $d = g$. Il ne reste plus qu'à calculer c.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2002

Les corrigés COLLÈGE

Ce millénaire a déjà un an !

Pour obtenir 8 comme produit d'entiers :

• avec 2 nombres	1 et 8	leur somme est 9
	2 et 4	6
• avec 3 nombres	1 ; 1 et 8	leur somme est 10
	1 ; 2 et 4	7
• avec 4 nombres	1 ; 1 ; 1 et 8	leur somme est 11
	1 ; 1 ; 2 et 4	8
	1 ; 2 ; 2 et 2	7

On peut trouver les nombres écrits verticalement en b : ce sont 1 et 8 car ce sont les seuls dont le produit est 8 et la somme est 9 (8 + 1).
Les nombres écrits horizontalement en 2 sont 1 ; 1 ; 2 et 4 car ce sont les seuls dont le produit et la somme sont 8.
En regroupant ces deux informations, on peut commencer à remplir ainsi la grille :

	a	b	c	d
1		8		
2		1		
3				
4	2	0	0	2

Les nombres écrits verticalement en c sont 2 et 4 car leur produit est 8 et leur somme est 6.

1) Si on choisit :

	a	b	c	d
1		8	2	
2		1	4	
3				
4	2	0	0	2

On doit compléter la ligne 2 avec un 1 et un 2. Or, sur la colonne a, on doit placer les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 4 (leur somme est 8 et leur produit aussi) ; le 2 est déjà placé, donc en colonne a et ligne 2 on place un 1. Par conséquent, on complète la ligne 2 par un 2 en d'.

	a	b	c	d
1		8	2	
2	1	1	4	2
3				
4	2	0	0	2

Dans la colonne a, il reste à placer un 1 et un 4 : le 1 ne peut pas être en colonne a ligne 1 sinon il faudrait pour compléter la ligne 1 un 4 en colonne d ce qui est impossible, donc on a :

	a	b	c	d
1	4	8	2	1
2	1	1	4	2
3				
4	2	0	0	2

et enfin, on complète la colonne a avec un 1 et la colonne d avec un 2 :

	a	b	c	d
1	4	8	2	1
2	1	1	4	2
3	1			2
4	2	0	0	2

2) Si on choisit :

	a	b	c	d
1		8	4	
2		1	2	
3				
4	2	0	0	2

Sur la ligne 2, il manque un 1 et un 4 ; le 4 ne peut pas se trouver en colonne d, donc on a :

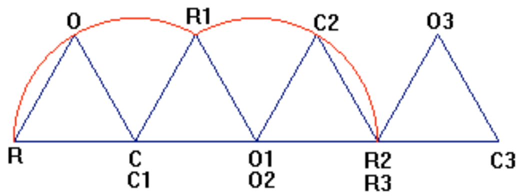
	a	b	c	d
1		8	4	
2	4	1	2	1
3				
4	2	0	0	2

On complète alors la colonne d avec les 2 qui manquent et la colonne a avec les 1 qui manquent :

	a	b	c	d
1	1	8	4	2
2	4	1	2	1
3	1			2
4	2	0	0	2

Une définition possible pour la ligne 4 :
leur somme est la moitié de 8 et ils sont deux à deux égaux.

Roc and roll…



Au bout de trois basculements, le point R se trouve en R3 sur la droite. Il a parcouru successivement les arcs RR1 et R1R2 qui sont chacun un tiers de cercle de rayon 4 cm.

La longueur du trajet parcouru en 3 basculements est : $\frac{2}{3}\times\pi\times 8$.

Pour arriver à un trajet de 2002 cm, il faut :

$2002 \div \left(\frac{2}{3}\times\pi\times 8\right)$ séries de 3 basculements.

$2002 \div \left(\frac{2}{3}\times\pi\times 8\right) \approx 119{,}48$

Après 119 séries de 3 basculements, soit 357 basculements la distance de 2002 cm est approchée, mais non atteinte et le point R se trouve sur la droite. Avec un basculement supplémentaire, le trajet du point R augmente de $\frac{1}{3}\times\pi\times 8$ et devient :

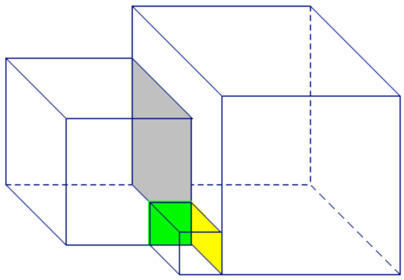
$$119\times\left(\frac{2}{3}\times\pi\times 8\right)+\frac{1}{3}\times\pi\times 8=\frac{1904\times\pi}{3}+\frac{8\times\pi}{3}=\frac{1912\times\pi}{3}$$

$\frac{1912\times\pi}{3}\approx 2002{,}24$

Il faut donc 358 basculements pour que la longueur du trajet parcouru par le point R dépasse 2002 cm.

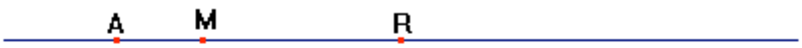
Faces cachées….

Si l'on considère qu'on colle une seule des deux surfaces en contact, l'aire de l' “encollage ” est $6^2 + 2^2 + 2^2$ c'est à dire 44 cm^2.
Si l'on considère au contraire qu'il faut encoller les deux surfaces en contact l'aire de l' “encollage ” est alors de 88 cm^2.



Rendez-vous au plus près !

Trois amies :



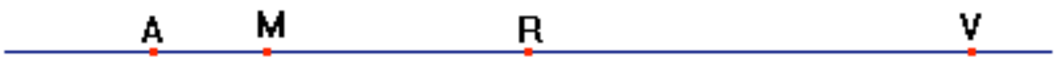
Il est évident qu'il ne faut pas choisir le point de rencontre I en dehors du segment [AR].
La somme des distances parcourues par les trois amies est :

$$d = AI + IM + IR$$

Si I appartient au segment [AR], on a : $AI + IR = AR$, donc

$$d = AR + IM$$

d est la plus petite possible lorsque IM est minimum, c'est-à-dire lorsque I = M.



Il est clair qu'il ne faut pas choisir le point de rencontre I en dehors du segment [AV].
La somme des distances parcourues par les quatre amies est :

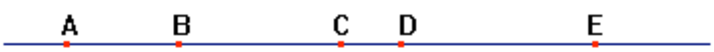
$$d = AI + MI + IR + IV$$

Si I appartient au segment [AV], on a : $AI + IV = AV$, donc

$$d = AV + MI + IR$$

d est la plus petite possible lorsque MI + IR est minimum, c'est à dire lorsque I appartient au segment [MR].

Pour cinq amies :

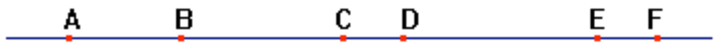


Le point de rencontre I doit être un point du segment [AE].

$$d = AI + BI + CI + ID + IE \qquad \text{et} \qquad AI + IE = AE$$

Il faut donc que BI + CI + ID soit la plus petite possible et on est ramené au cas de trois amies B, C, D donc I = C.
Ce raisonnement est valable pour tout nombre impair d'amies.

Pour six amies :



Le point de rencontre I doit être un point du segment [AF].

d = AI + BI + CI + ID + IE + IF et AI + IF = AF

Il faut donc que BI + CI + ID + IE soit la plus petite possible et on est ramené au cas de quatre amies B, C, D, E donc I appartient au segment [CD].
Ce raisonnement est valable pour tout nombre pair d'amies.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2003

Les corrigés COLLÈGE

Chaîne numérique

Voici les « voisins » possibles dans la chaîne de chacun des nombres de 1 à 15 :

nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
voisins possibles	3 8 15	7 14	1 6 13	5 12	4 11	3 10	2 9	1	7	6 15	5 14	4 13	3 12	2 11	1 10

On remarque que 8 et 9 ont un seul voisin donc ils doivent se trouver à chaque extrémité de la chaîne (qui ne sera donc pas fermée) :

8 ~1 ~ .... ~ 7 ~ 9

Après le 1, il semble qu'il y ait trois voisins possibles 3, 11 et 15 ; en revanche, avant le 7, on ne peut mettre que le 2 :

8 ~1 ~ .... 2 ~ 7 ~ 9

On continue de droite à gauche à partir du 2 où il n'y a qu'un choix possible chaque fois :

8 ~1 ~ .... ~ 3 ~ 13 ~ 12 ~ 4 ~ 5 ~ 11 ~ 14 ~ 2 ~ 7 ~ 9

A gauche du 3 on ne peut pas mettre le 1 qui est déjà placé donc on choisit 6 et on termine en ayant chaque fois un seul choix jusqu'au 1 :

8 ~1 ~15 ~ 10 ~ 6 ~ 3 ~ 13 ~ 12 ~ 4 ~ 5 ~ 11 ~ 14 ~ 2 ~ 7 ~ 9

Il existe une autre chaîne obtenue par retournement à partir de celle-ci, soit :

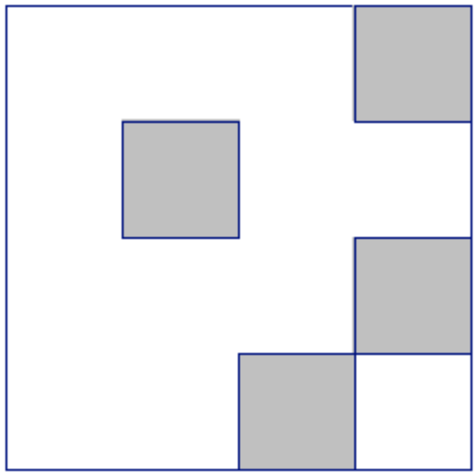
9 ~7 ~2 ~ 14 ~ 11 ~ 5 ~ 4 ~ 12 ~ 13 ~ 3 ~ 6 ~ 10 ~ 15 ~ 1 ~ 8.

Coloriez au quart de tour

Il faut découper au minimum 4 petits carrés (bien placés). Ainsi, en utilisant les 4 positions possibles du pochoir, on pourra colorier les 16 cases de la première grille.

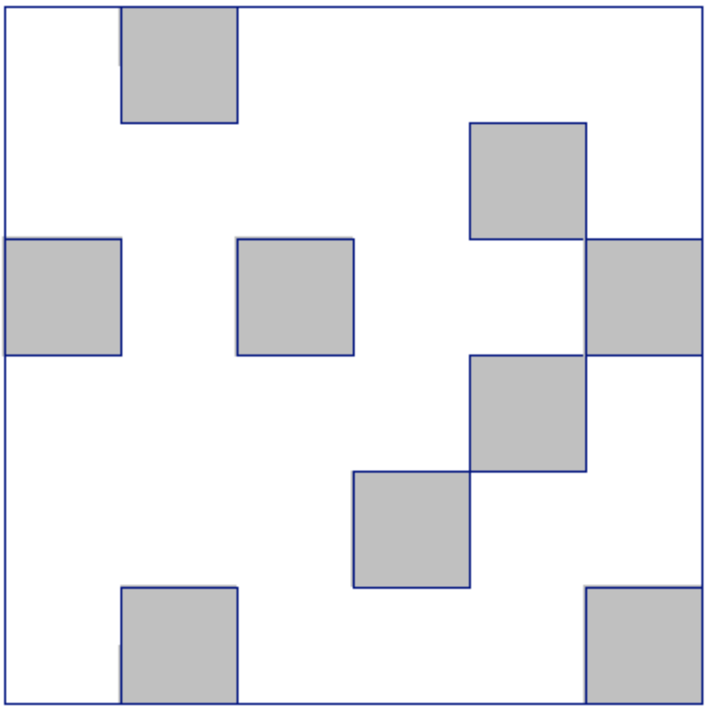
gris	vert	gris	rouge
vert	rouge	bleu	gris
bleu	gris	vert	rouge
vert	bleu	rouge	bleu

première grille



exemple de pochoir

Exemple de pochoir 6×6 :



Il faut découper le quart des petits carrés de la première grille donc il faut que $n \times n$ soit multiple de 4, c'est à dire que n soit pair.

Deux plis, un triangle

Le premier pli coïncide avec un axe de symétrie du rectangle : la médiatrice de [AB].
Comme le point E se trouve sur la médiatrice de [AB], il est équidistant de A et de B :

$$EA = EB$$

Le deuxième pli permet d'amener le point A sur le point E, le point B restant fixe.
Ce pli est confondu avec médiatrice de [AE] à laquelle le point B appartient. Donc le point B est équidistant de A et de E :

$$EB = AB$$

Comme on a EA = EB et EB = AB le triangle ABE a trois côtés de même longueur donc il est équilatéral.

C'est l'heure des anneaux

Parmi plusieurs méthodes de comptage en voici une :

Le 1er anneau a 3 carrés sur chaque côté : son nombre de carrés est $3^2 - 1$ (les neuf petits carrés moins le carré central).

Le 2ème anneau a 5 carrés sur chaque côté (deux de plus que le précédent, soit $3 + 2\times1$) : son nombre de carrés est $5^2 – 3^2$ (les vingt-cinq petits carrés moins les neuf petits carrés qui sont à l'intérieur du 2ème anneau).

Le 3ème anneau a 7 carrés sur chaque côté (deux de plus que le précédent, soit $3 + 2\times2$) : son nombre de carrés est $7^2 – 5^2$ (les quarante-neuf petits carrés moins les vingt-cinq petits carrés qui sont à l'intérieur du 3ème anneau).

Ainsi de suite ... on est amené à chercher combien il y a de carrés sur le côté d'un anneau ...

Le 2 003ème anneau a alors 4 007 carrés sur chaque côté ($3 + 2\times2002$) : son nombre de carrés est $4\,007^2 – 4\,005^2$, c'est-à-dire 16 024.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2004

Les corrigés COLLÈGE

Comptez les moutons mais ne vous endormez pas

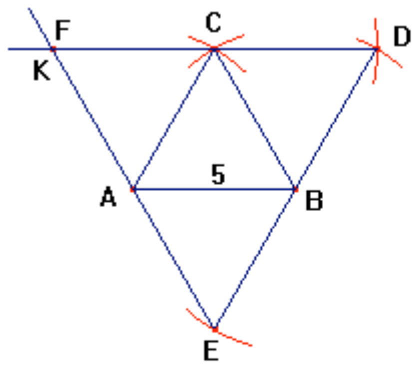
Le nombre total de moutons est 4a + 4b.
Par chaque fenêtre de la cabane, le berger voit 2a + b moutons et 2a + b = 501.

4a + 4b = (2a + b) + (2a + b) + 2b = 501 + 501 + 2b = 1 002 + 2b

b ne peut pas être égal à 0, sinon le berger verrait 2a moutons par chaque fenêtre, or 501 n'est pas pair. Par suite, le minimum pour b est égal à 1 et le nombre minimum de moutons est dans ce cas 1 004.

Le maximum pour b est atteint si a = 0. Dans ce cas, b est égal à 501 et le nombre maximum de moutons est alors 2 004.

Le bon plan



D’après le tableau : AB = AC = BC = 5
<u>ABC</u> est donc un triangle <u>équilatéral</u> de côté 5. (1)

D’après le tableau : BD = CD = BC = 5
<u>BCD</u> est donc un triangle <u>équilatéral</u> de côté 5 (les points A et D sont différents).(2)

D’après le tableau : DB = 5 , BE = 5 et DE =10 donc DE = DB + BE et DB = DE
c’est à dire B ∈ [DE] et DB = BE, donc B est le milieu de [DE].
BA = BE = 5 donc ABE est un triangle isocèle de sommet principal B. De plus, l’angle ABE mesure 60° (180° – mes $\widehat{DBC}$ – mes $\widehat{CBA}$). Par conséquent <u>ABE</u> est <u>équilatéral</u>.(3)

Les droites (DC) et (EA) se coupent en un point K. Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ du triangle KAC mesurent 60°, donc ce triangle est équilatéral et on en déduit KA = 5 et KC = 5. Comme C est un point du segment [KD], on a KD = 10. Donc ce point K est confondu avec A puisque, d’après le tableau, FA = 5 et FD = 10. Donc <u>FAC</u> est <u>équilatéral</u>. (4)

Le triangle <u>EDF</u>, ayant ses angles de 60°, est aussi <u>équilatéral</u>. (5)

Le nombre et son double

On veut que le nombre soit le plus grand possible.
Le chiffre de gauche ne peut pas être plus grand que 4 sinon le double du nombre aurait plus de 5 chiffres (il serait supérieur à 100 000). Donc essayons :

4 ❑ ❑ ❑ ❑

Le chiffre des milliers peut-il être un 9 ?
4 9 ❑ ❑ ❑ a pour double 9 ❑ ❑ ❑ ❑ et le 9 est utilisé deux fois, ce qui est interdit.
Essayons alors :

4 8 ❑ ❑ ❑

Le chiffre des centaines peut-il être un 9 ?
4 8 9 ❑ ❑ a pour double 9 7 ❑ ❑ ❑ et le 9 est encore utilisé deux fois. Essayons alors :

4 8 7 ❑ ❑

4 8 7 ❑ ❑ a pour double 9 7 ❑ ❑ ❑ et le 7 est utilisé deux fois. Essayons alors :

4 8 6 ❑ ❑

4 8 6 ❑ ❑ a pour double 9 7 ❑ ❑ ❑, ce qui convient.
Cherchons maintenant le chiffre des dizaines : ce ne peut pas être 9, 8, 7, 6, 4 déjà choisis pour le nombre ou pour son double. Essayons alors :

4 8 6 5 ❑

4 8 6 5 ❑ a pour double 9 7 3 0 ❑, ce qui convient. Il n'y a plus qu'un seul choix possible pour le chiffre des unités. Le plus grand nombre répondant à la question est alors **4 8 6 5 1** et son double est 9 7 3 0 2.

Autre solution :
Si a est le plus grand possible, 2a est lui-même le plus grand possible, donc 2a vaut au maximum 98765. Faisons un tableau donnant les essais successifs pour les chiffres du nombre 2a et les chiffres de a (en commençant par les premiers chiffres et en essayant toujours les plus grands possibles parmi ceux qui n'ont pas été encore utilisés) et les raisons d'un rejet éventuel.

2a	a	
9 • • • •	4 • • • •	Le premier chiffre de 2a doit être le plus grand possible
9 8 • • •	4 9 • • •	On rejette car 9 est utilisé 2 fois
9 7 • • •	4 8 • • •	Acceptable
9 7 6 • •	4 8 8 • •	Rejet : 8 est utilisé 2 fois
9 7 5 • •	4 8 7 • •	Rejet : 7 est utilisé 2 fois
9 7 4 • •	4 8 7 • •	Rejet : 7 est utilisé 2 fois
9 7 3 • •	4 8 6 • •	Acceptable
9 7 3 5 •	4 8 6 7 •	Rejet : 7 est utilisé 2 fois
9 7 3 2 •	4 8 6 6 •	Rejet : 6 est utilisé 2 fois
9 7 3 1 •	4 8 6 5 •	Acceptable
9 7 3 1 2	4 8 6 5 6	Rejet : 6 est utilisé 2 fois
9 7 3 1 0	4 8 6 5 5	Rejet : 5 est utilisé 2 fois
9 7 3 0 2	4 8 6 5 1	Accepté

Le nombre cherché est donc 4 8 6 51 et son double est 9 7 3 0 2.

Le dessous des cartes

En faisant les produits de trois nombres distincts pris parmi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, on trouve trois résultats qui sont des carrés d'entiers :

$2 \times 3 \times 6 = 36$; $2 \times 4 \times 8 = 64$; $3 \times 6 \times 8 = 144$.

Sébastien, qui ne voit pas sa carte, sait que le produit des trois nombres est un carré ; il voit les cartes de Marius et d'Agnès.

Sébastien voit les cartes de Marius et Agnès :	il en déduit que sa carte est :
2 et 3	6
2 et 4	8
2 et 6	3
2 et 8	4
3 et 6	soit le 2 soit le 8
3 et 8	6
4 et 8	2
6 et 8	3

Si les cartes tirées sont 2, 3, 6 ou 3, 6, 8, il y en a toujours un qui ne peut pas répondre : celui qui voit 3 et 6. Si les cartes tirées sont 2, 4 et 8, tous les trois peuvent répondre.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

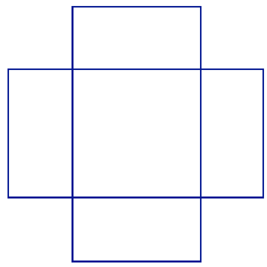
LIMOUSIN

2005

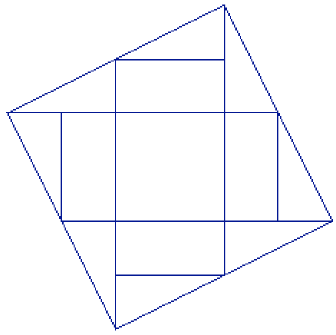
Les corrigés COLLÈGE

Cinq pour un

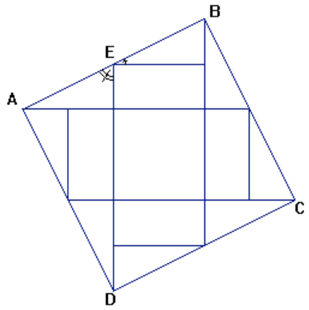
Plaçons le carré de côté 2 cm, puis les rectangles de longueur 2 cm ainsi :



Plaçons enfin les triangles rectangles pour obtenir :

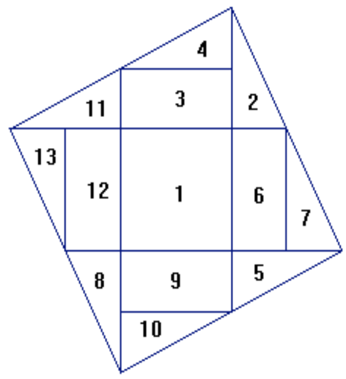


Les angles marqués ci-contre (de sommet E) sont complémentaires donc les points A, E, B sont alignés et AE = EB ; par conséquent, AB = BC = CD = DA et ABCD est un losange. De plus, les angles aigus de sommet A, par exemple, sont complémentaires donc ABCD est un carré.



Les nombres qui s'écrivent 1 plus un multiple de 3 sont : 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13.
Les nombres qui s'écrivent 2 plus un multiple de 3 sont : 2 ; 5 ; 8 ; 11.

Voici une disposition pour les nombres entiers de 1 à 13 respectant les consignes données :



Remarque : il serait peut-être plus naturel de colorier les pièces du puzzle de sorte que deux pièces ayant un côté commun soient de couleurs différentes mais nous avons choisi de placer des nombres dans ces pièces pour des contraintes de correction.

Plus ou moins

Cherchons toutes les bases possibles de ces triangles de signes + ou – ; la base peut contenir :

• quatre + et zéro –	+ + + +	
• trois + et un –	+ + + – (ou – + + +)	+ + – + (ou + – + +)
• deux + et deux –	+ + – – (ou – – + +)	+ – + – (ou – + – +)
	+ – – +	– + + –
• un + et trois –	+ – – – (ou – – – +)	– + – – (ou – – + –)
• zéro + et quatre –	– – – –	

Les possibilités écrites entre parenthèses peuvent être laissées de côté : une base écrite entre parenthèses et celle qui la précède immédiatement conduisent à deux triangles symétriques par rapport à un axe vertical , donc ces deux triangles possèdent le même nombre de signes –.
Par exemple :

```
      −              −
    +   −          −   +
  +   +   −      −   +   +
+   +   +   −  −   +   +   +
```

Les possibilités à retenir sont alors les suivantes avec, sous chaque triangle, le nombre de signes – qu'il contient :

```
      +              −              −              +              +
    +   +          +   −          −   +          −   −          +   +
  +   +   +      +   +   −      +   −   −      +   −   +      −   −   −
+   +   +   +  +   +   +   −  +   +   −   +  +   +   −   −  +   −   +   −

      0              4              5              5              5


      +              +              −              −              +
    −   −          −   −          −   +          +   −          +   +
  −   +   −      −   +   −      −   +   +      −   −   +      +   +   +
+   −   −   +  −   +   +   −  +   −   −   −  −   +   −   −  −   −   −   −

      6              6              6              7              4
```

- Il y a autant de signes + que de signes – dans un triangle lorsqu'il y a cinq signes – (et par conséquent cinq signes +), les bases qui conviennent sont :
  + + – + (ou + – + +) + + – – (ou – – + +)
  + – + – . (ou – + – +)
- Il y a le maximum de signes – (c'est-à-dire 7) lorsque la base du triangle est :
  – + – – (ou – – + –)
  On sait que c'est le maximum parce que 7 est la plus grande valeur trouvée lorsqu'on envisage tous les cas possibles.

Lignes magiques

Deux exemples pour que la somme des nombres situés sur une même ligne soit égale à 20 :

```
     7     6                   1     4
      \   /                     \   /
        8                         8
      /   \                     /   \
4 — 5   — 2   — 9         6 — 5   — 2   — 7
   /         \               /         \
  1           3             3           9
```

La somme des nombres de 1 à 9 est 45. Soit C la somme des nombres situés au centre et L la somme des nombres de chaque ligne ; on a : 3 L = 45 + C.
On peut alors remarquer que C est divisible par 3.
L est la plus petite possible quand C est le plus petit possible, c'est à dire C = 1 + 2 + 3 ; on a alors 3 L = 51 d'où L = 17.
Cherchons une disposition pour cette valeur.

```
      a     b
       \   /
         1
       /   \
c  — 2   — 3   — d
   /           \
  e             f
```

Remarquons qu'on peut échanger a et f, b et e, c et d , on ne restreint pas le problème en prenant a < f, b < e et c < d.
a + 1 + 3 + f = c + 2 + 3 + d = e + 2 + 1 + b = 17
a + f = 13 ; c + d = 12 ; e + b = 14
Avec deux nombres de la liste 4, 5, 6, 7, 8, 9, formons les sommes égales à 12 ou 13 ou 14 :
c + d = 4 + 8 ou c + d = 5 + 7
a + f = 4 + 9 ou a + f = 5 + 8 ou a + f = 6 + 7
b + e = 5 + 9 ou b + e = 6 + 8

Avec c = 4 et d = 8, on a nécessairement a = 6, f = 7, e = 9 et b = 5 car les nombres doivent être tous distincts.
Avec c = 5 et d = 7, on a nécessairement a = 4, f = 9, b = 6 et e = 8. On obtient les deux solutions suivantes :

```
      6     5                    4     6
       \   /                      \   /
         1                          1
       /   \                      /   \
4  — 2   — 3   — 8         5  — 2   — 3   — 7
   /           \              /           \
  9             7            8             9
```

L est la plus grande possible quand C est le plus grand possible, c'est-à-dire C = 7 + 8 + 9 ; on a alors 3 L = 69 d'où L = 23. Cherchons une disposition pour cette valeur.

```
      a     b
       \   /
         7
       /   \
c  — 8   — 9   — d
   /           \
  e             f
```

Comme précédemment, on prendra a < f, b < e et c < d.

a + 7 + 9 + f = c + 8 + 9 + d = e + 8 + 7 + b = 23 ;
a + f = 7 ; c + d = 6 ; b + e = 8
Avec deux nombres distincts de la liste 1, 2, 3, 4, 5, 6, formons les sommes égales à 6 ou 7 ou 8 :
c + d =1 + 5 ou c + d = 2 + 4
a + f = 1 + 6 ou a + f = 2 + 5 ou a + f = 3 + 4
b + e = 2 + 6 ou b + e = 3 + 5
Avec deux nombres distincts de la liste 1, 2, 3, 4, 5, 6, formons les sommes égales à 6 ou 7 ou 8 :
c + d =1 + 5 ou c + d = 2 + 4
a + f = 1 + 6 ou a + f = 2 + 5 ou a + f = 3 + 4
b + e = 2 + 6 ou b + e = 3 + 5

Avec c = 1 et d = 5, on a nécessairement a = 3, f = 4, b = 2 et e = 6.
Avec c = 2 et d = 4, on a nécessairement a = 1, f = 6, b = 3 et e = 5. On obtient les deux solutions suivantes :

```
      3     2                  1     3
       \   /                    \   /
         7                        7
       /   \                    /   \
 1 — 8   — 9   — 5        2 — 8   — 9   — 4
    /         \              /         \
   6           4            5           6
```

Remarque : Pour toute configuration donnant des lignes magiques, si on remplace chaque nombre x par 10 – x, on obtient une autre solution. Une solution avec L minimum donne une solution avec L maximum.

Entiers symétriques

La plus petite somme respectant la définition est : 1 + 2 + 1 = 4.
Si une suite contient plus de trois termes, elle commence par (1, 2) et finit par (2, 1), on doit nécessairement intercaler au moins un terme entre les deux 2, on obtient la suite (1, 2, 1, 2, 1) de somme 7 et la suite (1, 2, 3, 2, 1) de somme 9.
La suite (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1) a pour somme 10.
Les entiers symétriques inférieurs ou égaux à 10 sont : 4, 7, 9, 10.

Si un entier n est symétrique, il est la somme des termes d'une suite (1, 2 …., 2, 1) ; en plaçant (1, 2) devant cette suite et (2, 1) derrière elle, la somme est un nouvel entier symétrique égal à n + 6.
Plus généralement, si n est symétrique, n + 6 k est symétrique ; voyons si 2005 peut s'écrire n + 6 k avec n symétrique.
Or 2005 = 1 + 6 × 334, mais 1 n'entre pas dans la définition d'un entier symétrique ; on a aussi 2005 = 7 + 6 × 333 et 7 est symétrique donc 2005 est symétrique.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

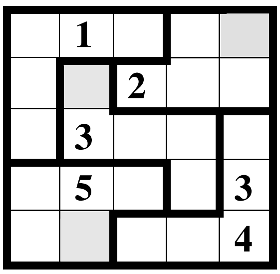
DU

LIMOUSIN

2006

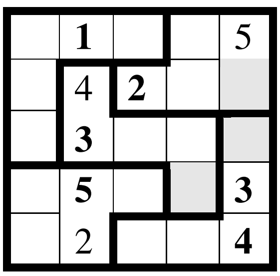
Les corrigés COLLÈGE

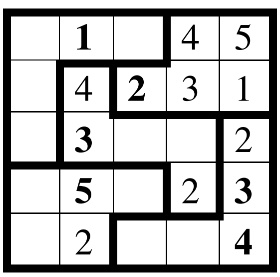
Cinq par cinq



On peut procéder ainsi :

Dans la première ligne, la cinquième case ne peut contenir ni un 1 (1 est déjà dans cette ligne), ni un 2 (2 est déjà dans cette région) ni un 3 ni un 4 (3 et 4 sont déjà dans cette colonne), elle contient donc un 5.
Dans la deuxième colonne il manque les chiffres 2 et 4, un 2 figure déjà en deuxième ligne, le 2 est donc en cinquième ligne et le 4 en deuxième ligne.





Dans la deuxième ligne, la cinquième case n'est ni 2 ni 5 déjà placés dans la région, ni 3 ni 4 déjà placés dans la colonne ; c'est donc un 1.
On peut alors terminer la dernière colonne en plaçant un 2 et puis compléter la région centrale en plaçant un 2 dans la seule place possible.
On complète aussi la région Nord-Est avec 3 et 4.

2	**1**	3	4	5
5	4	**2**	3	1
4	**3**			2
	5		2	**3**
	2			**4**

On sait alors compléter la première ligne puis la région Nord-Ouest.

2	**1**	3	4	5
5	4	**2**	3	1
4	**3**			2
1	**5**	4	2	**3**
3	2			**4**

On complète la première colonne avec 1 et 3 puis la quatrième ligne.

Les quatre cases restantes contiennent toutes 1 ou 5 qu'on peut disposer de deux façons.

Voici les deux solutions du problème :

2	**1**	3	4	5
5	4	**2**	3	1
4	**3**	1	5	2
1	**5**	4	2	**3**
3	2	5	1	**4**

2	**1**	3	4	5
5	4	**2**	3	1
4	**3**	5	1	2
1	**5**	4	2	**3**
3	2	1	5	**4**

Plus vrai que vrai

		S	I	X
+	D	E	U	X
=	H	U	I	T

Si X + X dépassait 10, il y aurait une retenue dans la colonne des dizaines et on aurait :
I + 1 + U = I qui est impossible.
Donc X + X est inférieur à 10 et on a I + U = I donc U = 0 et X = 1, 2, 3 ou 4.

On en déduit S + E = 10 (10 = 3 + 7 ou 10 = 4 + 6) et D et H sont deux nombres consécutifs (retenue de l'addition S + E).
On peut alors compléter le tableau en n'oubliant pas que les chiffres sont tous distincts et compris entre 0 et 7.

X	T	S et E	D	H	I
1	2	3 et 7	4	5	6
			5	6	4
		4 et 6	Pas de solution pour 2 nombres consécutifs différents des précédents		
2	4	3 et 7	5	6	1

Le problème admet six solutions :

		3	6	1
+	4	7	0	1
=	5	0	6	2

		3	4	1
+	5	7	0	1
=	6	0	4	2

		3	1	2
+	5	7	0	2
=	6	0	1	4

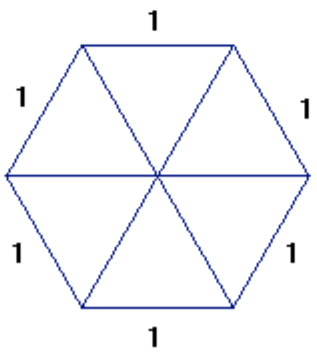
		7	6	1
+	4	3	0	1
=	5	0	6	2

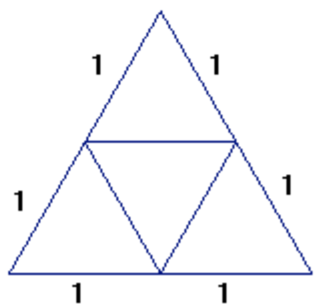
		7	4	1
+	5	3	0	1
=	6	0	4	2

		7	1	2
+	5	3	0	2
=	6	0	1	4

Tout en triangles

Si on prend le côté de l'hexagone comme unité, son périmètre est égal à 6, le côté du triangle équilatéral de même périmètre est 2.

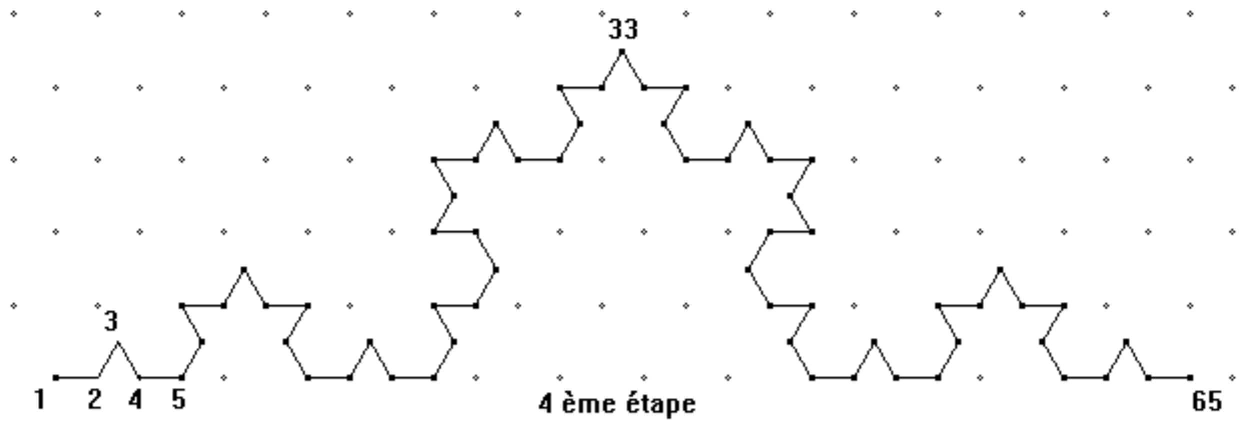




On peut partager l'hexagone de côté 1 en 6 triangles équilatéraux de côté 1, et le triangle de côté 1 en 4 triangles équilatéraux de côté 1. L' aire du triangle de côté 2 est donc inférieure à celle de l'hexagone de côté 1 et on ne peut pas reconstituer l'hexagone avec un seul triangle de côté 2.
Avec 3 triangles de côté 2, on obtient 12 triangles de côté 1 qui peuvent reconstituer 2 hexagones de côté 1.

Un chemin épineux : fractal !

Voici dessinée la quatrième étape :



En passant d'une étape à la suivante, on remplace un segment par 4 segments donc le nombre total de segments se trouve multiplié par 4.
A chaque étape, le nombre de sommets (extrémités des segments) est égal à :

nombre de segments + 1

Le sommet central est numéroté par :

(nombre de sommets + 1) / 2

Etape	Nombre de segments	Nombre de sommets	Nombre au sommet central
1	1	2	
2	4	5	(5 + 1) / 2 = 3
3	$16 = 4^{2}$	17	(17 + 1) / 2 = 9
4	$64 = 4^{3}$	65	33
5	$4^{4} = 256$	$4^{4} + 1 = 257$	258 / 2 = 129
6	$4^{5} = 1024$	$4^{5} + 1 = 1025$	1026 / 2 = 513
7	$4^{7} = 4096$	$4^{6} + 1 = 4097$	4098 / 2 = 2049
…			

2006 apparaît à la 7ème étape.
Le sommet central de cette étape est alors 2049.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

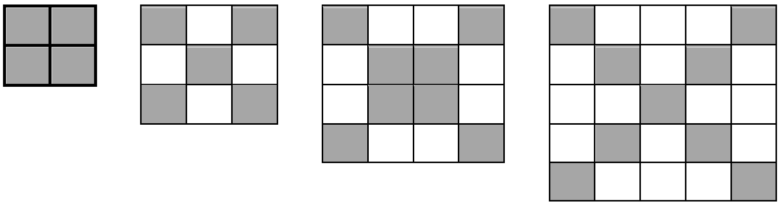
DU

LIMOUSIN

2007

Les corrigés COLLÈGE

Carrés sur diagonales



Pour n pair, p = 2n.
Pour n impair, p = 2n -1 car un carré est commun aux deux diagonales.

Pour n = 2k, p = 4k ; pour n = 2k +1, p = 4k + 1
Or 2007 n'est pas de cette forme.

Placez bien vos billes

Le nombre 12 peut se décomposer en somme de quatre entiers distincts de deux manières seulement : 12 = 6 + 3 + 2 + 1 et 12 = 5 + 4 + 2 + 1.
On remarque que dans ces décompositions, 3 et 6 sont associés, de même que 4 et 5.

La première ligne qui contient 6 est donc 6, 1, 3, 2 ou 6, 1, 2, 3 mais la troisième colonne qui contient 4 ne peut pas contenir 3 ; la première ligne est donc 6, 1, 2, 3.

6	1	2	3
		4	

La deuxième ligne contient les nombres 1, 2, 4, 5 ; 5 n'est ni dans la colonne de 3 ni dans celle de 6, donc 5 est dans la colonne de 1.

6	1	2	3
	5	4	

La deuxième colonne contient les nombres 1, 5, 2, 4 et 4 n'est pas sur une diagonale qui contient déjà un 4 ; 4 est donc en dernière ligne.

6	1	2	3
	5	4	
	2		
	4		

On complète la troisième colonne 2, 4, 1, 5 car 5 n'est pas sur une diagonale qui contient déjà un 5.

6	1	2	3
	5	4	
	2	1	
	4	5	

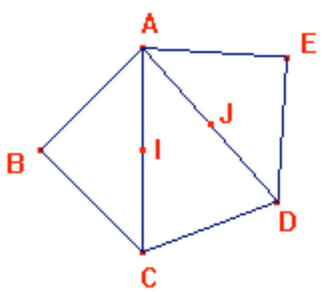
On peut alors compléter la première colonne : 3 n'est pas sur les lignes qui contiennent déjà 4 et 5 et 2 n'est pas sur une diagonale qui contient déjà un 2.

6	1	2	3
2	5	4	
3	2	1	
1	4	5	

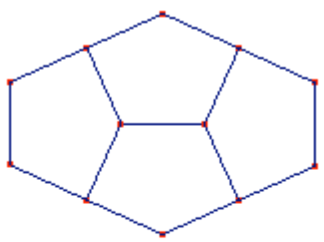
On complète facilement la quatrième colonne.

6	1	2	3
2	5	4	1
3	2	1	6
1	4	5	2

Quatre pentagones pour un hexagone



Le pentagone est constitué de deux triangles rectangles et isocèles : ABC rectangle en B et AED rectangle en D.
On part d'un segment [AC] ; on contruit sa médiatrice et on obtient son milieu I.
B est l'intersection du cercle de centre I et de rayon IA et de la médiatrice de [AC].
D est l'intersection du cercle de centre C de rayon CB et du cercle de centre A de rayon AC.
E est l'intersection du cercle de centre A de rayon AB et du cercle de centre D de même rayon.



Le dessin indique comment s'assemblent les angles droits comme en A.
En B on retrouve la somme des trois angles non droits de chaque pentagone ; la somme des cinq angles d'un pentagone vaut 180° × 3 car le pentagone peut être découpé en 3 triangles. La somme des trois angles non droits est donc 180° × 2 soit 360°.
L'assemblage dessiné est donc sans trou et sans chevauchement.

Je vous ai apporté des bonbons

Jacques a 4 répartitions possibles :	Germaine a 6 repartitions possibles :
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 2, 2, 2, 2, 2 5, 5 10 Il y en a autant que de diviseurs de 10.	1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 2 2 1 1 1 1 2 2 2 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4

Jacques et Germaine ont au total 10 répartitions possibles.

Germaine et Jacques peuvent avoir le même nombre de répartitions si le nombre de diviseurs de n est n/2.
Exemple : 8 possède 4 diviseurs : 1, 2, 4, 8.

Répartitions de Jacques pour n = 8	Répartitions de Germaine pour n = 8
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 2, 2, 2, 2 4, 4 8	1, 1, 1, 1, 1, 1, 2 1, 1, 1, 1, 2, 2 1, 1, 2, 2, 2 2, 3, 3

Exemple : 12 possède 6 diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Répartitions de Jacques pour n = 12	Répartitions de Germaine pour n = 12
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2 3, 3, 3, 3 4, 4, 4 6, 6 12	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2 1, 1, 1, 1 2, 2, 2 1, 1, 2, 2, 2, 2 2, 2, 2, 3, 3

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

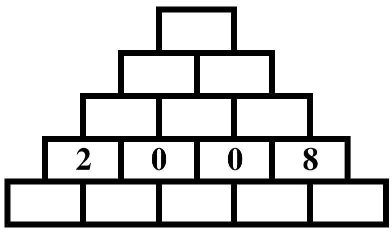
DU

LIMOUSIN

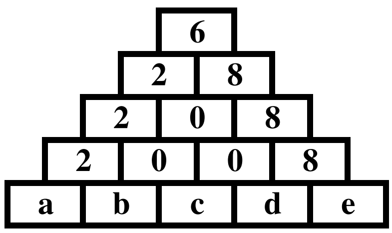
2008

Les corrigés COLLÈGE

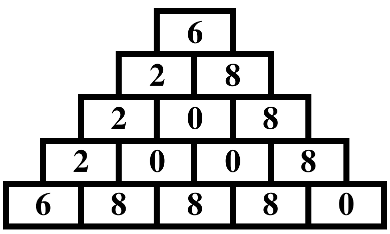
Chamboule tout



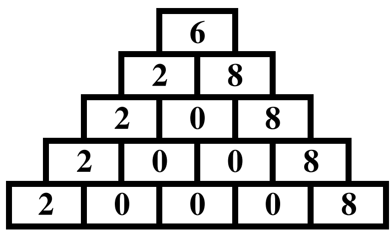
On complète facilement dans cet ordre les lignes 3, 2, 1.
Appelons a, b, c, d, e les nombres de la dernière ligne. La présence des 0 donne b = c = d.



Pour obtenir une différence égale à 8, on a quatre possibilités pour d et e :
d = 8 et e = 0 ; d = 0 et e = 8 ; d = 9 et e = 1 ; d = 1 et e = 9.
Dans chacun des cas, on connaît alors b et c ; on complète en donnant la valeur de a.



Score : 66



Score : 46

6
2 8
2 0 8
2 0 0 8
7 9 9 9 1

Score : 71

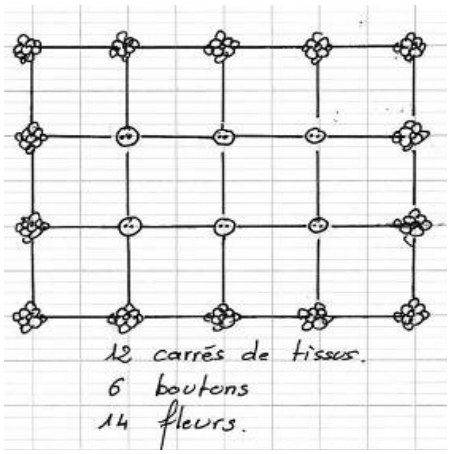
6
2 8
2 0 8
2 0 0 8
3 1 1 1 9

Score : 51

On peut obtenir un score supérieur, dans l'exemple qui suit le score est 90 :

9
0 9
9 9 0
9 0 9 9
0 9 9 0 9

Mon beau tapis



Si les dimensions du tapis sont a et b avec a ≥ b, le nombre de carrés de tissu est a × b, le nombre de fleurs est 2a + 2b, le nombre de boutons est (a -1) × (b -1).

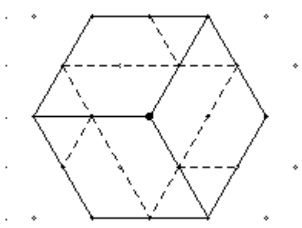
On utilise 24 carrés de tissu et 15 boutons : ab = 24 et (a -1)(b - 1) =15
On écrit les décompositions de 24 en produits : 24 × 1, 12 × 2, 8 × 3, 6 × 4.
Parmi les solutions, on cherche celles qui vérifient la deuxième égalité ; on obtient a = 6 et b = 4 ce qui fait 20 fleurs.
On utilise 2008 carrés de tissu et autant de boutons que l'on veut ; on veut utiliser le plus petit nombre possible de fleurs de feutrine : a × b = 2008.
On écrit les décompositions de 2008 en produits :

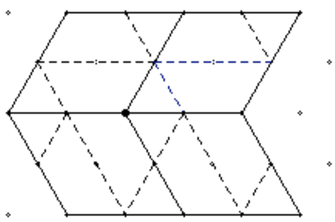
a	b	Fleurs : 2a + 2b	Boutons : (a -1)(b -1)	
2008	1	4018	0	
1004	2	2012	1003	
502	4	1012	1503	
251	8	518	1750	

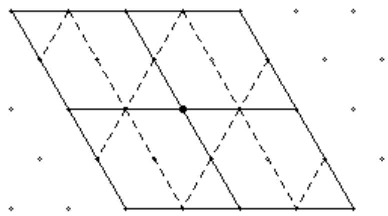
Le plus petit nombre possible de fleurs de feutrine est 518.

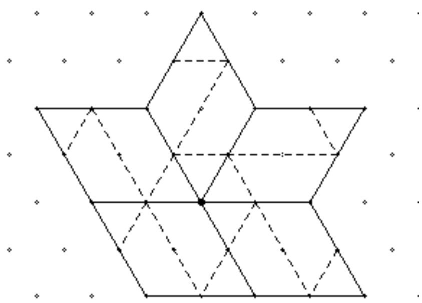
Calissons Z

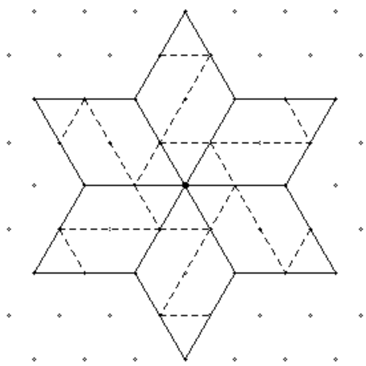
Un point étant choisi, disposons les calissons dont un sommet coïncide avec ce point de manière à cacher les six points les plus proches.
Les angles des sommets des calissons placés en ce point ont pour somme 360°. Ces angles ont pour valeur 60 ° ou 120° .
360 peut se décomposer de plusieurs manières conduisant à 5 possibilités faisant apparaître 5 polygones différents :


120+120+120


120+120+60+60


60+120+60+120


60+60+60+60+120


60+60+60+60+60+60

En prenant comme unité de surface celle d'un petit triangle équilatéral, les surfaces ont pour mesures respectives : 9, 8, 8, 7, 6.
En prenant comme unité de longueur la plus courte distance entre deux points de la grille, les périmètres ont pour mesures respectives : 9, 8, 8, 7, 6.
Parmi les polygones, celui qui a la plus grande aire est le triangle équilatéral et celui qui a le plus petit périmètre est l'hexagone.

Dominos

Chaîne commençant par (4,2).
(4,2). (6,1). (0,1). (1,2). (3,5). Le domino suivant (1,6) est déjà posé.

Une chaîne contient le domino (1,3) et ce domino n'est pas le premier :
Si (a,b) précède (1,3) alors b+1 = 3 (b+1 = 10 n'est pas possible) donc b = 2
et a + b = 8 (a + b = 1 n'est pas possible) donc a = 6.
Le domino (6,2) précède (1,3) et le suivant est (4,0).

Chaînes les plus longues possibles contenant le domino formé des chiffres 3 et 5 :

(0,1) (1,2) (**3,5**) (1,6) (0,6) (6,5) (4,2)
(0,6) (6,5) (4,2) (6,1) (0,1) (1,2) (**3,5**)
(0,2) (2,4) (6,3) (2,5) (0,5) (**5,3**) (1,4)
(0,5) (**5,3**) (1,4) (5,2) (0,2) (2,4) (6,3)

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2009

Les corrigés COLLÈGE

Croisons les nombres

Remarques préliminaires :
Carrés d'entiers : 1, 4, 9, 16
Nombres pairs : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16
Multiples de trois : 3, 6, 9, 12, 15

Seul le 9 est à la fois multiple de 3 et carré d'entier il est donc dans la case IC .
4 et 16 sont dans la colonne C et 4 n'est pas voisin de 3, d'où leur place. (fig 2)

6, 12 et 15 sont dans la ligne I , la case I D doit contenir un nombre pair non voisin de 7, c'est 12 ; la case I B doit contenir un nombre pair, c'est 6, on achève la ligne en plaçant 15. (fig 3)

Il reste à placer 8, 10, 14 ; dans la ligne III, le dernier nombre est la somme des trois premiers, la seule solution est 5 + 8 + 1 = 14 , on place ainsi 8 et 14 et enfin 10. (fig4)

	A	B	C	D
I				
II		13		7
III	5		1	
IV	2	11		3

fig 1

	A	B	C	D
I			9	
II		13	4	7
III	5		1	
IV	2	11	16	3

fig 2

	A	B	C	D
I	15	6	9	12
II		13	4	7
III	5		1	
IV	2	11	16	3

fig 3

	A	B	C	D
I	15	6	9	12
II	10	13	4	7
III	5	8	1	14
IV	2	11	16	3

fig 4

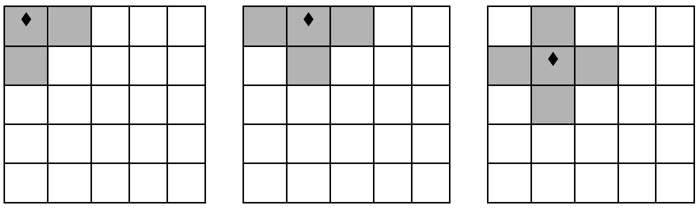
ARA mon perroquet

Exemples de mots pouvant être construits à partir de ARARA : AAA, RARAA, RARRARA …

A partir de RAARA on peut former : RRARARA et à partir de RRARARA on peut former RRAAA.

Quand on remplace A par RAR ou RAR par A, le nombre de A n'est pas modifié or RARAR contient deux A et RAARA contient trois A, donc RARAR ne peut pas être formé à partir de RAARA.

Surveillance rapprochée



Remarquons d'abord que lorsqu'on place un gardien, selon que la salle est dans coin, sur un bord ou ailleurs, il surveille 3 ou 4 ou 5 salles : la sienne plus ses voisines (salles grisées)

Pour un quadrillage 3 x 3, on a 9 salles, un gardien ne suffit pas, avec deux gardiens, il faudrait en placer un dans la case centrale et l'autre sur un bord, le dessin montre qu'il reste des cases non surveillées (fig 1).

Avec trois gardiens la surveillance est possible (figures 2, 3, 4).

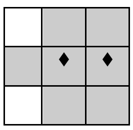


Fig 1

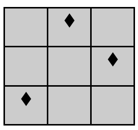


Fig 2

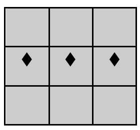


Fig 3

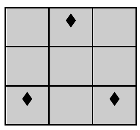
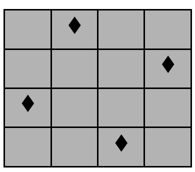


Fig 4

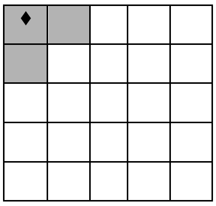
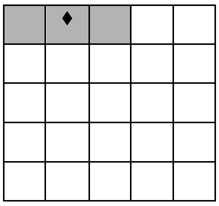
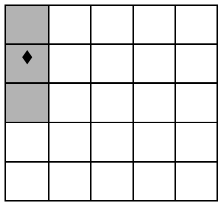
Pour un quadrillage 4 x 4 on a 16 salles à surveiller or avec 1, 2, 3, gardiens, on surveille au maximum 5, 10, 15 salles.

Avec 4 gardiens la surveillance est possible :



Quadrillage 5 x 5

Remarquons qu'une salle située dans un coin ne peut être surveillée que par un gardien situé dans cette salle ou dans une salle voisine qui est donc sur un bord.

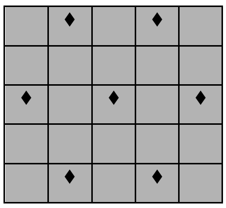




Pour surveiller les salles de coin il faut 4 gardiens qui surveillent au maximum 16 salles ; avec un cinquième gardien, on surveille au maximum 21 salles ; **cinq gardiens ne suffisent pas**.

Six gardiens suffisent-ils ?

(La démonstration qui suit n'est pas accessible à un élève de 4$^{\text{ème}}$, on n'attendait pas d'eux une telle démonstration).
Supposons que 6 gardiens surveillent toutes les salles.
Si chaque colonne du plan contient au moins un gardien, comme il y a 5 colonnes, 4 des colonnes contiennent un gardien et une colonne en contient 2.
Sinon, l'une des colonnes n'a pas de gardien, alors chaque salle de cette colonne est surveillée par un gardien d'une salle située à sa droite ou à sa gauche et dans ce cas chaque ligne horizontale du plan contient au moins un gardien.
On supposera pour la suite que chaque colonne contient au moins un gardien, (sinon remplacer colonne par ligne).
L'une des colonnes contient donc 2 gardiens, à une symétrie près on peut supposer que c'est la colonne 3 ou 4 ou 5, dans chacun de ces cas les colonnes 1 et 2 contiennent chacune 1 seul gardien.
Le gardien de la colonne 1 surveille au plus 3 salles de cette colonne et le gardien de la colonne 2 surveille 1 salle de la colonne 1 ; au total au plus 4 salles de la colonne 1 sont surveillées, il reste au moins une salle non surveillée, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
6 gardiens ne suffisent pas.

On peut trouver une solution avec sept gardiens :



Une case en trop

En pavant une grille 4 x 4 qui comporte 16 cases avec des rectangles 1 x 3, on peut recouvrir 15 cases, il reste une case non recouverte, comme dans l'exemple fig 1 où elle est grisée.

Le petit carré non pavé peut être l'un des coins comme dans la figure 1, à une rotation près.

Essayons avec un autre carré de bord , carré grisé sur le dessin (fig 2) ; le dessin indique dans quel ordre on a placé les rectangles 1 x 3 qui s'imposent et on voit qu'on ne peut pas finir.

Essayons avec un carré central grisé sur le dessin (fig 3) ; à une symétrie près on doit placer un rectangle comme celui qui est noté 1 ; 2 et 3 s'imposent alors, puis 4 et on ne peut pas finir.

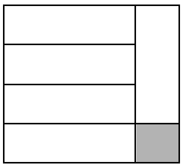


fig 1

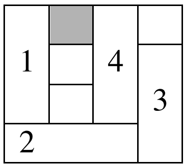


fig 2

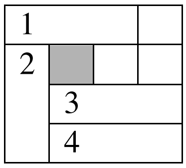
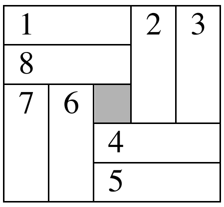


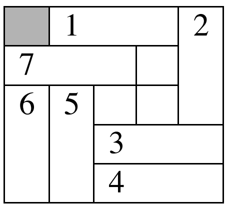
fig 3

Le petit carré non pavé est toujours dans l'un des coins.

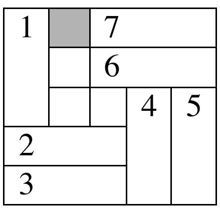
Carré 5 x 5 : on peut recouvrir 24 cases comme montré ci-dessous où le carré central n'est pas recouvert.

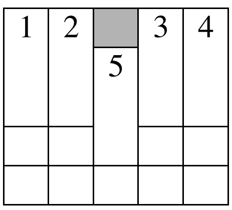


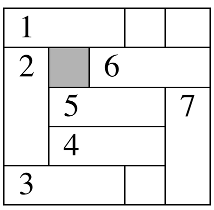
Essai avec un coin non recouvert :

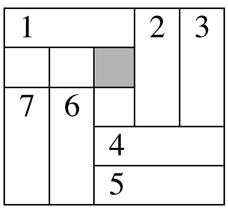


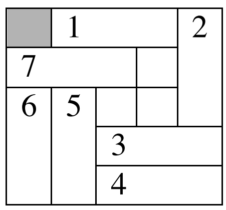
Dans les dessins qui suivent on a examiné, à symétrie ou rotation près, toutes les positions possibles du carré non recouvert ; à une symétrie près on doit placer un rectangle comme celui qui est noté 1 ; 2 et 3 s'imposent alors, puis 4, 5, .. et on ne peut pas finir.











Le petit carré non pavé est toujours le carré central.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

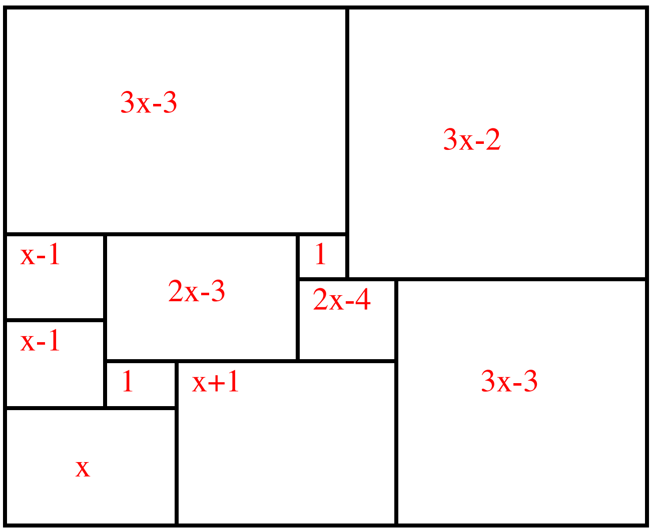
2010

Les corrigés COLLÈGE

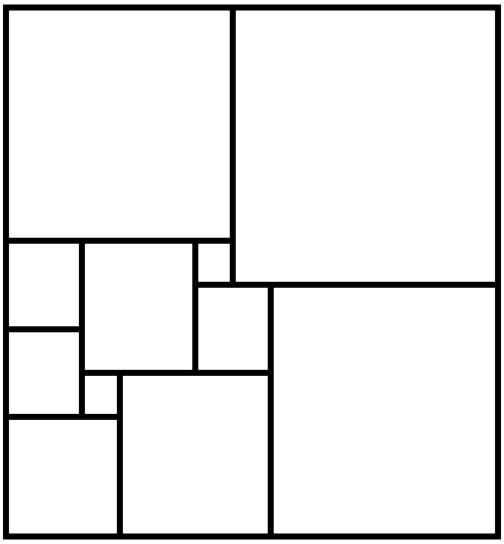
La plus jeune

Si la première affirmation est vraie, la deuxième et la troisième sont fausses puisque une seule est vraie : Anaïs est la plus âgée, Barbara est la plus âgée, on a une contradiction.
Si la deuxième affirmation est vraie, la première et la troisième sont fausses : Anaïs n'est pas la plus âgée, Barbara n'est pas la plus âgée, Chloé est la plus jeune ; aucune n'est la plus âgée on a encore une contradiction.
La troisième affirmation est donc vraie et les deux premières sont fausses donc :
Anaïs n'est pas la plus âgée, Barbara est la plus âgée et Chloé n'est pas la plus jeune.
Par ordre décroissant d'âges : Barbara, Chloé, Anaïs.
La plus jeune est Anaïs.

Des carrés pour un carré



Appelons x le côté de l'un des carrés (cf dessin) on peut alors calculer le côté des autres carrés.
On obtient successivement, par additions de côtés horizontaux ou verticaux, les valeurs x – 1, x – 1, x+1, 2x – 3, 2x-4, 3x – 3, , 3x - 3, 3x-2.
Les quatre côtés ont pour mesure 6x-5, 6x-5, 6x-5, 5x-2.
La figure initiale étant un carré, ces quatre mesures sont égales donc 6x – 5 = 5x-2 d'où x = 3 et le côté du grand carré est 13. Ci-dessous figure en vraie grandeur :



Rapprochez-vous

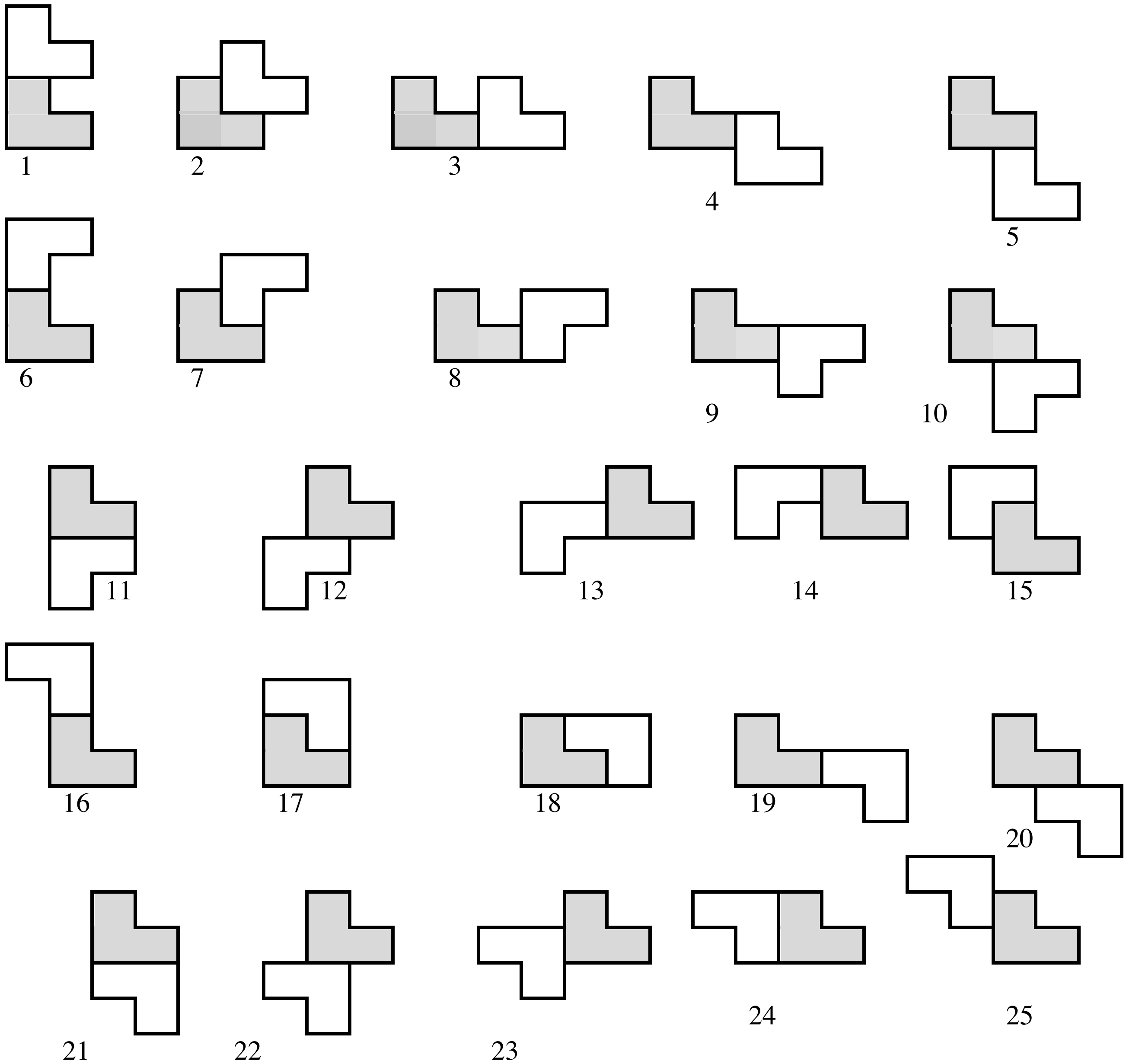
On examine le chiffre des centaines de X qui peut être 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 ; Y devant être le plus proche possible de X on prendra pour chiffre des centaines de Y celui de X diminué de 1, on complète X par un nombre de 3 chiffres le plus petit possible et Y par un nombre de 3 chiffres le plus grand possible.

X	Y	X - Y		
8123	7654	469		
7123	6854	269		
6123	5874	249		
5123	4876	247		
4125	3876	249		
3145	2876	269		
2345	1876	469		

La différence la plus petite est obtenue pour X = 5123 et Y = 4876

Les paires de triminos

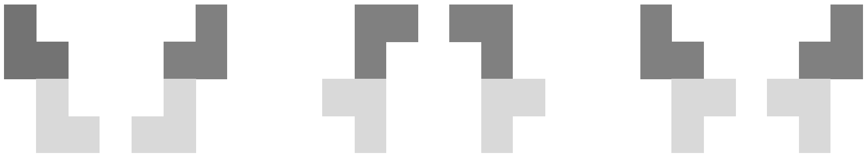
Une méthode pour ne pas oublier de cas :
La pièce grise étant placée, je déplace autour d'elle la pièce blanche qui se déduit de la grise par translation (1 à 5), symétrie glissée (6 à 15), symétrie centrale (16 à 25)



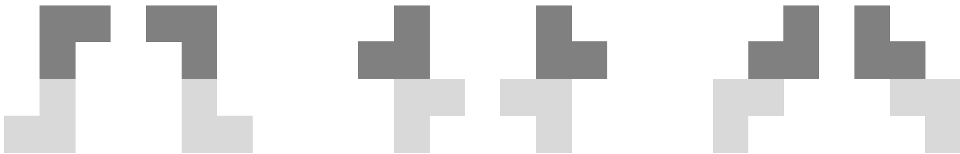
Couples de pièces superposables par retournement (1,3), (4,5), (7,15), (8,14), (9,13), (10,12), (16,19), (17,18), (20,25), (21,24), (22,23).

On peut classer ces 25 formes en fonction de leurs dimensions, deux formes superposables par retournement sont placées côte à côte :

Rectangle 4*3



5 4 9 13 10 12



19 16 22 23 25 20

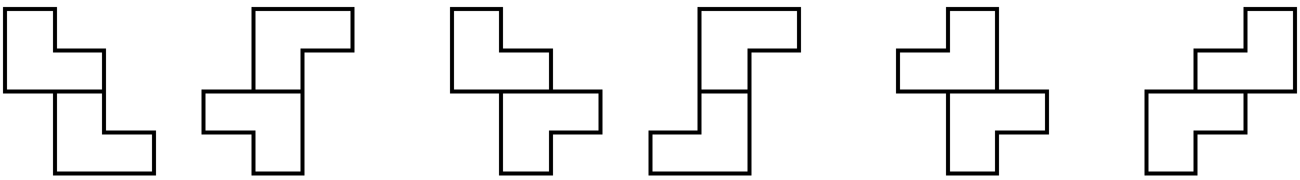
Rectangle 4*2

1 3 8 14 21 24 6 11

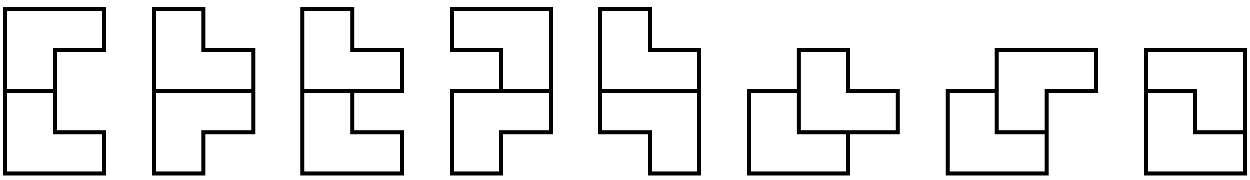
Rectangle 3*3 ou 3*2

2 7 15 17 18

On obtient 14 formes non superposables par retournement :



4-5 9-13 10-12 16-19 22-23 20-25



6 11 1-3 8-14 21-24 2 7-15 17-18

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2011

Les corrigés COLLÈGE

Différences interdites

Liste des différences : 5-1=4, 10-1=9, 11-1=10, 15-1=14, 16-1=15, 20-1=19

10-5=5, 11-5=6, 15-5=10, 16-5=11, 20-5=15, 11-10=1, 15-10=5, 16-10=6, 20-10=10

15-11=4, 16-11=5, 20-11=9, 16-15=1, 20-15=5, 20-16=4

Voici une liste de 11 entiers de façon que la différence entre deux entiers quelconques de cette liste ne soit jamais égale à 3 : 1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 19, 20

Cherchons une liste, de façon que la différence entre deux entiers quelconques de cette liste ne soit jamais égale à 4. Pour avoir une liste la plus longue possible, nous allons prendre des différences les plus petites possibles.

En commençant par 1 nous allons faire des différences successives égales à 1 tant qu'une différence égale à 4 n'apparaît pas, nous sauterons alors les entiers qui donneraient une telle différence :

1,2,3,4 conviennent car les différences qui apparaissent sont 1,2,3 ; on saute 5,6,7,8 car 5-1=4, 6-2=4, 7-3=4, 8-4=4 ; on prend ensuite 9, 10, 11, 12 , on saute 13,14,15,16 ; on prend 17, 18, 19, 20.

La liste obtenue est : 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, elle comporte 12 nombres.

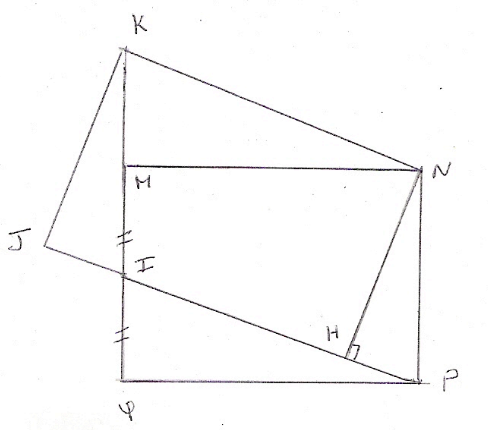
Pour démontrer que c'est la plus longue liste possible, on peut partager l'ensemble des entiers de 1 à 20 en quatre parties : A={1,5,9,13,17} , B={2,6,10,14,18} , C={3,7,11,15,19} et D={4,8,12,16,20}.

Dans chacune de ces parties on ne peut pas prendre deux entiers qui se suivent car leur différence est égale à 4. On peut donc prendre au maximum 3 entiers dans chaque partie, soit au total 12 entiers, et il n'y a qu'une solution.

Deux listes d'entiers

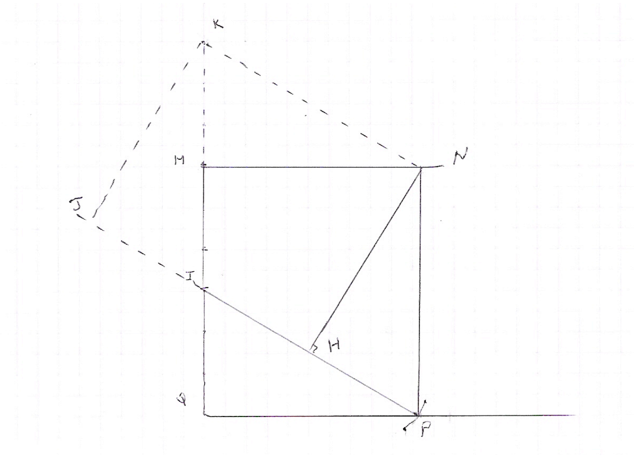
20, 11, -9, -20, -11, 9, 20, 11, -9, -20
Leur somme est égale à (20+11 -9 -20 -11+ 9) + (20+11 -9 -20) = 2, on remarque que la somme des 6 premiers nombres est nulle.
Si on continue la liste, la séquence 20, 11, -9, -20, -11, 9 se répète et donne une somme nulle
2011 = 335 ×6 +1
La liste des 2011 premiers entiers comporte 335 fois la séquence 20, 11, -9, -20, -11, 9 puis le nombre 20
donc la somme des 2011 premiers entiers est 20.

Un puzzle



HJKN est bien un rectangle car ses 4 angles sont droits (ou bien c'est un parallélogramme qui possède un angle droit).

Pour construire le rectangle de Bob, il faut que MNPQ et HJKN aient les mêmes dimensions ; or
NP ≠ NH donc NP = KN et KN = IP car KNPI est un parallélogramme.
On place deux points Q et M et la perpendiculaire à [QM] en Q puis le milieu I de [QM] ; le cercle de centre I de rayon QM coupe en P la perpendiculaire à QM. On achève la construction du rectangle.
Les deux rectangles ont la même aire puisque constitués des mêmes morceaux, et une dimension commune donc la deuxième dimension est la même.



Partage d'un triangle

n	Périmètre de la région triangulaire	Périmètre d'un trapèze	Nombre de mailles du triangle de départ	Nombre de mailles de la région triangulaire	Nombre de mailles d'un trapèze
4	3	7	1+3+5+7=16	1	5
5	6	9	1+3+5+7+9=25	1+3=4	7
6	9	11	1+3+5+7+9+11=36	1+3+5=9	9
7	12	13	49	16	11
8	15	15	64	25	13

Pour n=6, la région triangulaire et le trapèze ont même aire.
Pour n=8, la région triangulaire et le trapèze ont même périmètre.

Pour un triangle de côté n : Périmètre de la région triangulaire : 3*(n-3)
Périmètre de chaque trapèze : 2n-1 ; Nombre de mailles de la région triangulaire : $(n-3)^2$
Nombre de mailles de chaque trapèze 2n-3

Les quatre régions ont le même périmètre si 3*(n-3) = 2n-1
C'est-à-dire 3n – 9 = 2n – 1 ou encore n = 8

Les quatre régions ont la même aire lorsque l'aire de la région triangulaire est égale au quart de l'aire du triangle de départ, ce qui donne $n^2 = 4 * (n-3)^2$
Soit : n = 2 (n – 3), on obtient n = 6

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2012

Les corrigés COLLÈGE

Jouer avec 2012

10 000 – 2012 = 7988, somme des chiffres : 32

100 000 – 2012 = 97 988, somme des chiffres $32 + 9 \times 1 = 41$
1 000 000 -2012 = 997 988, somme des chiffres $32 + 9 \times 2 = 50$
A chaque fois qu'on ajoute un 0 à la fin du premier nombre, il apparaît un 9 au début du résultat.

Pour 5 zéros, 1 chiffre 9

Pour 6 zéros, 2 chiffres 9 etc …

Pour 2012 zéros, 2008 chiffres 9 ; somme $32 + 9 \times 2008 = 18\,104$

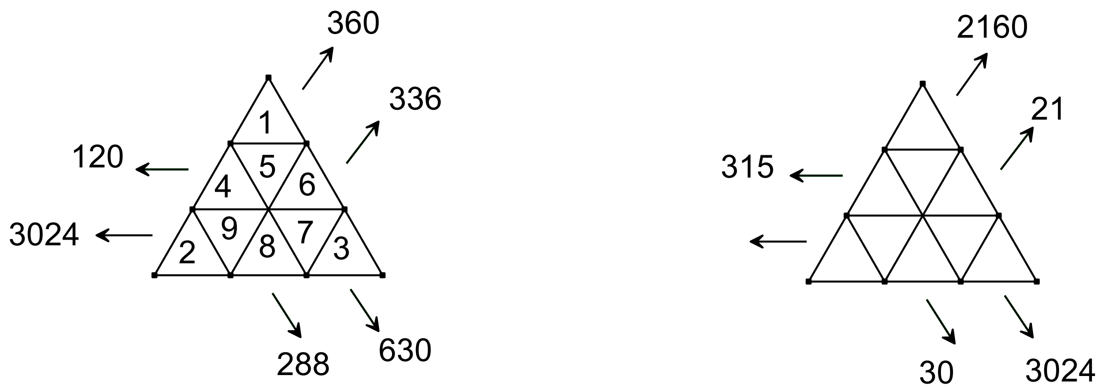
Somme d'entiers qui diffèrent de 1

Cherchons les suites les plus courtes qu'on peut écrire respectant les conditions :
Un terme : **1** ;
Deux termes : 1 + 2 = **3**
Trois termes : 1 + 2 + 1 = **4** ou 1 + 2 + 3 = **6**
Avec un nombre supérieur de termes on atteint ou dépasse 6 donc 2 et 5 ne peuvent pas être obtenus.
(1 + 2) + (1 + 2) + 1 = **7**
1 + 2 + 3 + 2 = **8**
(1 + 2) + (1 + 2) + (1 + 2) = **9**
(1 + 2) + (1 + 2) + (1 + 2) + 1 = **10**

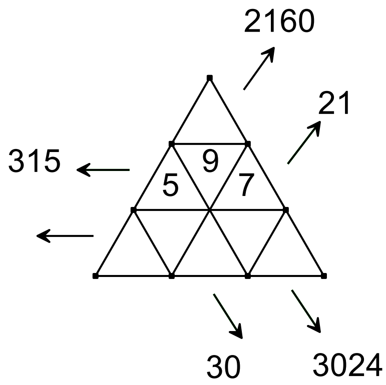
Pour obtenir la suite la plus longue convenant pour 50, il suffit d'employer le maximum de 1 et de 2
(1 + 2) + (1 + 2) + …… + (1 + 2) = 45

15 fois
(1 + 2) + (1 + 2) + …… + (1 + 2) + 3 + 2 = 50
15 fois
Pour obtenir la suite la plus courte on essaie d'utiliser des nombres de plus en plus grands :
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, pour arriver à 50 il manque 5 = 3 + 2 qu'on glisse après 2
1 + 2 + (3 + 2) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 50, on a une suite avec 11 termes, le plus grand étant 9.
Existe-t-il des sommes avec 10 termes ?
Soit p le plus grand des termes écrits, la somme des nombres de 1 à p figure nécessairement dans l'écriture donc le dernier terme est au maximum 9.
Si p = 8, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36, il manque 14 à écrire en 2 termes, c'est impossible, en revanche on peut l'écrire en 3 termes : 7 + 4 + 3
1 + 2 + 3 + 4 + (3 + 4) + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 = 50 on a encore 11 termes dont le plus grand est 8.
Si p = 7, le maximum en 10 termes est (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 6 + 7 + 6 = 47, on n'atteint pas 50.
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + (5 + 6) + (5 + 6) + 7 = 50 on a encore 11 termes dont le plus grand est 7.
Si p = 6, le maximum en 10 termes est (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 5 + 6 + 5 + 6 = 43, on n'atteint pas 50.

Les triangles

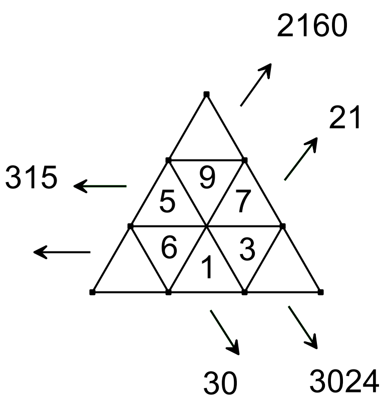


Pour compléter le deuxième tableau, on doit d'abord décomposer 21, 30 et 315 en produits de trois facteurs distincts compris entre 1 et 9.
21 = 1 × 3 × 7   30 = 1 × 5 × 6   = 2 × 3 × 5   315 = 5 × 7 × 9
Les lignes 21 et 315 ont une seule case commune et le facteur 7 est le seul facteur commun figurant dans les décompositions des nombres 21 et 315, on peut donc le placer, et on remarque que c'est bien un diviseur de 3024.
Les lignes 30 et 315 ont une seule case commune et le facteur 5 est le seul facteur commun figurant dans les décompositions des nombres 30 et 315, on peut donc le placer, et on remarque que c'est bien un diviseur de 2160.
On complète la ligne 315 avec le facteur 9

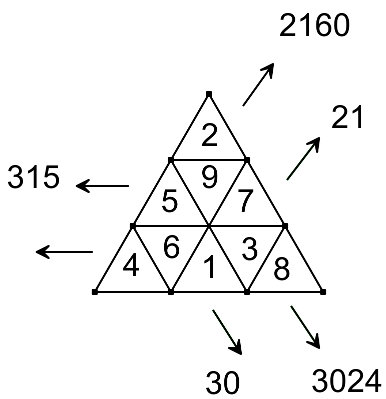


Pour les lignes 21 et 30 on a deux possibilités.

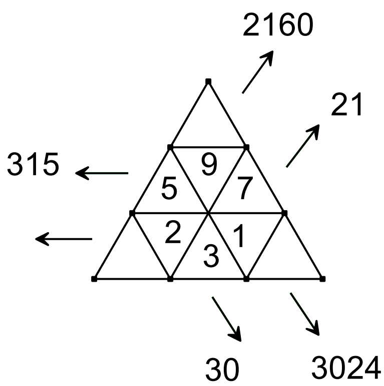
<table>
<tr>
<td>
Première possibilité :



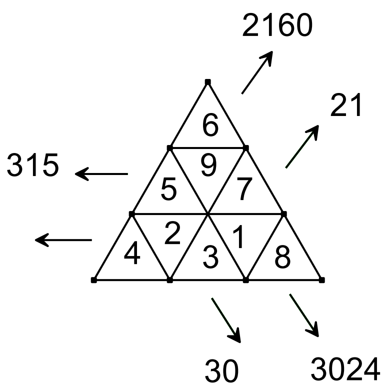
Il reste à placer 2, 4 et 8
2160 / (5×6×9) = 8 = 2×4
3024/ (9×7×3) = 16 = 2×8
d’où la place de 2 dans le triangle du haut, on complète alors facilement :



</td>
<td>
Deuxième possibilité :

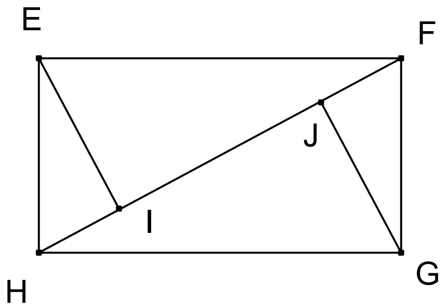


Il reste à placer 4, 6, 8
o 3024 / (9×7×1) = 48 = 6×8
2160 / (5×2×9) = 24 = 6×4
d’où la place du 6 dans le triangle du haut, on complète facilement :

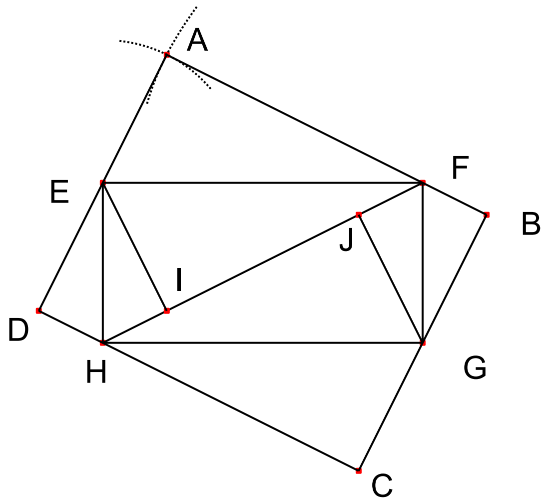


</td>
</tr>
</table>

Ouvrir ou fermer l'enveloppe

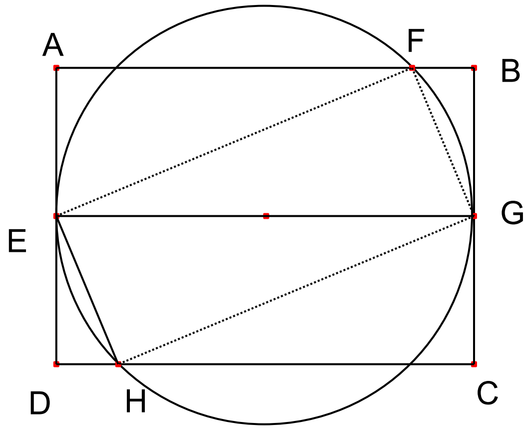


I est l'image de A par pliage autour de [EF] on a donc un angle droit en I de même en J.
Partant de EFGH on construit I et J puis les symétriques de I par rapport à [EF] et [EH], on obtient les points A et D ; puis les symétriques de J par rapport à [FG] et [GH], on obtient les points B et C.



Analyse de la figure obtenue : A E D sont alignés ainsi que B F A, C G B et D H C.
E est le milieu de [AD], G est le milieu de [BC].
ABGE est un rectangle donc EG = AB ; EFGH est un rectangle donc EG = HF
AD inférieur à HF donc AD inférieur à AB.

Construction à partir du rectangle ABCD
On place les milieux E et G des plus petits côtés du rectangle
[EG] est une diagonale du rectangle à construire
F est sur [AB] et sur le cercle de diamètre [EG], deux possibilités, on en choisit une et on place H symétrique de F par rapport au centre du rectangle.


A
F
B
E
G
D
H
C

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2013

Les corrigés COLLÈGE

Le temps passe

Du 10/11/12 au 11/12/13 il y a 365 + 30 + 1 = 396 jours qui font $396 \times 24 = 9504$ heures.
Il faut ajouter une heure pour passer de 13h à 14h donc 9505 heures au total qui font $9505 \times 60 = 570300$ minutes.
Il reste à ajouter une minute pour passer de 14 à 15.
Il y a donc au total 570301 minutes.

Anniversaire d'exception en 2013

Premier cas :
L'année de naissance s'écrit 201x où x est un chiffre (0, 1 ou 2). La seule solution dans ce cas est l'année 2010, l'âge en 2013 étant égal à 3 = 2 + 0 + 1 + 0.

Deuxième cas :
L'année de naissance s'écrit 200x où x est un chiffre (compris entre 0 et 9). L'âge en 2013 est alors égal à 13 – x. Cet âge doit être aussi égal à 2 + 0 + 0 + x = 2 + x. On doit résoudre l'équation 13 – x = 2 + x ou encore 11 = 2x. Il n'y a pas de solution dans ce cas.

Troisième cas :
L'année de naissance s'écrit 199x où x est un chiffre (compris entre 0 et 9). Il faut 10 – x années pour aller en 2000, puis 13 années pour aller en 2013. L'âge en 2013 est donc égal à 13 + 10 - x = 23 - x. Cet âge doit être aussi égal à 1 + 9 + 9 + x = 19 + x. On doit résoudre l'équation : 23 – x = 19 + x d'où 23 – 19 = 2x. Il y a une solution dans ce cas : x = 2 donc l'année de naissance 1992 est une solution au problème.

Quatrième cas :
L'année de naissance s'écrit 198x où x est un chiffre (compris entre 0 et 9). Il faut 10 – x années pour aller en 1990, puis 10 années pour aller en 2000, puis 13 années pour aller en

2013. L’âge en 2013 est alors égal à 10 - x + 10 + 13 = 33 - x. Cet âge doit être aussi égal à 1 + 9 + 8 + x = 18 + x. On doit résoudre l’équation :
33 – x = 18 + x ou encore 33 – 18 = 2x. Il n’y a pas de solution dans ce cas.

Si l’année de naissance est antérieure à 1980 alors l’âge est au moins égal à 34 ans ; mais la somme des chiffres est au plus égale à 1 + 9 + 7 + 9 = 26. Il n’y a donc pas d’autre solution.
En définitive, il y a deux solutions au problème posé: 1992 et 2010.

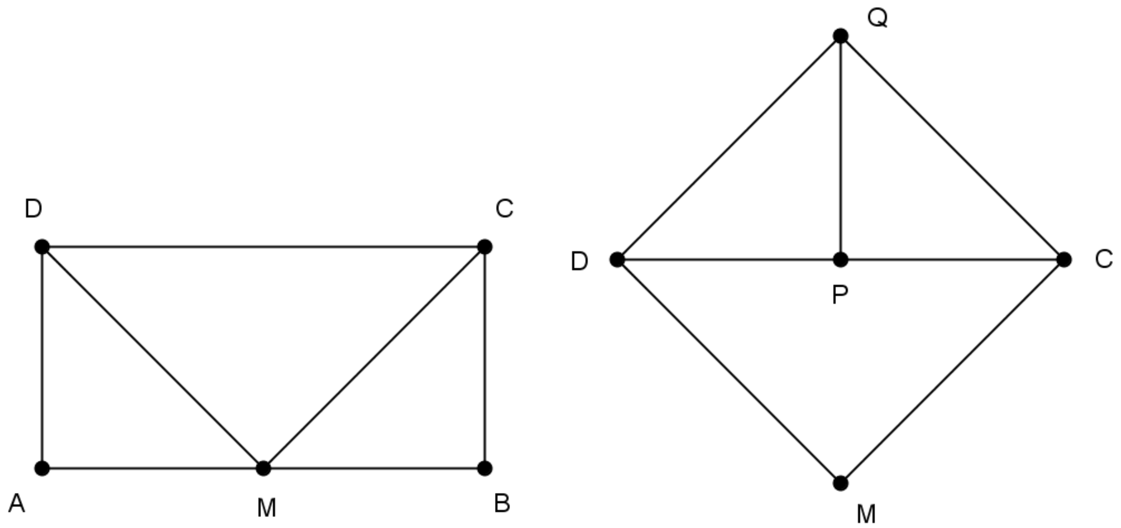
Multiple caché

1) On trouve 24 nombres de quatre chiffres distincts formés avec 2, 4, 5 et 7 :
2457, 2475, 2547, 2574, 2745, 2754, 4257, 4275, 4527, 4572, 4725, 4752, 5247, 5274, 5427, 5472, 5724, 5742, 7245, 7254, 7425, 7452, 7524, 7542.
Explication du total égal à 24 : on choisit d’abord le premier chiffre : il y a 4 possibilités. Quand on choisit le deuxième chiffre il n’y a plus que trois possibilités. Quand on choisit le troisième chiffre il ne reste plus que deux possibilités. Pour le dernier chiffre il ne reste plus qu’une possibilité.
Il y a donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ 4×3×2×1 = 24 possibilités.

2) Notons N le plus petit des deux nombres. Son premier chiffre est nécessairement égal à 2 car si c’était 4, l’autre nombre serait aux moins égal à 2N et débuterait par 8 ou 9, ce n’est pas possible.
Il y a donc 6 nombres à tester : 2457, 2475, 2547, 2574, 2745 et 2754.
Les doubles de ces 6 nombres valent respectivement: 4914, 4950, 5094, 5148, 5490, 5508. Aucun ne convient.
Les triples des 6 nombres à tester valent respectivement: 7371, 7425, 7641, 7722, 8235, 8262.
On obtient une seule solution : $7425 = 3 \times 2475$.

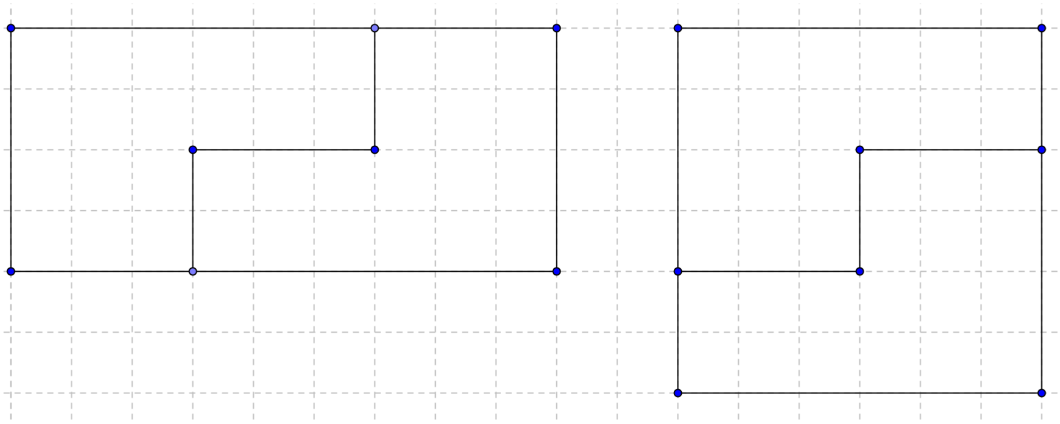
Du rectangle au carré

1) Soit M le milieu du côté [AB] du rectangle ABCD.
Manon découpe le rectangle en suivant les segments [CM] et [DM].
Elle déplace le triangle AMD en PCQ et le triangle MBC en DPQ.
Elle obtient un carré DMCQ.



C’est bien un carré : les quatre côtés ont la même longueur (puisque CM=DM) et il y a un angle droit en M car DAM et MBC sont rectangles et isocèles (donc les angles à la base mesurent 45°) et l'angle $\widehat{AMB}$ est plat donc $\widehat{DMC} = 180° - (2 \times 45°) = 90°$.

2) On peut aussi découper un rectangle de largeur 4 cm et de longueur 9 cm en deux morceaux de façon à pouvoir reconstituer un carré avec les deux morceaux :



TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2014

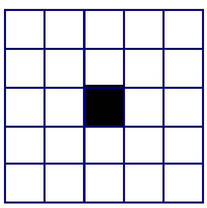
Les corrigés COLLÈGE

Code oublié

Puisque le code est divisible par 5 et qu'il n'y a pas de 0, le chiffre des unités est un 5.
Notons x le chiffre des centaines (qui est donc aussi celui des dizaines).
Le code est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Comme le chiffre des milliers est supérieur à 5, il est donc égal à 6, 7, 8 ou 9.
S'il est égal à 6 : 9 doit diviser $6 + x + x + 5 = 2(x + 1) + 9$; seul $x = 8$ convient d'où le code 6885.
S'il est égal à 7 : 9 doit diviser $7 + x + x + 5 = 2(x + 6)$; seul $x = 3$ convient d'où le code 7335.
S'il est égal à 8 : 9 doit diviser $8 + x + x + 5 = 2(x + 2) + 9$; seul $x = 7$ convient d'où le code 8775.
S'il est égal à 9 : 9 doit diviser $9 + x + x + 5 = 2(x + 7)$; seul $x = 2$ convient d'où le code 9225.
Il y a donc <u>quatre codes possibles</u> : <u>6885, 7335, 8775 et 9225</u>.

Beaucoup de carrés

1) Dans cette grille 5×5 dessinée ci-dessous il y a cinq sortes de carrés : 1×1 ; 2×2 ; 3×3 ; 4×4 et 5×5.
Combien de carrés de chaque sorte contiennent le carré noir ?



Dans la grille 5×5 :
1 seul carré 1×1 contient le carré noir.

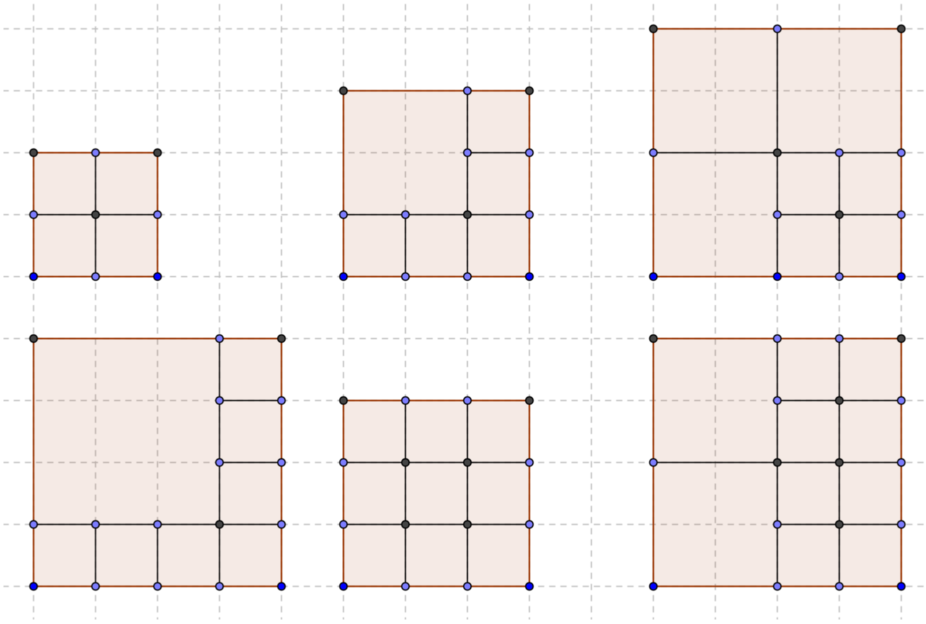
4 carrés 2×2 contiennent le carré noir puisqu'il y a 4 possibilités pour placer un carré noir dans un carré 2×2.
9 carrés 3×3 contiennent le carré noir puisqu'il y a 9 possibilités pour placer un carré noir dans un carré 3×3.
4 carrés 4 × 4 contiennent le carré noir puisqu'il n'y a que 4 carrés 4 × 4 dans la grille et qu'ils contiennent tous le carré noir.
1 carré 5 × 5 contient le carré noir puisqu'il n'y a qu'un seul carré 5 × 5 dans la grille.

2) On remplace cette grille 5 × 5 par une grille 11 × 11, le carré noir étant encore au centre. Combien de carrés de toutes tailles (de 1 × 1 à 11 × 11) contiennent le carré noir ?

Dans la grille 11 × 11:
1 carré 1 × 1 contient le carré noir.
4 carrés 2 × 2 contiennent le carré noir car il y a 4 possibilités pour placer un carré noir dans un carré 2 × 2.
9 carrés 3 × 3 contiennent le carré noir car il y a 9 possibilités pour placer un carré noir dans un carré 3 × 3.
16 carrés 4 × 4 contiennent le carré noir car il y a 16 possibilités pour placer un carré noir dans un carré 4×4.
25 carrés 5 × 5 contiennent le carré noir car il y a 25 possibilités pour placer un carré noir dans un carré 5×5.
Tous les carrés 6 × 6 de la grille contiennent le carré noir, il y en a 36.
Tous les carrés 7 × 7 de la grille contiennent le carré noir, il y en a 25.
Tous les carrés 8 × 8 de la grille contiennent le carré noir, il y en a 16.
Tous les carrés 9 × 9 de la grille contiennent le carré noir, il y en a 9.
Tous les carrés 10 × 10 de la grille contiennent le carré noir, il y en a 4.
Le carré 11 × 11 contient le carré noir.
Au total il y a donc 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = <u>146 carrés</u> de toutes tailles (de 1 × 1 à 11 × 11) qui contiennent le carré noir .

Encore des carrés

Partagez un carré en 4, 6, 7, 8, 9, 10 carrés pas nécessairement de même taille.
Faites une figure pour chaque cas.



Familles de trois enfants

Dans une cité il y a 200 familles qui ont 1, 2 ou 3 enfants. Le nombre total de ces enfants est égal à 330.
On compte le nombre de familles ayant 1 enfant, puis le nombre de familles ayant 2 enfants, puis le nombre de familles ayant 3 enfants. Deux des trois nombres obtenus sont égaux.
Combien y a-t-il de familles ayant 3 enfants ? Expliquez votre démarche.

Premier cas : le nombre de familles ayant 1 enfant est égal au nombre de familles ayant 2 enfants. Notons x ce nombre. Le nombre de familles ayant 3 enfants est alors égal à $200 - 2x$.
Le nombre total d'enfants est donc égal à $x + 2x + 3(200 - 2x) = 600 - 3x$.
Cela conduit à l'équation $600 - 3x = 330$, d'où $3x = 270$, d'où $x = 90$.
Le nombre de familles ayant 3 enfants est donc égal à $200 - 2x = 200 - 180 = 20$.

Deuxième cas : le nombre de familles ayant 1 enfant est égal au nombre de familles ayant 3 enfants. Notons x ce nombre. Le nombre de familles ayant 2 enfants est alors égal à $200 - 2x$.
On obtient comme nombre total d'enfants $x + 2(200 - 2x) + 3x = 400$ mais cela contredit le fait que le nombre total d'enfants est égal à 330. Ce cas n'est donc pas possible.

Troisième cas : le nombre de familles ayant 2 enfants est égal au nombre de familles ayant 3 enfants. Notons x ce nombre. Le nombre de familles ayant 1 enfant est alors égal à $200 - 2x$.
Le nombre total d'enfants est donc égal à $(200 - 2x) + 2x + 3x = 200 + 3x$.
Cela conduit à l'équation $200 + 3x = 330$, d'où $3x = 130$ qui n'a pas de solution entière. Ce cas n'est pas possible. Il y a donc une seule solution : 20 familles ont 3 enfants.

TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

LIMOUSIN

2015

Les corrigés COLLÈGE

C'est renversant

Pour 87 on obtient successivement :
87 + 78 = 165, 165 + 561 = 726, 726 + 627 = 1353 et 1353 + 3531 = 4884.
Il faut donc 4 additions pour obtenir un palindrome en partant de 87.

Il suffit de considérer les entiers dont la somme des deux chiffres est au moins égale à 10 (sinon on obtient un palindrome en une étape) avec le chiffre des dizaines inférieur ou égal au chiffre des unités.
On trouve que les seuls entiers qui nécessitent au moins 4 additions sont :
69 et 78 qui en nécessitent 4 (puisque la première addition donne 165 comme pour 87).
79 qui en nécessite 6 : 79 + 97 = 176, 176 + 671 = 847, 847 + 748 = 1595, 1595 + 5951 = 7546, 7546 + 6457 = 14003 et 14003 + 30041 = 44044.

Toujours par 3

a) A la première étape on retourne 3 jetons noirs : il y a ensuite 7 jetons noirs et 3 blancs sur la table.
A la deuxième étape on retourne 3 jetons noirs : il y a ensuite 4 jetons noirs et 6 blancs sur la table.
A la troisième étape on retourne 2 jetons noirs et un blanc: il y a ensuite 3 jetons noirs et 7 blancs sur la table.
A la quatrième étape on retourne 3 jetons noirs: il y a ensuite 10 jetons blancs sur la table.

b) Aux trois premières étapes on retourne 3 jetons noirs : il y a ensuite 2 jetons noirs et 9 blancs sur la table.
A la quatrième étape on retourne 1 jeton noir et 2 blancs: il y a ensuite 3 jetons noirs et 8 blancs sur la table.
A la cinquième étape on retourne 3 jetons noirs: il y a ensuite 11 jetons blancs sur la table.

Une variante :
Aux deux premières étapes on retourne 3 jetons noirs : il y a ensuite 5 jetons noirs et 6 blancs sur la table.
A la troisième étape on retourne 2 jetons noirs et un blanc: il y a ensuite 4 jetons noirs et 7 blancs sur la table.
A la quatrième étape on retourne 2 jetons noirs et un blanc: il y a ensuite 3 jetons noirs et 8 blancs sur la table.
A la cinquième étape on retourne 3 jetons noirs: il y a ensuite 11 jetons blancs sur la table.
Montrons que le nombre minimum d'étapes est 5.
Il faut au moins 4 étapes puisque 3 étapes donnent au maximum 9 jetons blancs.
Examinons de combien peut varier le nombre de jetons noirs au cours d'une étape.
Si on retourne 3 jetons noirs, le nombre de jetons noirs diminue de 3.
Si on retourne 2 jetons noirs et 1 blanc, ces 3 jetons deviennent 2 blancs et 1 noir, donc le nombre de jetons noirs diminue de 1.
Si on retourne 1 jeton noir et 2 blancs, ces 3 jetons deviennent 1 blanc et 2 noirs, donc le nombre de jetons noirs augmente de 1.
Si on retourne 3 jetons blancs, le nombre de jetons noirs augmente de 3.
On observe que dans tous les cas, le nombre de jetons noirs varie d'un nombre impair au cours d'une étape.
Pour passer de 11 jetons noirs à 0 jetons noirs, il faut donc un nombre impair d'étapes : 4 étapes ne suffisent pas et il en faut au moins 5.

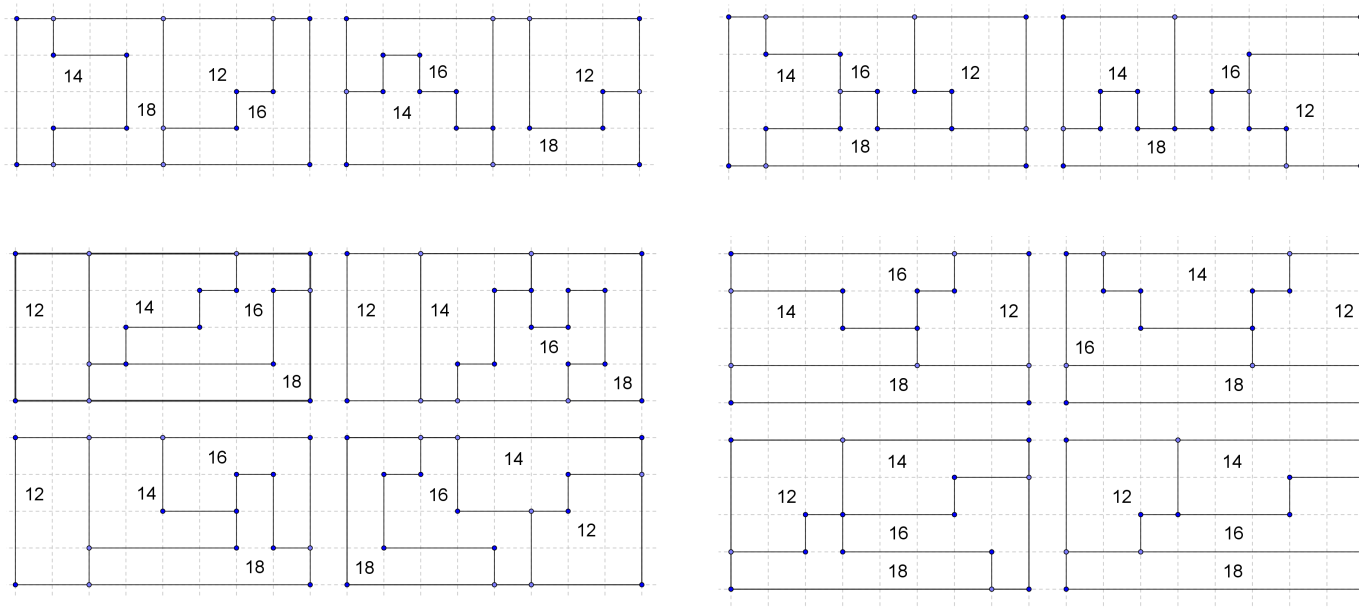
c) Puisque 2015 = 3 * 671 + 2, il faut au moins 672 étapes. Pour la même raison qu'au b), 2015 est impair donc il faut un nombre impair d'étapes pour arriver à 0 jetons noirs. Le minimum est donc 673 étapes. C'est possible : les 670 premières étapes consistent à retourner 3 jetons noirs, il y a ensuite 5 noirs et 2010 blancs sur la table ; on termine avec les trois mêmes dernières étapes que dans le cas de 11 jetons.

Jouons avec des périmètres des aires

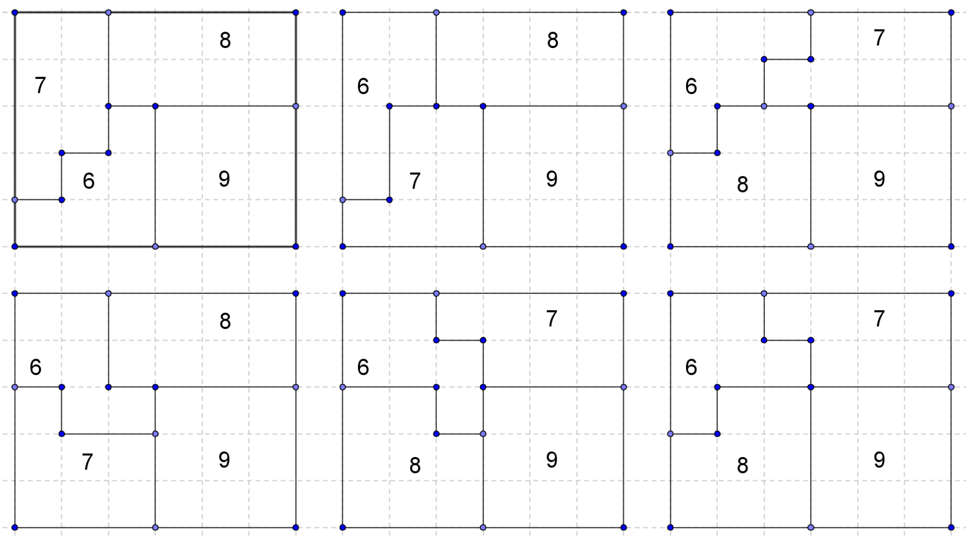
a) Puisque les 4 morceaux ont la même aire, l'aire commune vaut 8.

Pour chaque morceau le périmètre est au minimum égal à 12 (dans le cas d'un rectangle 2x4 ou bien d'un carré 3x3 écorné). Il est au maximum égal à 18, par exemple pour un rectangle 1x8.
De plus le périmètre est un entier pair : si on fait le tour d'un morceau en suivant le bord, la longueur de la descente est la même que celle de la montée et la longueur en allant vers la droite est la même que celle en allant vers la gauche. Comme les quatre périmètres sont distincts ils valent 12, 14, 16 et 18.

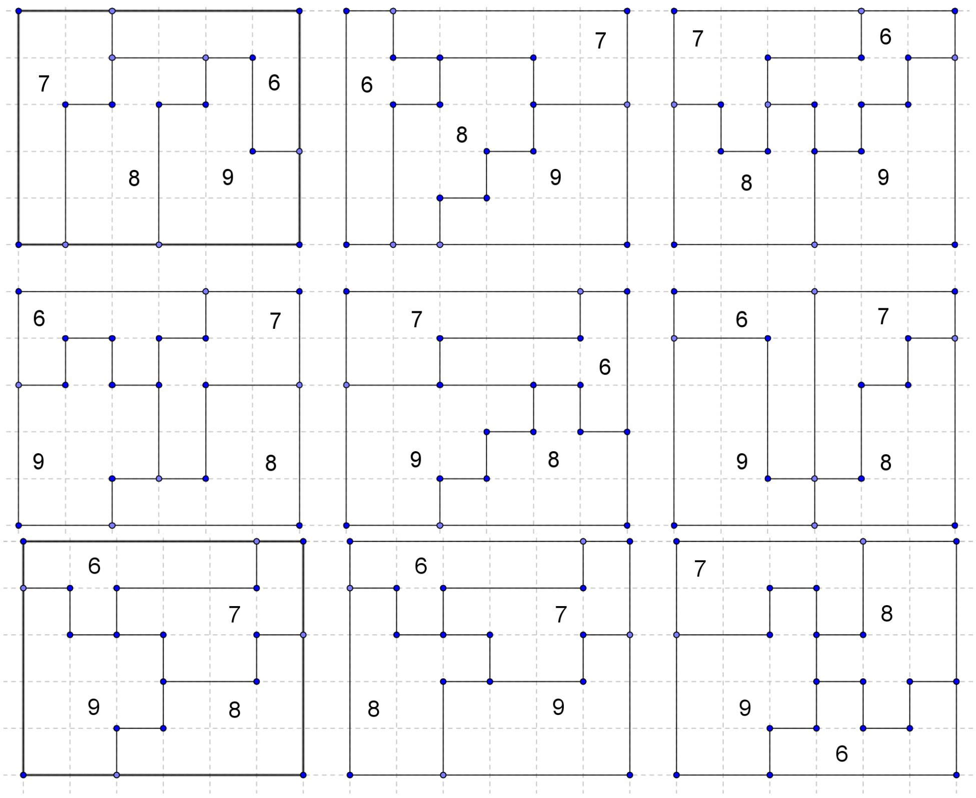
Il y a beaucoup de possibilités. En voici quelques-unes :



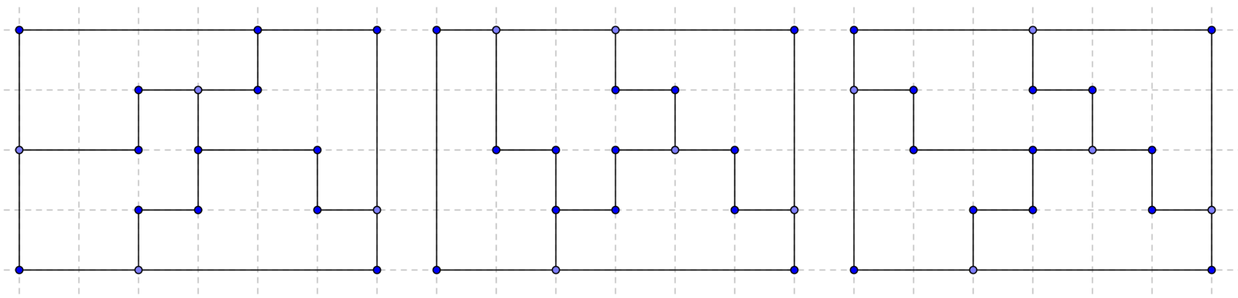
b) On peut montrer que les aires doivent être égales à 6, 7, 8 et 9. Les périmètres peuvent être égaux à 12 ou bien à 14. Voici des exemples avec les périmètres égaux à 12 :



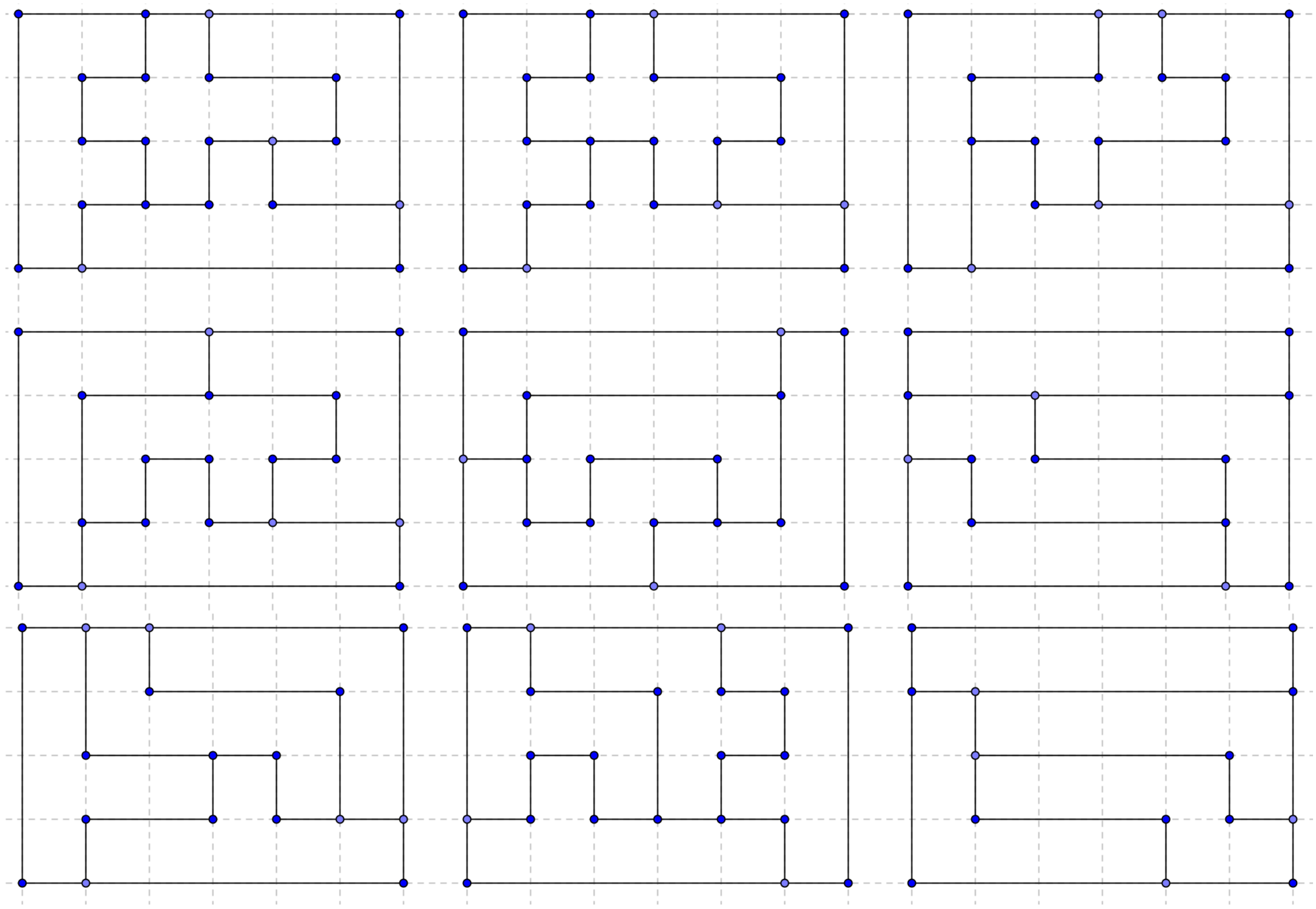
Voici d'autres exemples avec les périmètres égaux à 14 :



c) L'aire commune est égale à 6. Le périmètre commun peut être égal à 12 ou bien à 14.
Voici des exemples avec les périmètres égaux à 12 :

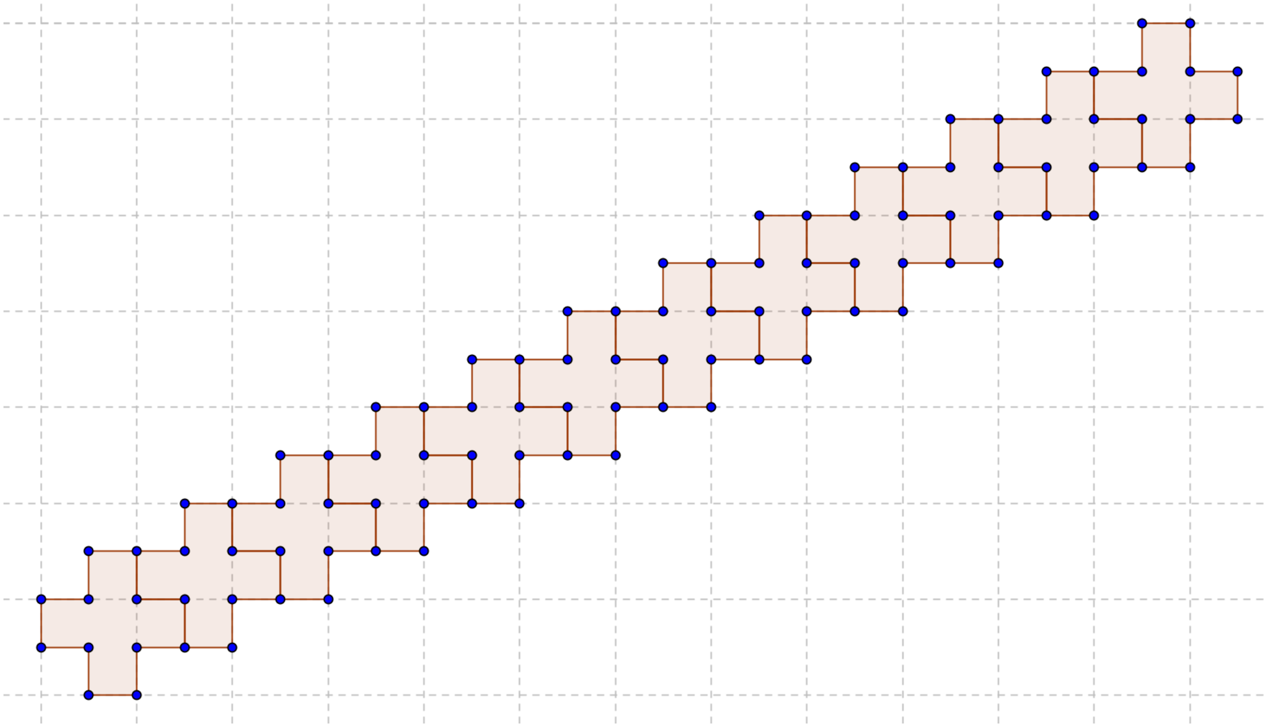


Voici quelques exemples avec les périmètres égaux à 14:

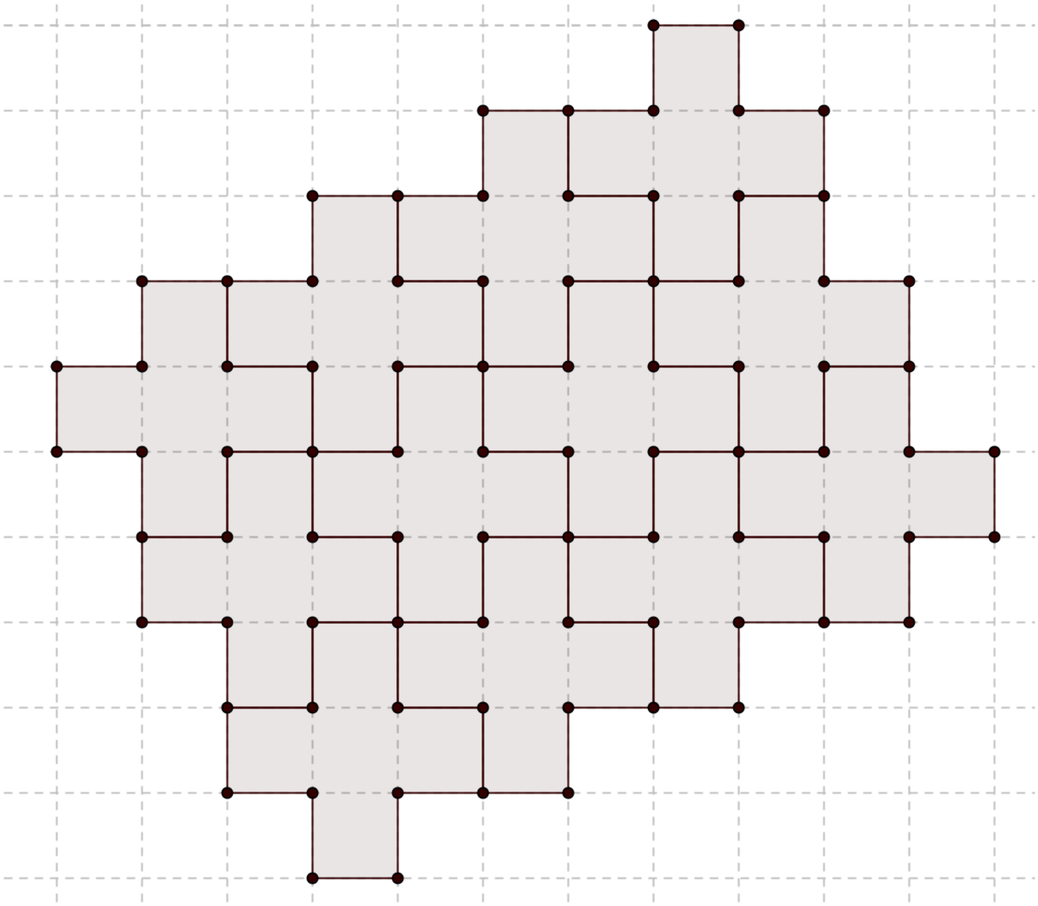


Avec des croix

Pour avoir un périmètre le plus grand possible il faut mettre les croix en enfilade.
Il y a 11 contacts entre deux croix. Chaque contact ayant pour longueur 3, il retire 6 à la somme des périmètres des 12 croix. Comme chaque croix a pour périmètre 12, le périmètre du polygone est égal à : 12*12 – 11*6 = 78.



Pour avoir un périmètre le plus petit possible il faut assembler les croix avec un maximum de contacts entre les croix.
En assemblant 3 alignements de 4 croix on obtient un périmètre égal à 42.



TOURNOI

MATHÉMATIQUE

DU

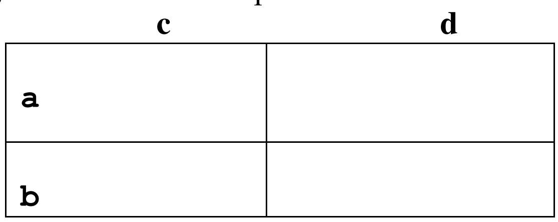
LIMOUSIN

2016

Les corrigés COLLÈGE

Le tour du champ

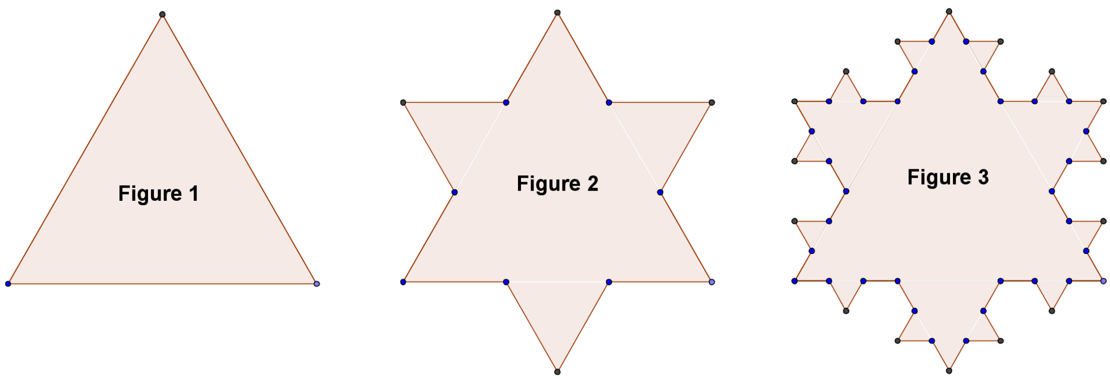
Notons a, b, c, d les longueurs des côtés des parcelles :



Lorsqu'on fait le tour de 2 parcelles contigües on parcourt respectivement : 2 (a + c + d) , 2 (b + c + d) , 2 (a + b + c) et 2 (a + b + d) . On en déduit en ajoutant ces quatre valeurs:
6 (a + b + c + d) = 1416 + 1500 + 1516 + 1616 = 6048 m.
Le périmètre du champ est donc égal à 2 (a + b + c + d) = 6048 / 3 = 2016 m.

Il neige des flocons… de Von Koch !

1.



2. La figure 1 a pour périmètre 27 cm.

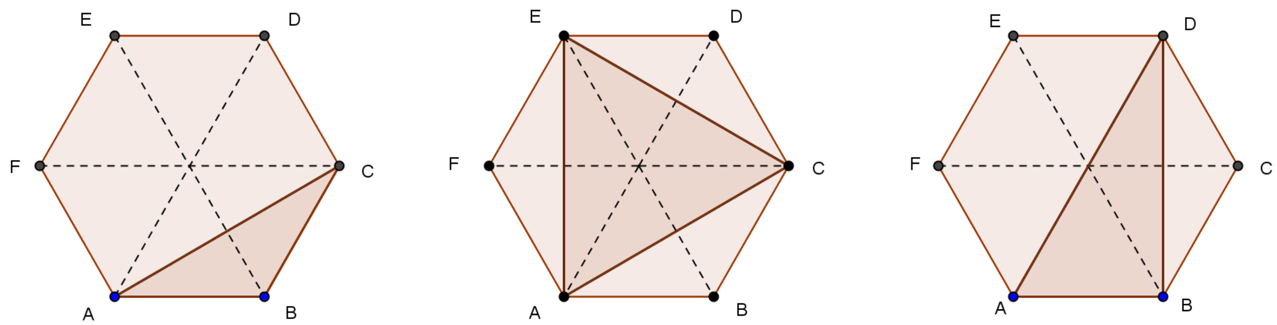
Dans la figure 2 il y a 12 segments de longueur 3 cm, son périmètre est donc égal à 36 cm.
Dans la figure 3 il y a $4 \times 12 = 48$ segments de longueur 1 cm, son périmètre est donc égal à 48 cm.

3. Quand on passe d'une figure à la suivante, le nombre de segments est multiplié par 4 alors que la longueur de chaque segment est divisée par 3. Le périmètre est donc multiplié par 4/3.
Pour la figure 4 on obtient $48 \times 4/3 = 64$ cm.
Pour la figure 6 on obtient $64 \times 4/3 \times 4/3 = 1024/9$ soit environ 113,8 cm.

4. Pour passer de la figure 1 à la figure 2 on ajoute à l'extérieur 3 triangles équilatéraux de côté égal à 3 cm. Chacun de ces triangles a donc une aire égale à A/9. L'aire de la figure 2 est donc égale à $A+3A/9 = 4A/3$.
Pour passer de la figure 2 (qui est formée de 12 segments) à la figure 3 on ajoute à l'extérieur 12 triangles équilatéraux de côté égal à 1 cm. Chacun de ces triangles a donc une aire égale à A/81. L'aire de la figure 3 est donc égale à $4A/3 + 12A/81 = 40A/27$.
Pour passer de la figure 3 (qui est formée de 48 segments) à la figure 4 on ajoute à l'extérieur 48 triangles équilatéraux de côté égal à 1/3 cm. Chacun de ces triangles a donc une aire égale à A/729. L'aire de la figure 3 est donc égale à $40A/27 + 48A/729 = 376A/243$.

Des triangles en famille

1. Il y a 6 triangles formés de deux demi-triangles équilatéraux accolés par leur petit côté :
ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB.
Il y a 2 triangles équilatéraux ACE et BDF.
Il y a 12 triangles rectangles dont l'hypoténuse joint deux sommets opposés de l'hexagone :
ABD, ACD, BCE, BDE, CDF, CEF, DEA, DFA, EFB, EAB, FAC, FBC.



2. Il y a trois formes différentes.

3. Les 6 triangles du type ABC ont une aire égale à 1 cm² (ils sont formés par deux moitiés d'un petit triangle équilatéral d'aire 1 cm²).
Les 2 grands triangles équilatéraux ont une aire égale à 3 cm² (celle de l'hexagone moins 3 fois l'aire du triangle ABC).
Les 12 triangles rectangles comme ABD ont une aire égale à 2 cm² (un demi-hexagone moins l'aire du triangle BCD).

4. La moyenne des aires des 20 triangles est égale à $(6\times1 + 2\times3 + 12\times2)/20 = 36/20 = 1{,}8$ cm².

L'invasion des 1

1.
$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$
$1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$
$1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 = 3$
$1 + 1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 = 4$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 \times 1 = 5$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$
$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1) + 1 = 7$
$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) = 8$
$(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) = 9$

2. En remplaçant le premier 1 par 1×1 dans les égalités précédentes on peut déjà obtenir tous les entiers de 1 à 9 avec exactement 7 fois 1. On a de plus :
$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 10$
$(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) = 12$
On ne peut pas obtenir 11 ni les entiers strictement supérieurs à 12.

3. Avec 8 fois le nombre 1 on peut obtenir $18 = (1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1)$.