Corrigé lycée 2020

Des milliers de petits carrés

On dispose de douze mille petits carrés identiques.

En prenant N d'entre eux, on forme une surface carrée.

On rajoute ensuite 2020 petits carrés à ces N carrés et on forme ainsi une surface carrée plus grande.

Que vaut N ?

Notons x la longueur du côté du carré fait avec N petits carrés et y celle du côté du carré fait avec N + 2020 petits carrés. On a donc $N = x^2$ et $N + 2020 = y^2$. On en déduit $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 2020$.
Puisque $y - x$ et $y + x$ ont la même parité et que 2020 est pair, $y - x$ et $y + x$ sont tous les deux pairs ; on peut donc écrire $y - x = 2a$ et $y + x = 2b$ avec $a < b$ et $ab = 505 = 5 \times 101$ (on ne peut pas factoriser davantage puisque 101 est un nombre premier).

Il y a deux possibilités :
$a = 1$ et $b = 505$ d'où $x = b - a = 504$ qui entraîne $N = x^2 = 254016$ qui est trop grand.
$a = 5$ et $b = 101$ d'où $x = b - a = 96$ qui entraîne $N = x^2 = 9216$.

Il y a donc une unique solution : <u>N = 9216</u>.

En noir et blanc

On considère des grilles constituées de cases carrées identiques, colorées alternativement en noir et blanc comme sur un damier ou un échiquier, avec une case noire en haut à gauche.

1) *Dans le cas d'une grille* 3×5 *combien une diagonale traverse-t-elle de cases noires ? de cases blanches ? Même question pour une grille* 5×7.

Dans le cas d'une grille 3×5 une diagonale traverse 4 cases noires et 3 cases blanches.

Dans le cas d'une grille 5×7 une diagonale traverse 6 cases noires et 5 cases blanches.

2) *Dans la grille* 3×5 *on note L1 la somme des longueurs des segments d'une diagonale qui sont dans une case noire et L2 la somme des longueurs des segments de cette diagonale qui sont dans une case blanche. Calculer le rapport L2 ÷ L1. Reprendre la question avec une grille* 5×7.

On choisit un repère d'origine le point O sommet en bas à gauche de la grille, l'unité de longueur étant le côté d'une case de la grille. Pour une grille avec 3 lignes et 5 colonnes, la diagonale montante (D) a pour équation $y = 3x / 5$.
Par symétrie par rapport au centre de la diagonale on peut se limiter au calcul de la somme des longueurs des segments d'une demi-diagonale qui sont dans une case noire puis multiplier le résultat par deux.
Par le théorème de Thalès, le rapport des longueurs de deux segments sur la diagonale est égal au rapport

des longueurs de leurs projetés sur l'axe des abscisses. On peut donc se contenter de calculer la somme des longueurs des projetés des segments d'une demi-diagonale qui sont dans une case noire.

En partant de O la diagonale (D) traverse d'abord une case noire jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite d'équation $x = 1$: le projeté du premier segment dans une case noire a donc pour longueur 1. Ensuite la diagonale traverse une case blanche jusqu'au point de coordonnées (5/3 , 1). Elle traverse ensuite une case noire jusqu'au point de coordonnées (2 , 6/5). Le projeté du deuxième segment dans une case noire a donc pour longueur $2 – 5/3 = 1/3$. La somme des longueurs des projetés des segments d'une demi-diagonale qui sont dans une case noire est alors égale à $1 + 1/3 = 4/3$, d'où 8/3 pour la diagonale complète. La somme des longueurs des projetés des segments d'une diagonale qui sont dans une case blanche est égale à $5 – 8/3 = 7/3$. Le rapport L2 /L1 est donc égal à 7/8.

Si on ne projette pas sur l'axe des x, on trouve une longueur de la diagonale égale à $\sqrt{34}$, dont une longueur $8\sqrt{34}/15$ dans le noir et $7\sqrt{34}/15$ dans le blanc, d'où un rapport égal à 7/8.

Pour une grille avec 5 lignes et 7 colonnes, la diagonale montante (D), a pour équation $y = 5x / 7$.
En partant de O elle traverse d'abord une case noire jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite d'équation $x = 1$: le projeté du premier segment dans une case noire a donc pour longueur 1. Ensuite la diagonale traverse une case blanche jusqu'au point de coordonnées (7/5 , 1). Elle traverse ensuite une case noire jusqu'au point de coordonnées (2 , 10/7). Le projeté du deuxième segment dans une case noire a donc pour longueur $2 – 7/5 = 3/5$. Ensuite (D) traverse une case blanche jusqu'au point de coordonnées (14/5 , 2), puis une case noire jusqu'au point de coordonnées (3 , 15/7). Le projeté du troisième segment dans une case noire a donc pour longueur $3 – 14/5 = 1/5$. La demi-diagonale se termine dans une case blanche.
La somme des longueurs des projetés des segments d'une demi-diagonale qui sont dans une case noire est donc égale à $1 + 3/5 + 1/5 = 9/5$, d'où 18/5 pour la diagonale complète. La somme des longueurs des projetés des segments d'une diagonale qui sont dans une case blanche est égale à $7 – 18/5 = 17/5$. Le rapport L2 /L1 est donc égal à 17/18.

Si on ne projette pas sur l'axe des x, on trouve une longueur de la diagonale égale à $\sqrt{74}$, dont une longueur $18\sqrt{74}/35$ dans le noir et $17\sqrt{74}/35$ dans le blanc, d'où un rapport égal à 17/18.

3) *Généraliser la première question à une grille $a \times b$ avec a et b entiers impairs sans diviseur commun autre que 1.*

Puisque a et b sont impairs les quatre cases aux coins de la grille sont noires donc les deux diagonales sont équivalentes. Puisque a et b sont sans diviseur commun autre que 1, une diagonale ne passe par aucun point à coordonnées entières autre que ses extrémités.
Considérons une grille avec a lignes et b colonnes.
Une diagonale coupe $a – 1$ fois une droite horizontale de la grille et $b – 1$ fois une droite verticale donc $a + b – 2$ fois une droite. Par suite elle traverse $a + b – 1$ cases. A chaque changement de case il y a changement de couleur. Comme les deux cases aux extrémités sont noires, il y a une case blanche de moins donc N cases noires et $B = N – 1$ cases blanches. De $2N – 1 = a + b – 1$ on déduit $N = (a + b) / 2$ et $B = (a + b) / 2 – 1$.

4) *Conjecturer une généralisation de la deuxième question pour une grille $a \times b$ avec a et b entiers impairs sans diviseur commun autre que 1.*

Pour une grille 3×5 le rapport $L2 \div L1$ vaut 7/8 : on remarque qu'il y a 8 cases noires et 7 cases blanches dans la grille.
Pour une grille 5×7 le rapport $L2 \div L1$ vaut 17/18 : on remarque qu'il y a 18 cases noires et 17 cases blanches dans la grille.
On peut aussi calculer ce rapport pour une grille ayant une ligne et un nombre impair de colonnes :
pour a = 1 et b = 2n + 1 on obtient un rapport $L2 \div L1$ égal à n/(n + 1) ; on remarque qu'il y a n + 1 cases noires et n cases blanches dans la grille.
On peut donc conjecturer que pour une grille $a \times b$, qui possède (ab + 1)/2 cases noires et (ab – 1)/2 cases blanches, le rapport $L2 \div L1$ vaut $\frac{ab-1}{ab+1}$. La démonstration qui suit est trop difficile pour être demandée au Tournoi.

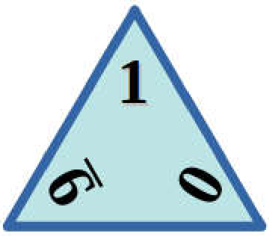
Soit une grille ayant a lignes et b colonnes avec a < b. La diagonale (D) a pour équation y = a x / b.
Les segments de (D) qui sont dans une case noire sont de trois sortes : N1 joignent les deux côtés verticaux de la case noire, le segment se projette alors sur un segment de longueur 1, N2 joignent le côté vertical gauche au côté horizontal supérieur et N3 joignent le côté horizontal inférieur au côté vertical droit.
Par symétrie par rapport au centre de la grille le troisième cas devient le deuxième, donc N2 = N3. Comme de plus N2 + N3 = a – 1, puisque chaque intersection de (D) avec une droite horizontale est une extrémité d'un segment des types 2 ou 3, on a N2 = N3 = (a – 1)/2. Comme le nombre de cases noires traversées par (D) est (a + b)/2 on en déduit N1 = (a + b)/2 – (a – 1) = (b - a)/2 + 1.
Grâce à la symétrie qui échange les types 2 et 3, il suffit de calculer la somme des longueurs des projections sur l'axe des abscisses des segments du type 2. Notons (x, ax/b) et (b y/a , y) les coordonnées des extrémités d'un tel segment.
La projection du segment a pour longueur b y/a – x = (by – ax)/a avec $1 \leq by - ax \leq a - 1$.
Puisque a et b sont impairs, (by – ax) a la parité de y – x, donc est impair puisque x et (y – 1) ont la même parité du fait que la case ou se trouve le segment est noire et a comme sommet inférieur gauche le point de coordonnées (x , y-1).
Les (by – ax) sont deux à deux distincts : l'égalité by – ax = by' – ax' entraîne b(y – y') = a(x – x') et comme a et b sont premiers entre eux, a divise y – y' qui est donc nul.
Les (by – ax) sont au nombre de (a – 1)/2, donc ils prennent toutes les valeurs impaires entre 1 et a – 1.
La somme des projections des segments du type 2 est donc égale à : $\sum_{k=1}^{(a-1)/2} (\frac{2k-1}{a}) = \frac{(a-1)^2}{4a}$.

Par symétrie, c'est la même pour les segments du type 3 donc la somme des projections des segments de (D) qui sont dans une case noire vaut : $(\frac{b-a}{2} + 1) + 2\ \frac{(a-1)^2}{2a} = \frac{ab+1}{2a}$.

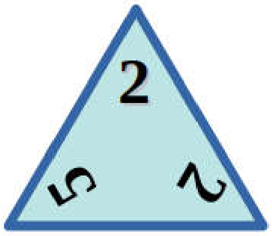
La longueur de la projection de la diagonale valant b, cela fait $b - \frac{ab+1}{2a} = \frac{ab-1}{2a}$ pour les cases blanches et donc le rapport $L2 \div L1$ est égal à $\frac{ab-1}{ab+1}$ qui est aussi égal au quotient du nombre de cases blanches de la grille (égal à (ab - 1)/2) par le nombre de cases noires (égal à (ab + 1)/2).

Jeu de triminos

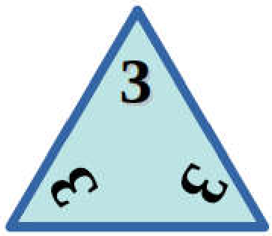
Dans ce jeu de triminos, chaque trimino est un triangle équilatéral sur lequel chaque sommet porte un chiffre entre 0 et 9. Il y a des triminos simples, doubles et triples :



trimino simple
trois chiffres différents

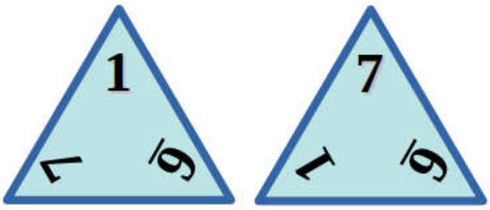


trimino double
deux chiffres égaux

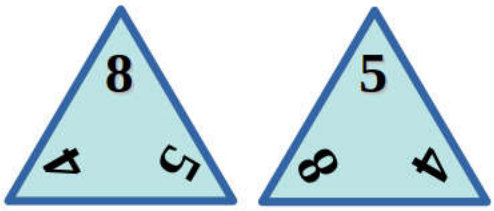


trimino triple
trois chiffres égaux

Deux triminos sont identiques s'ils portent exactement les mêmes chiffres et si on peut passer de l'un à l'autre en le faisant tourner :



Deux triminos différents



Deux triminos identiques

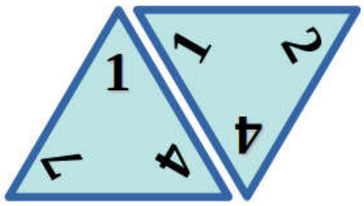
1) *Dans le jeu de triminos, tous les triminos existant sont présents en un seul exemplaire.*
Combien y a-t-il de triminos simples ? de triminos doubles ? de triminos triples ?

Pour former un trimino simple, il faut choisir un triplet ordonné de 3 chiffres distincts que l'on placera par exemple en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre : il y a $10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités. Mais chaque trimino simple va être obtenu 3 fois puisqu'il a 3 façons de choisir le premier chiffre du trimino à partir duquel on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Le nombre de triminos simples est donc égal à <u>240</u>.

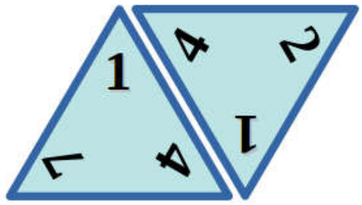
Pour un trimino double, il suffit de choisir le chiffre qui figure deux fois puis le chiffre qui figure une fois. Il y a $10 \times 9 = 90$ possibilités donc le nombre de triminos doubles est égal à <u>90</u>.

Il y a clairement <u>10</u> triminos triples.

2) *Dans le jeu, on doit placer les triminos sur la table de sorte que deux sommets du trimino à poser coïncident avec deux sommets d'un trimino déjà placé :*



Assemblage autorisé



Assemblage interdit

Au début de la partie, une pièce du trimino est placée sur la table.
A-t-on davantage de chances de pouvoir jouer si c'est un trimino simple, double ou triple ?

Dans la suite on écrit un trimino en énonçant ses chiffres en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre (il y a trois possibilités pour les triminos simples et doubles).

Prenons par exemple le trimino simple (0, 1, 2). Contre lui on peut placer un trimino du type (1, 0, x), il y en a 10, ou bien un trimino du type (2, 1, x), il y en a 10, ou bien un trimino du type (0, 2, x), il y en a 10. Mais le trimino (1, 0, 2) a été compté 3 fois. Cela fait donc 30 – 2 = 28 triminos possibles.

Prenons par exemple le trimino double (0, 0, 1). Contre lui on peut placer un trimino du type (0, 0, x), il y en a 9 car le trimino (0, 0, 1) ne figure qu'une fois dans le jeu, ou bien un trimino du type (1, 0, x), il y en a 9 également, ou bien un trimino du type (0, 1, x), il y en a 9 également. Mais le trimino (0, 1, 1) a été compté 2 fois. Cela fait donc 27 – 1 = 26 triminos possibles.

Prenons par exemple le trimino triple (0, 0, 0). Contre lui on doit placer un trimino du type (0, 0, x) différent de (0, 0, 0), il y en a 9. Cela fait donc 9 triminos possibles.

C'est donc pour un trimino simple qu'on a le plus de chances de pouvoir jouer.

3) *En plaçant six triminos ensemble, on peut former un hexagone.*
Combien existe-t-il d'hexagones contenant un trimino triple (en respectant la règle d'assemblage pour le jeu), le trimino triple étant placé en haut de l'hexagone ?

Il y a tout d'abord 10 choix pour le trimino triple. Choisissons (0, 0, 0).
A sa gauche et à sa droite, on doit placer deux triminos (0, 0, x) distincts et différents de (0, 0, 0), il y a $9 \times 8 = 72$ possibilités. Choisissons par exemple le 1 pour le trimino à gauche et le 2 pour le trimino à droite. La moitié haute de l'hexagone est donc choisie.
Ensuite sous le trimino (0, 0, 1) à gauche, on doit placer un trimino (1, 0, x) avec x différent de 0 ; sous le trimino (0, 0, 2) à droite, on doit placer un trimino (0, 2, y) avec y différent de 0. On termine en plaçant le trimino (0, y, x) tout en bas.
Premier cas, x = 1 : comme y doit alors être différent de 1, puisque le trimino (0, 1, 1) ne figure qu'une fois, y doit au moins être égal à 2, cela fait 8 possibilités pour y.
Deuxième cas, x = 2 : comme y doit alors être différent de 1 et de 2, y est au moins égal à 3, cela fait 7 possibilités pour y.
Troisième cas, x est au moins égal à 3 : comme y doit être au moins égal à 1, cela fait 7 possibilités pour x et 9 pour y, donc 63 pour le couple (x, y).

Le nombre d'hexagones contenant le trimino triple (0, 0, 0) est égal à $72 \times (8 + 7 + 63) = 72 \times 78 = 75^2 - 3^2 = 5625 - 9 = 5616$ et le nombre d'hexagones contenant un trimino triple est égal à <u>56160</u>.

Pour ceux qui ne connaissent pas la règle, le carré de 75 se calcule de tête en calculant le produit de 7 par 7+1=8 et en lui juxtaposant 25.

Rien que des 20

On considère la famille constituée des nombres entiers 20, 2020, 202020, 20202020, 2020202020, … et plus généralement par une succession de 20 dans son écriture décimale.

1) *Quels sont les diviseurs communs à l'ensemble des nombres de cette famille ?*

Les diviseurs communs à l'ensemble des nombres de cette famille sont les diviseurs de 20, c'est-à-dire 1, 2, 4, 5, 10 et 20.

2) *Pour quels entiers n inférieurs ou égaux à 10 au moins un nombre de cette famille est divisible par n ?*

Il y a d'abord les diviseurs de 20 inférieurs ou égaux à 10 : 1, 2, 4, 5 et 10.
Il y a aussi 3 et 6 qui divisent 202020 ainsi que 9 qui divise 202020202020202020 (20 est répété 9 fois).
Il y a enfin 7 qui divise $202020 = 7 \times 28860$.
Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 et 10 divisent au moins un nombre de la famille.

Pour quels entiers n inférieurs ou égaux à 10 aucun nombre de cette famille n'est divisible par n ?

8 est le seul entier inférieur ou égal à 10 qui ne divise aucun nombre de cette famille. En effet 8 divise 1000, donc tous les multiples de 1000, mais il ne divise pas 20.

3) *Généralisation.*
Quels sont les entiers n pour lesquels au moins un nombre de cette famille est divisible par n ?

Montrons que si $n = d \times m$ avec d diviseur de 20 et m divisible ni par 2 ni par 5 alors n divise au moins un nombre de la famille.
Pour cela considérons les nombres qui s'écrivent 100^k et divisons-les par 99m. Comme il y a une infinité de k et un nombre fini de restes possibles pour une division par 99m, il existe $k_1 < k_2$ tels que 100^{k_1} et 100^{k_2} ont le même reste dans la division par 99m. Le nombre $100^{k_2} - 100^{k_1}$ est alors divisible par 99m.
Le nombre $100^{k_2-k_1} - 1 = 999 \ldots 999$, où 99 est répété $k_2 - k_1$ fois, l'est donc aussi.
Par suite m divise 101010…101 (avec $k_2 - k_1$ fois le chiffre 1) donc $n = d \times m$ divise 202020…2020 où 20 est répété $k_2 - k_1$ fois.

Quels sont les entiers n pour lesquels aucun nombre de cette famille n'est divisible par n ?

Les entiers n qui ne s'écrivent pas $n = d \times m$ avec d diviseur de 20 et m divisible ni par 2 ni par 5 sont les entiers n qui sont multiples de 8 ou qui sont multiples de 25.
On a déjà vu qu'un entier multiple de 8 n'est pas dans la famille.
C'est le cas aussi pour un multiple de 25 puisque les multiples de 100 sont divisibles par 25 mais 20 ne l'est pas. Les entiers n pour lesquels aucun nombre de cette famille n'est divisible par n sont les multiples de 8 et les multiples de 25.