Corrigé collège 2020

Tournoi

Le mot TOURNOI représente un entier à 7 chiffres : chaque lettre désigne un chiffre différent mais les deux lettres O représentent le même chiffre.
Ces chiffres vérifient les inégalités : T > O > U > R et R < N < O < I.

1) *Quel est le plus petit nombre entier à 7 chiffres s'écrivant ainsi ?*

Commençons par classer toutes les lettres : R < {U et N} < O < {T et I}. On ne peut pas classer U et N entre elles ni T et I entre elles.

Pour obtenir le plus petit nombre TOURNOI on doit prendre R = 0, puis U = 1 et N = 2 (U étant placée à gauche de N c'est U qui vaut 1), puis O = 3, enfin T = 4 et I = 5 (T étant placée à gauche de I c'est T qui vaut 4). Le plus petit nombre s'écrivant ainsi est <u>TOURNOI = 4310235</u>.

2) *Quel est le plus grand nombre entier à 7 chiffres s'écrivant ainsi ?*

On commence par prendre T = 9 et I = 8 (T étant placée à gauche de I c'est T qui vaut 9), puis O = 7, puis U = 6 et N = 5 (U étant placée à gauche de N c'est U qui vaut 6) et enfin R = 4. Le plus grand nombre s'écrivant ainsi est <u>TOURNOI = 9764578</u>.

3) *Dans cette question on n'utilise que des chiffres parmi {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.*
Combien y a-t-il de nombres entiers à 7 chiffres s'écrivant ainsi ?

On pourrait chercher à écrire tous les nombres s'écrivant ainsi avec les chiffres de 1 à 7 mais il est plus rapide de compter les possibilités. Pour écrire TOURNOI il faut choisir six chiffres vérifiant les inégalités imposées. Comme on dispose de sept chiffres, il faut en éliminer un : il y a 7 possibilités.

Il reste alors 6 chiffres qu'il faut classer par ordre croissant : R est le plus petit, U et N sont les deux suivants, il y a deux choix possibles pour dire qui est U et qui est N, le suivant est O et les deux plus grands sont T et I, deux choix possibles pour dire qui est T et qui est I. En définitive cela fait $7 \times 2 \times 2 = 28$ possibilités donc <u>28 nombres</u>.

0 et 2 chacun au moins une fois

Le nombre 2020 appartient à l'ensemble E des entiers s'écrivant uniquement avec les chiffres 0 et 2, chacun au moins une fois. Par convention l'écriture d'un entier ne débute pas par le chiffre 0.

1) Ecrivez par ordre croissant les éléments de E compris entre 20 et 2020.

20, 200, 202, 220, 2000, 2002, 2020

2) *Quel est le nombre d'éléments de E s'écrivant avec 4 chiffres ? 5 chiffres ?*

Le chiffre le plus à gauche ne peut être 0, donc c'est un 2. Pour un entier à 4 chiffres il reste à choisir 3 chiffres, chacun étant égal à 0 ou 2, cela fait $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilités. Mais une ne convient pas, celle où tous les chiffres sont égaux à 2 (le chiffre 0 doit figurer au moins une fois). Il y a donc <u>7 entiers à 4 chiffres</u> dans E.

On fait le même raisonnement pour les entiers à 5 chiffres. Le chiffre le plus à gauche est un 2, il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilités pour les 4 autres chiffres mais une ne convient pas (celle où tous les chiffres sont égaux à 2). Il y a donc <u>15 entiers à 5 chiffres</u> dans E.

3) *Quel est le plus petit élément de E qui est multiple de 7 ?*

Les 5 premiers nombres de E ne sont pas divisibles par 7 mais $2002 = 2 \times 7 \times 143$.
$\underline{2002}$ est le plus petit élément de E divisible par 7.

4) *Quels sont les éléments de E s'écrivant avec 5 chiffres et qui sont multiples de 7 ?*

Puisque 2002 est multiple de 7, 20020 l'est aussi ainsi que $22022 = 20020 + 2002$.
En divisant par 7 les autres nombres de E ayant 5 chiffres on trouve qu'il n'y en a qu'un autre qui est divisible par 7, c'est $20202 = 2 \times 7 \times 1443$.
Il y a donc 3 nombres de E à 5 chiffres qui sont multiples de 7 : $\underline{20020\ ,20202\ ,22022}$.

C'est renversant

1) *Déterminez un nombre entier à 4 chiffres tel qu'en le multipliant par 9, on retrouve ce nombre « écrit à l'envers ».*

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ \times \quad 9 \\ \hline d\,c\,b\,a \end{array}$$

On voit d'abord, pour les chiffres des milliers, que nécessairement a = 1 et d = 9.
Le chiffre b des centaines ne peut être égal qu'à 0 ou 1. S'il était égal à 1, on aurait c = 9, mais cela ne convient pas. On a donc b = 0.
Le nombre $dcba$ étant multiple de 9, la somme de ses chiffres est multiple de 9, donc 9 + c + 0 + 1 est multiple de 9, donc c = 8. Il y a une seule solution : $\underline{abcd = 1089}$.

2) *Déterminez un nombre entier à 4 chiffres tel qu'en le multipliant par 4, on retrouve ce nombre « écrit à l'envers ».*

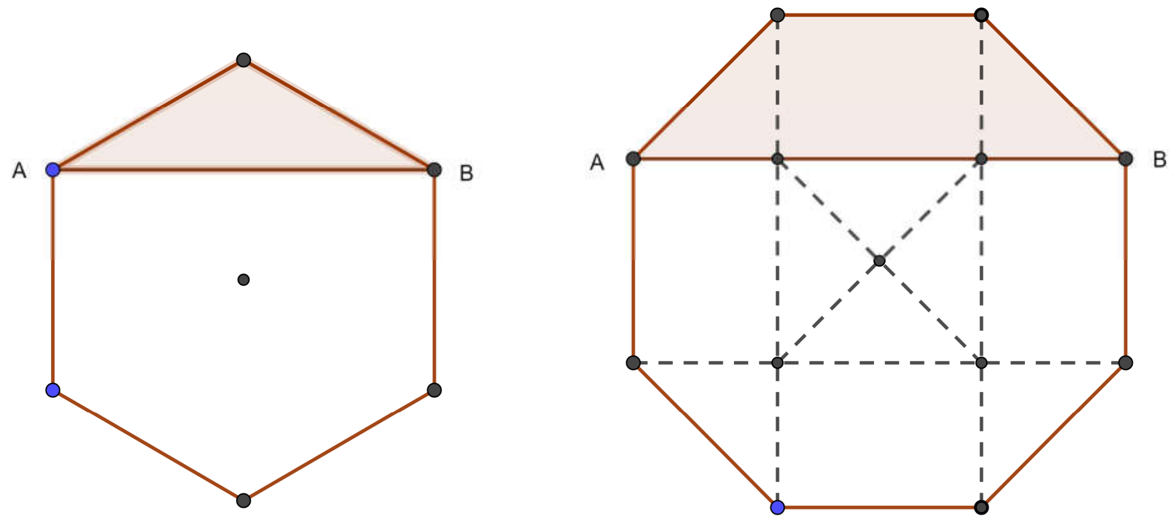
$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ \times \quad 4 \\ \hline d\,c\,b\,a \end{array}$$

Le nombre $dcba$ est multiple de 4, donc a est pair. Comme $a \times 4$ est inférieur à 10, la seule possibilité est a = 2, ce qui entraîne d = 8.
Puisque ba est multiple de 4 avec a = 2, le chiffre b est nécessairement impair. Comme $b \times 4$ est inférieur à 10 (pas de retenue), on en déduit b = 1 et par suite c est au moins égal à 4.
La retenue de $d \times 4 = 32$ est égale à 3, donc seul c = 7 convient. Il y a une seule solution : $\underline{abcd = 2178}$.

La bonne découpe

On a tracé deux polygones réguliers, c'est-à-dire que les côtés ont tous la même longueur et les angles sont égaux : un hexagone (six sommets) et un octogone (huit sommets).

Dans chacun de ces deux polygones on trace une diagonale joignant un sommet A à un sommet B : on partage ainsi le polygone en deux parties (la plus petite est grisée).



Calculez pour chaque polygone le rapport des aires de ces deux parties (la plus grande divisée par la plus petite). Pour aider, dans le cas de l'octogone, on a tracé d'autres segments en pointillés mais vous pouvez utiliser une autre méthode.

1) Notons O le centre de l'hexagone et C le troisième sommet du triangle grisé. Le triangle OAC est équilatéral puisque le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone a même longueur que le côté de l'hexagone. L'aire de l'hexagone est égale à six fois l'aire du triangle équilatéral OAC.

Le triangle ABC est isocèle et son angle C mesure 120°, ses angles A et B mesurent donc 30°.
La hauteur issue de C du triangle ABC le partage en deux triangles rectangles qui réassemblés forment un triangle équilatéral de côté AC qui a même aire que le triangle équilatéral OAC. L'aire de l'hexagone est donc égale à six fois l'aire du triangle ABC.
On en déduit que le rapport des aires (la plus grande divisée par la plus petite) est <u>égal à 5</u>.

2) La partie hachurée dans l'octogone est formée d'un rectangle (R) et de deux triangles rectangles isocèles (T). Par symétrie, l'octogone est constitué de quatre rectangles (R), de quatre triangles rectangles isocèles (T) et d'un grand carré central (C). Ce grand carré central est découpé en quatre triangles rectangles isocèles de même aire que (T) puisque leur hypothénuse a pour longueur le côté de l'octogone.

L'aire de l'octogone est donc égale à quatre fois l'aire du rectangle (R) plus huit fois l'aire du triangle rectangle isocèle (T), donc à quatre fois l'aire de la partie hachurée.
On en déduit que le rapport des aires (la plus grande divisée par la plus petite) est <u>égal à 3</u>.