Irem de Limoges : liaison math-physique

Valeur moyenne - valeur efficace

Un groupe de l'IREM de Limoges s'est intéressé à la liaison math-physique dans les sections STI, en première et terminale.
Dans ces sections le programme de physique est centré sur l'étude des différents fonctionnements des moteurs électriques et sur leurs diverses alimentations par un courant continu ou variable périodique. Les notions de valeur moyenne et de valeur efficace apparaissent dès la première et jouent un rôle fondamental. Par contre les programmes de mathématiques de ces sections n'envisagent la notion de valeur moyenne uniquement en terminale. La notion de valeur efficace n'étant évoquée qu'en exercice avec rappel de la formule.
On propose ici pour la terminale une présentation classique en mathématique de la valeur moyenne, à partir de l'intégrale, en y adjoignant la définition de la valeur efficace. Comme application il est proposé aux élèves de calculer les valeurs exactes des cas particuliers mesurés en physique. En première on choisit la même démarche que celle suivie en terminale. L'intégrale n'étant pas au programme, elle est remplacée par la notion d'aire algébrique sous la courbe pour la valeur moyenne et par la notion de volume du solide de révolution engendré par la courbe pour la valeur efficace.
En section S bien que les programmes de physique ne fassent qu'effleurer ces notions ; la partie mathématique est adaptable et les mesures peuvent être faites en physique brièvement pour valider les calculs.

I - Valeur moyenne

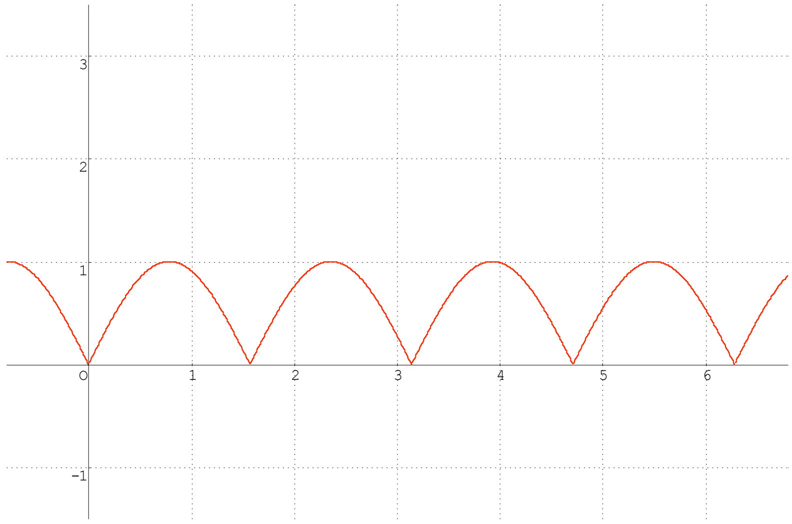
1) Terminale

En mathématiques, le cours sur l'intégrale étant fait et la définition de la valeur moyenne étant donnée, on précise la définition de la valeur moyenne m d'une fonction f périodique, de période T, par la formule : $m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$

Voici des exemples d'activités proposées :

Dans la suite A sera toujours un nombre strictement positif.

Activité 1

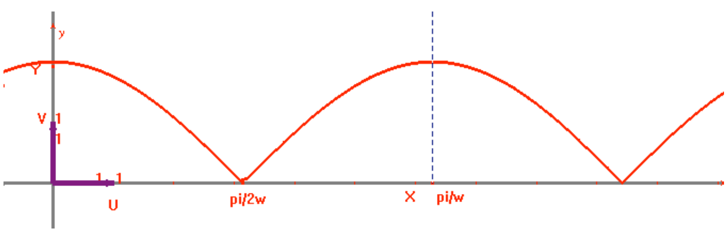


1) Voici la courbe C_1 , représentation graphique de la fonction f_1 , définie par $f_1(t) = |A \sin \omega t|$. Lire l'amplitude et la période.

2) A partir de C_1 dessiner C_2 (en pointillé), représentation graphique de la fonction f_1 , définie par $f_2(t) = A \sin \omega t$. Lire la période de f_2 , puis calculer sa pulsation.

3) Lire la valeur moyenne de f_1 puis calculer cette valeur moyenne..

Activité 2 : Calcul de la valeur moyenne de la fonction définie par y = $|A \cos \omega t|$



La période est $T = \frac{\pi}{\omega}$. On considère A>0, la valeur moyenne est $m = \frac{1}{T}\int_0^T A\left|\cos\omega t\right|dt$.

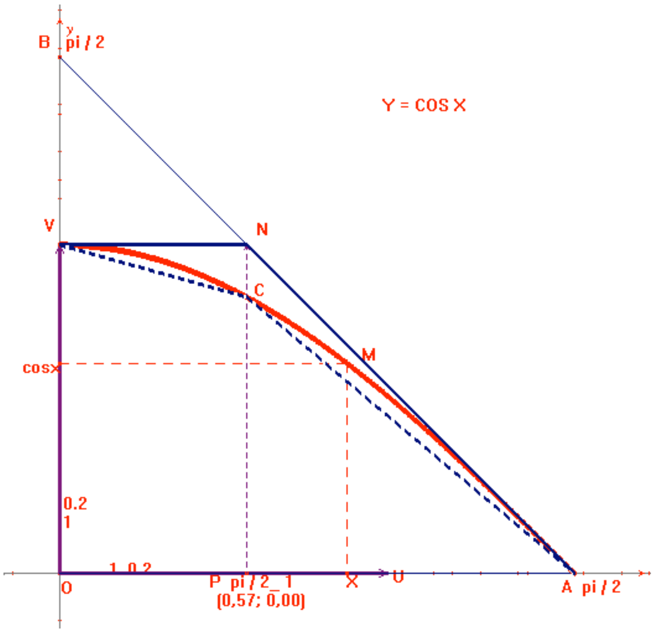
D'où $m = \frac{A}{T}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\cos\omega t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\cos\omega t\,dt\right]$; $m = \frac{A}{\pi}\left([\sin\omega t]_0^{\frac{\pi}{2\omega}} - [\sin\omega t]_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\right)$;

$m = \frac{A}{\pi}(1+1) = \frac{2A}{\pi}$.

2) Première

a) Encadrement de la valeur moyenne de la fonction définie par y = I cos ωt I

Soit m la valeur moyenne



Aire(OVCA) $< m\frac{\pi}{2} <$ Aire (OVNA)

Aire(OVCP) + Aire(PCA) $< m\frac{\pi}{2} <$ Aire (OVNA)

$$\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}-1\right) < m\frac{\pi}{2} < \frac{\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}}{2}$$

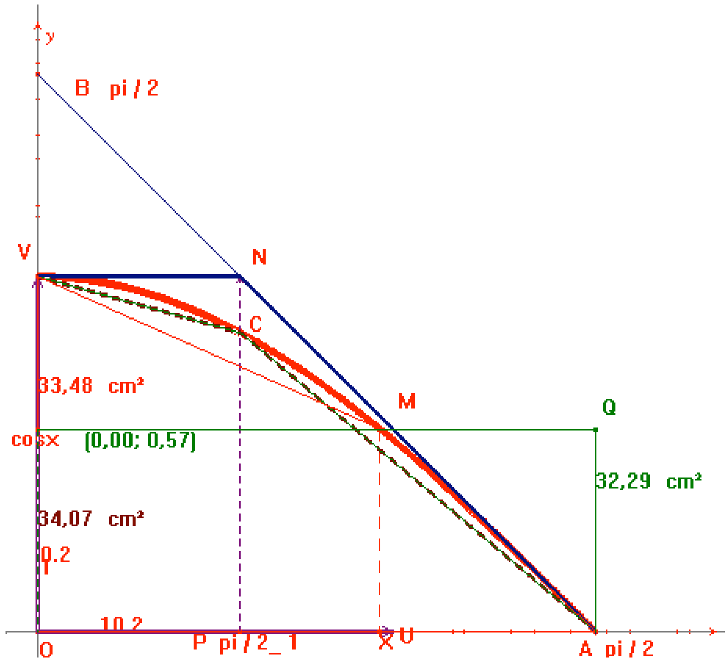
1 ,84 x0,57 +0,84< mπ < 2,15

D'où $\frac{1,88}{\pi} < m < \frac{2,15}{\pi}$

Remarque : En terminale on obtient m = $\frac{2}{\pi}$

ERREURS relatives : 0, 12 /2 =6% et 0, 15 / 2 = 7,5 %

b) Optimisation de l'estimation de la valeur moyenne de y = I cos x I



Le point M a pour coordonnées (x, cos x).

En déplaçant le point M sur la sinusoïde on peut, grâce à un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la position de M qui rend maximale l'aire A(x) du polygone OVMA.

Démonstration de la conjecture

$$A(x) = \frac{1}{2}\left((1+\cos x)x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\cos x\right)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\sin x\right)$$

A' (x) est nul quand sin x = $\frac{2}{\pi}$, soit x ≈ 40° ou x ≈ 0.70 rad.

Enfin on trouve $\frac{1{,}9}{\pi} < m < \frac{2{,}15}{\pi}$

Physique

En physique on réalise un circuit alimenté par un courant sinusoïdal on y intègre un pont de diode et on obtient un courant redressé bi-alternance .Le signal observé aux bornes d'un oscilloscope est modélisé par les fonctions mathématiques étudiées ci-dessus. On mesure la valeur moyenne de ce signal avec un voltmètre numérique en position DC

II - Valeur efficace

A - Définition de la valeur efficace d'une fonction périodique (en terminale)

1 - Mathématique

a) **Définition** : La valeur efficace d'une fonction f de période T est le rayon r du cylindre qui a le même volume et la même hauteur T que le solide engendré par la rotation du graphique de f autour de l'axe des abscisses.

b) **Expression de la valeur efficace r**

$$\pi r^2 T = \int_0^T \pi f^2(t)\,dt \quad \text{d'où} \quad r^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt$$

2 - Physique

a) Définition

La tension efficace d'un courant périodique est la tension d'un courant continu qui dissipe, dans la même résistance pendant une période, la même énergie.

b) Expression de la valeur efficace.

L'énergie W transportée par un courant continu de tension constante U pendant une période T est :

$$W = \frac{U^2}{R}T$$

D'autre part l'énergie W' transportée par un courant de tension variable u (t) pendant une période T est :

$$W' = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R}\,dt$$

Pour déterminer la valeur efficace on égale ces deux énergies :

$$\frac{U^2}{R}T = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R}\,dt \quad \text{d'où} \quad \mathbf{U^2} = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt$$

Ces deux définitions sont donc concordantes.

B - Exemples de calculs et mesures de valeur efficace de tension de signaux périodiques

1 - Calcul de la valeur efficace r de la fonction définie par : y = A cos wt

Période T = $\frac{2\pi}{\omega}$

$r^2 = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \cos^2 \omega t dt$ or $2\cos^2 \omega t = \cos 2\omega t + 1$

donc $r^2 = \frac{A^2\omega}{4\pi}\left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} + t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{A^2}{2}$ donc $r = \frac{A}{\sqrt{2}}$

2 - Calcul de la valeur efficace r de la fonction définie par : y = A Icos wt I

Période T = $\frac{\pi}{\omega}$; on trouve r = $\frac{A}{\sqrt{2}}$

3 - Calcul de la valeur efficace r' d'un courant triangulaire d'amplitude A

On trouve r' = $\frac{A}{\sqrt{3}}$

Mesure

En physique on mesure la valeur efficace avec un voltmètre numérique RMS en position AC+DC.

<u>Première</u>

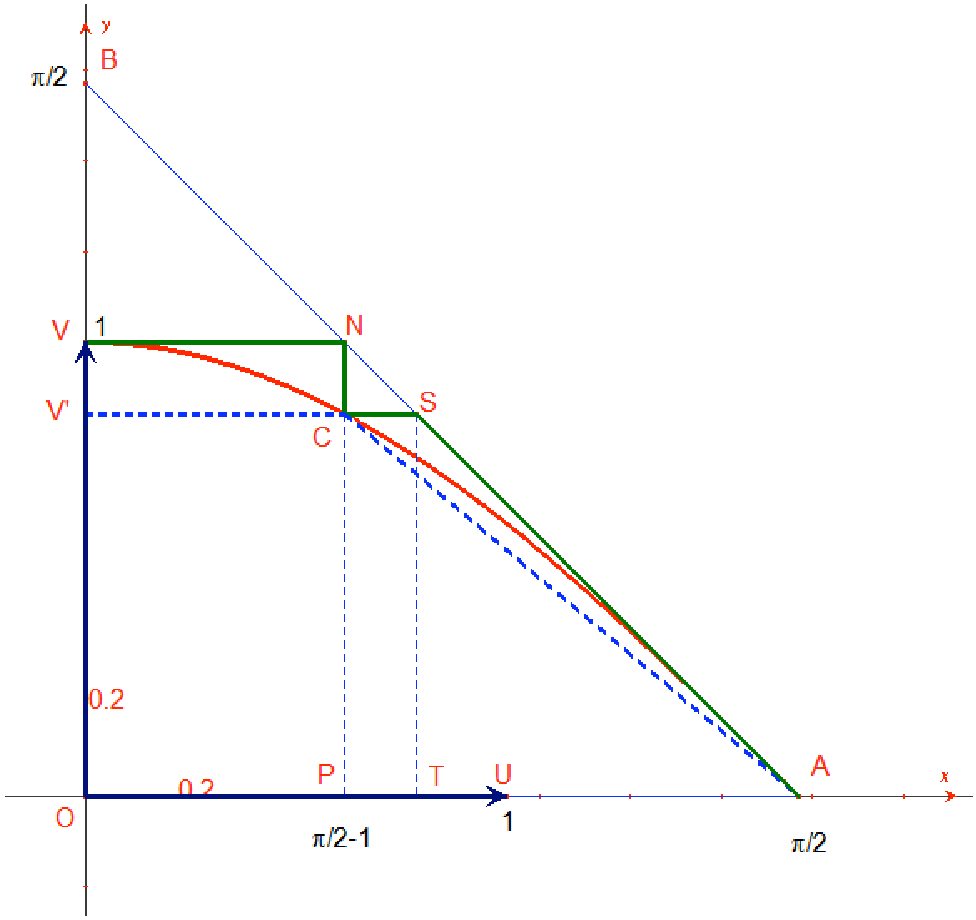
Physique :

Même mesure qu'en terminale

Mathématique :

Les élèves ne disposent pas du calcul intégral ils devront encadrer le solide de révolution par des figures formées de cônes et (ou) de cylindres.

4 - Calcul d’un encadrement de la valeur efficace de la fonction définie par : y = A Icos wt I



Les deux fonctions définies par y= cos x et y = $|\cos x|$ ont sur leur période la même valeur efficace.

Equation de la droite (AB) : y = -x + $\frac{\pi}{2}$.

Coordonnées de C $\left(\frac{\pi}{2}-1\ ;\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)$, soit en valeurs approchées C(0,57 ; 0,84).

Coordonnées de S en valeurs approchées : S(0,73 ; 0,84)

D’où les longueurs :

CS = 0,73 – 0,57 = 0,16

TA = TS = 0,84

Pour obtenir **la valeur approchée par excès r de la valeur efficace**, on utilise la ligne brisée verte au dessus de la sinusoïde : on la fait tourner autour de l’axe des abscisses. Le volume V_1 engendré par sa rotation se décompose en un cylindre engendré par le rectangle OVNP, un cylindre engendré par le rectangle PCST et un cône engendré par triangle TSA.

$$V_1 = \pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \pi \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)(0{,}16) + \frac{\pi}{3} \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

D'où $r^2 \frac{\pi}{2} = 0{,}57 + (0{,}84^2)(0{,}16) + 0{,}2$

$r^2 = (0{,}89)\left(\frac{2}{\pi}\right)$

$r^2 = 0{,}57$

$r = 0{,}75$

Pour obtenir **la valeur approchée par défaut S de la valeur efficace**, on utilise la ligne brisée bleu au dessous de la sinusoïde : on la fait tourner autour de l'axe des abscisses. Le volume V_2 engendré par sa rotation se décompose en un cylindre engendré par le rectangle OPCV' et un cône engendré par le triangle TSA.

$$\pi \; s^2 \frac{\pi}{2} = \pi (0{,}84)^2 + \frac{\pi}{3} (0{,}84)^2 (1).$$

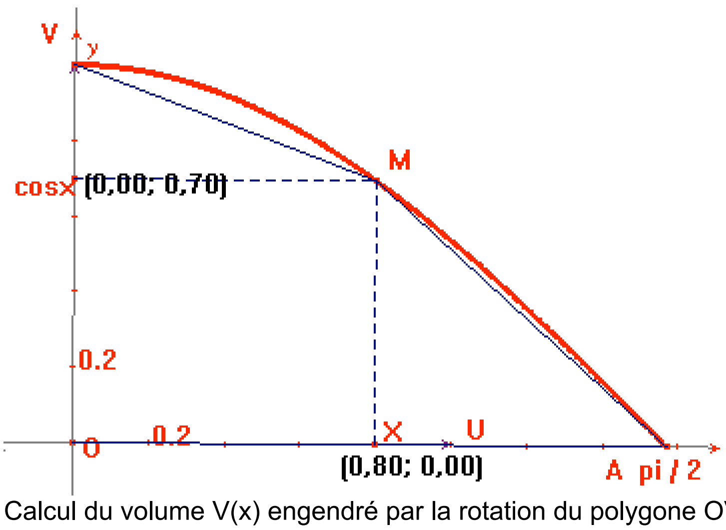
$s^2 = 0{,}44$ et $s = 0{,}68$.

CONCLUSION

La valeur efficace de la fonction définie par($y = |\cos x|$) est comprise entre 0,68 et 0,75

Erreur relative environ 6%

Valeur approchée par défaut en utilisant le calcul d'un volume de tronc de cône.



Calcul du volume V(x) engendré par la rotation du polygone OVMA autour de l'axe des abscisses

$$V(x) = V(OVMX) + V(XMA) = \frac{\pi}{3}\left(x + x\cos x + \frac{\pi}{2}\cos^2 x\right)$$

Le calcul du volume V(OVMX) utilise la formule qui donne le volume d'un tronc de cône ; pour le détail voir la démonstration de cette formule en annexe.

Remarque : $V'(x) = \frac{\pi}{3}(1 - x\sin x + \cos x - \pi \sin x \cos x)$

Recherche de la position de M qui détermine la meilleure approximation par défaut du volume engendré par la rotation de l'arc de sinusoïde autour de l'axe des abscisses :

Pour cela on doit d'abord chercher une valeur de x qui annule v'(x) mais on ne sait pas résoudre de manière précise V'(x) = 0

Cependant on peut calculer V' (π / 6) et V' (π / 4) qui sont de signes contraires.

V' étant une fonction continue de x, l'équation V'(x) = 0 a au moins une solution comprise entre π / 6 et π / 4 . On peut préciser cette solution par tâtonnements successifs (dichotomie).

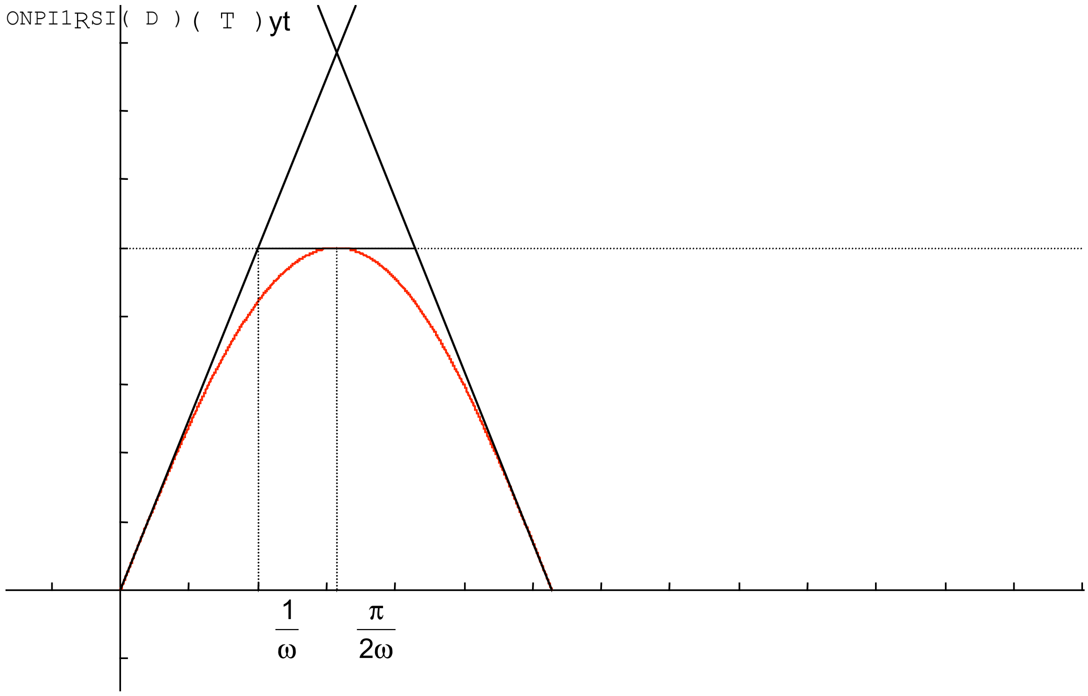
Cette solution est environ 0,61 rad ou 34,87 degrés

Un logiciel de géométrie dynamique peut guider les conjonctures pour ce travail.

5 - Approximation de la valeur efficace r de la fonction f : f(t) = A sin _ t ou f(t) = I A sin _ t I

a) Valeur approchée par excès

On remplaçant l'arc de sinusoïde par une ligne brisée formée de deux segments.



Equation de la tangente T au point O : $y = A\ \omega\ t$

Coordonnées de R intersection de T et de D (y = A). $R\left(\frac{1}{\omega}\ ;\ A\right)$

Volume V_1 du cône engendré par la rotation du triangle O R I_1 autour de (O t)

$$V_1 = \frac{\pi A^2}{3\ \omega}$$

Volume V_2 du cylindre engendré par la rotation du rectangle R N P I_1 autour de (O t)

$$V_2 = \pi \left(\frac{\pi - 2}{2\ \omega}\right) A^2$$

Volume V du solide S engendré par la rotation du trapèze O R N P autour de (O t)

$$V = V_1 + V_2 = \pi \left(\frac{3\pi - 4}{6\ \omega}\right) A^2$$

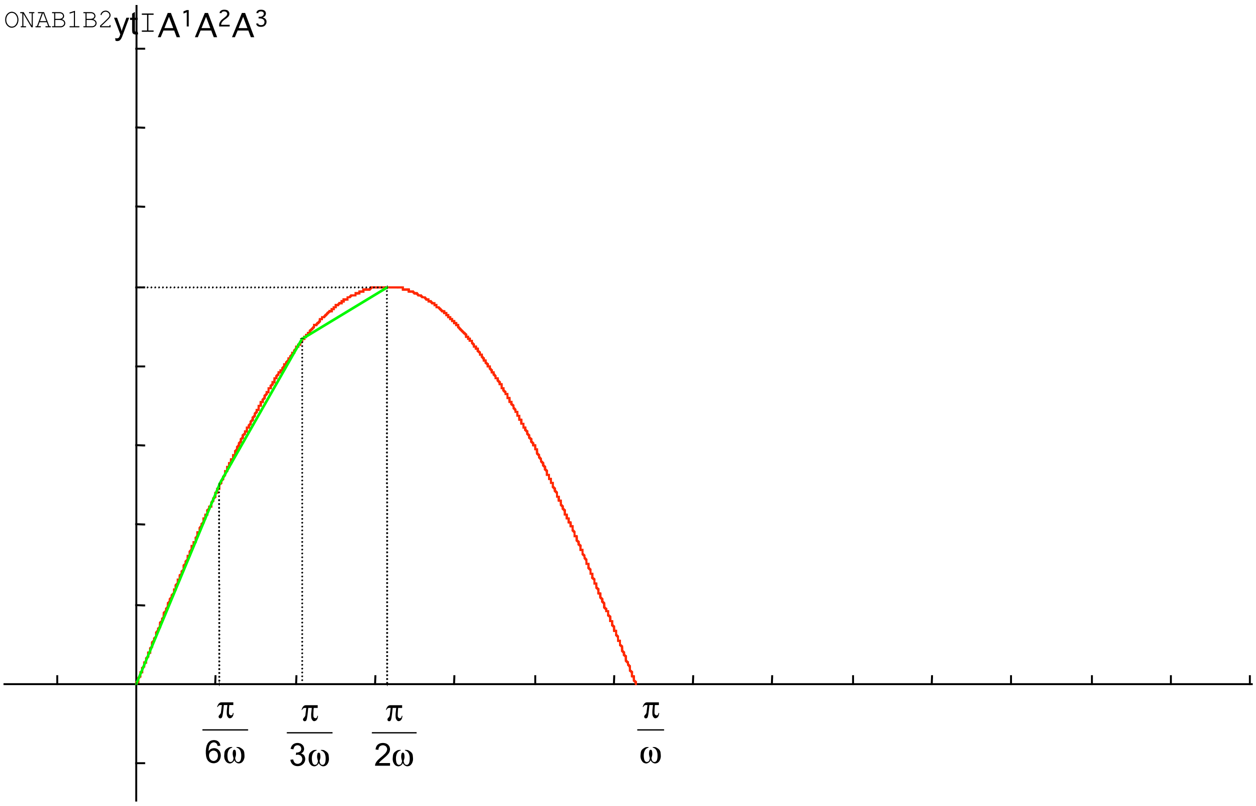
Le rayon r ' du cylindre de même hauteur et de même volume que le solide S vérifie

$$r'^2 \times \frac{\pi}{2\ \omega} \times \pi = V \qquad r'^2 = A^2 \left(\frac{3\pi - 4}{3\pi}\right) \qquad \text{d'où} \qquad r \approx \underline{0,76\ A}$$

<u>Remarque</u> : La valeur efficace exacte est $\frac{1}{\sqrt{2}} A \approx 0,707\ A$ (erreur : environ 7 %)

b) Valeur approchée par défaut

On remplaçant l'arc de sinusoïde par une ligne brisée formée par 3 segments dont les projetés sur l'axe des abscisses ont la même longueur :



Ordonnée de B_1 : $y_1 = A \sin \frac{\omega\, \pi}{6\, \omega} = \frac{A}{2}$

Ordonnée de B_2 : $y_2 = \frac{A\sqrt{3}}{2}$

<u>Calcul de la valeur efficace r' :</u>

Volume du solide 1 (cône) : $V_1 = \frac{\pi^2 A^2}{3 \times 24\, \omega}$

Volume du solide 2 (tronc de cône) : $V_2 = \frac{1}{3} \pi \times \frac{\pi}{6\, \omega} \left(\frac{A^2}{4} + \frac{A^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3\, A^2}{4} \right)$

$$V_2 = \frac{\pi A^2}{3 \times 24\, \omega} (4 + \sqrt{3})$$

Volume du solide 3 (tronc de cône) $V_3 = \dfrac{\pi A^2}{3 \times 24\ \omega} (7 + 2\sqrt{3})$

Volume total du solide S : $V = V_1 + V_2 + V_3 = \dfrac{\pi A^2}{72\ \omega} (12 + 3\sqrt{3})$

Calcul du rayon r’ du cylindre de même hauteur et de même volume que le solide S:

$$\frac{\pi A^2}{72\ \omega} (12 + 3\sqrt{3}) = \pi r'^2 \times \frac{\pi}{2\ \omega}$$

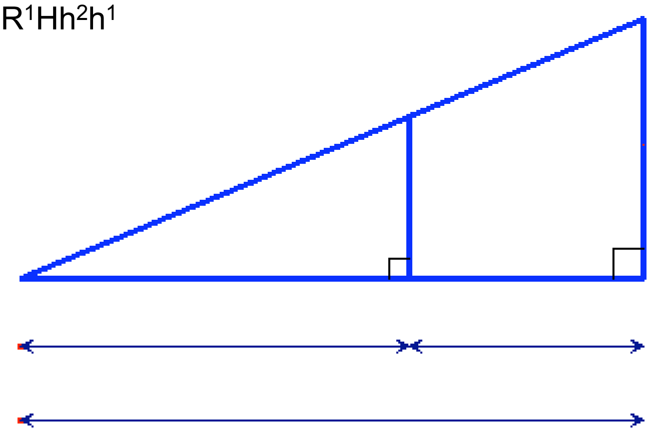
$r' \cup A\sqrt{0{,}478} \cup 0{,}69\ A$

Valeur théorique : $r' = \dfrac{A}{\sqrt{2}} \cup 0.71\ A$

Le pourcentage d’erreur est d’environ 2,3 %.

ANNEXE : Volume d’un tronc de cône

$R^2R^1Hh^2h^1$



$\boxed{H + h_2 = h_1}$ (1)

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$\boxed{h_1 R_2 = h_2 R_1}$ (2)

Volume du tronc de cône :

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R_1^2 h_1 - R_2^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(R_1^2(H + h_2) - R_2^2(h_1 - H)\right) \quad \text{d'apres}(1)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R_1^2 H + R_1^2 h_2 - R_2^2 h_1 + R_2^2 H\right)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R_1^2 H + R_1 R_1 h_2 - R_2 R_2 h_1 + R_2^2 H\right)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R_1^2 H + R_1 R_2 h_1 - R_2 R_1 h_2 + R_2^2 H\right) \quad \text{d'apres}(2)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R_1^2 H + R_1 R_2 H + R_2^2 H\right)$$

Donc $\boxed{V = \frac{\pi H}{3}\left(R_1^2 + R_1 R_2 H + R_2^2\right)}$