L'ETUDE DES FONCTIONS AU LYCEE.

En analyse, l'étude des fonctions est un thème central dans les programmes du lycée, toutes sections confondues. La plupart des problèmes du baccalauréat portent sur ce sujet. C'est un apprentissage de longue haleine où nos élèves rencontrent beaucoup d'obstacles et de difficultés.

Des exemples de fonctions sont présentés dès le collège ainsi que des lectures graphiques. La notion de fonction affine est au programme de la classe de troisième. En seconde, le concept général de fonction est introduit ; cet apprentissage est à consolider et à approfondir tout au long des années de première et de terminale.

Un travail spécifique à la classe de seconde a déjà été réalisé à l'IREM de Limoges. Nous l'avons poursuivi pour les autres niveaux en nous centrant sur certaines difficultés rencontrées par nos élèves :

– Lire et interpréter un résultat sur un graphique.

– Donner du sens à la notion de nombre dérivé d'une fonction en un point et à son interprétation géométrique.

– Faire le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée.

– Etudier le signe d'une fonction dérivée.

– Rédiger un exercice.

C'est pour répondre à ces difficultés d'apprentissage que nous avons construit les activités présentées dans les pages suivantes, pour permettre d'outiller l'enseignant devant l'hétérogénéité du public et la nécessité croissante de différencier son enseignement.

SOMMAIRE

CAPACITÉS REQUISES SUR LA NOTION DE FONCTION

Pour chacune des classes suivantes, seconde, première S, terminale STI, nous avons essayé de définir les capacités requises en fin d'année. Ces documents, distribués aux élèves, nous aident à préciser nos exigences et les aident à préparer les devoirs.

FONCTIONS NUMÉRIQUES
Capacités requises en fin de seconde

A partir de la courbe représentative d'une fonction :

- retrouver son domaine de définition,
- retrouver l'image ou les antécédents d'un nombre,
- dresser son tableau de variation,
- résoudre une équation ou une inéquation.

Calculer l'image ou les antécédents d'un nombre par une fonction.
Réaliser pour une fonction donnée un tableau de valeurs.
Etudier les variations d'une fonction, connaissant les intervalles où elle est monotone.
Utiliser le tableau de variation d'une fonction pour comparer des nombres.
Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.
Connaître les fonctions : $x \mapsto ax + b$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto$ **Erreur !** , leurs variations, leurs courbes.
Caractériser une fonction affine par son taux d'accroissement.
Connaître la représentation graphique des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$.

FONCTIONS NUMERIQUES
Capacités requises en fin de première S

- ***Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique***

- Lire graphiquement l'image, l'antécédent d'un nombre.
- Trouver graphiquement les solutions d'une équation ou d'une inéquation.
- Lire graphiquement le signe d'une fonction.
- Résoudre graphiquement $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.
- Lire graphiquement un nombre dérivé $f'(a)$.
- Lire graphiquement une limite quand une asymptote est tracée.

- ***Etude de fonctions***

- Déterminer le domaine de définition d'une fonction
- Etudier la parité d'une fonction
- Calculer la dérivée d'une fonction à l'aide des théorèmes.
- Etudier le signe d'une dérivée
- Déterminer un extremum d'une fonction à l'aide de sa dérivée
- Déduire du signe de la dérivée le sens de variation d'une fonction
- Dresser le tableau de variation d'une fonction
- Déterminer l'équation d'une tangente
- Justifier l'existence d'une solution de f(x) = □, lorsque x □ [a ; b] sur lequel f est définie, dérivable et strictement monotone.
- Calculer la limite d'une fonction en utilisant les limites des fonctions usuelles, les opérations sur les limites
- Savoir calculer une limite lorsqu'il y a indétermination
- Justifier l'existence d'une asymptote parallèle aux axes.
- Utiliser sa calculatrice pour remplir un tableau de valeurs d'une fonction
- Construire la courbe représentative d'une fonction en utilisant le tableau de variation, les asymptotes, les tangentes,. ..
- Trouver la position d'une courbe par rapport à une droite, par rapport à une autre courbe
- Utiliser un changement de repère pour démontrer les symétries d'une courbe
- Trouver l'équation d'une courbe après changement de repère
- Résoudre des problèmes d'optimisation

FONCTIONS NUMERIQUES
Capacités requises en fin de terminale STI

- **Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique** :

  – Savoir lire l'image et l'antécédent d'un nombre.
  – Savoir résoudre graphiquement f(x) = 0 et f(x) < 0.
  – Savoir trouver le signe de f(x).
  – Savoir dresser le tableau de variation.
  – Savoir résoudre graphiquement f '(x) = 0 et f '(x) < 0.
  – Savoir déterminer le nombre dérivé en un point lorsque la tangente est tracée en ce point.
  – Savoir lire une limite lorsque une asymptote est tracée.

- **Etude des fonctions**
  – Savoir calculer la dérivée d'une fonction, y compris d'une fonction composée.
  – Savoir déterminer le sens de variation d'une fonction à l'aide de sa dérivée.
  – Savoir déterminer un extremum d'une fonction à l'aide de sa dérivée.
  – Savoir écrire l'équation de la tangente en un point donné.
  – Savoir trouver le nombre de solutions de l'équation f(x) = k à l'aide du tableau de variation et donner une valeur approchée de ces solutions.
  – Savoir programmer les valeurs d'une fonction.
  – Savoir tracer la courbe représentative d'une fonction en faisant apparaître les objets rencontrés dans l'étude de cette fonction (asymptotes, tangentes, points remarquables...)

- **Limites**
  – Savoir déterminer la limite d’une fonction aux bornes de son ensemble de définition.
  – Savoir déduire de l’étude des limites les asymptotes éventuelles à la courbe Cf.
  – Savoir justifier l’existence d’une asymptote oblique à la courbe Cf.
  – Savoir déterminer la position d’une courbe par rapport à ses asymptotes.

- **Calcul intégral**
  – Connaître la définition de : « F est une primitive de f sur un intervalle I ».
  – Savoir déterminer les primitives d’une fonction f :
    - dans le cas où f est une somme de fonctions usuelles (lecture inverse du tableau des dérivées)
    - dans le cas où f est la dérivée d’une fonction composée ($u'u^n$, **Erreur !**, **Erreur !**, **Erreur !**, …).
  – Savoir déterminer <u>la</u> primitive d’une fonction f vérifiant une condition donnée.
  – Savoir calculer **Erreur !** f(x) dx et connaître les propriétés des intégrales.
  – Savoir calculer l’aire d’une partie du plan comprise entre l’axe des abscisses et la courbe C_f ou entre deux courbes C_f et Cg.
  – Savoir calculer la valeur moyenne d’une fonction sur un intervalle donné.

Tangente et nombre dérivé.

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
– Considérer la notion de tangente à une courbe en un point comme un problème local et non global. – Associer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe C_f en un point et le nombre dérivé de f en ce point.	– Equations de droites : (pente, représentation graphique) – Tangente à un cercle. – Notion de limite. – Asymptote à une courbe.	– Faire émerger les représentations sur la notion de tangente. – Introduire la notion de tangente en un point comme position limite de sécantes qui tournent autour de ce point. – Définir la pente d'une tangente comme limite de quotients différentiels.

Gestion	Commentaires
<u>Activité 1</u> Durée : 10 à 15 min.	Cette situation est proposée avant toute activité sur la notion de tangente et de nombre dérivé.
– Recherche par groupes de 2 ou 3 élèves.	Pour répondre à la question posée les élèves n'ont comme connaissance que celle de tangente à un cercle, souvent interprétée par une droite qui coupe le cercle en un seul point. Les exemples ont été choisi de manière à faire apparaître des conceptions erronées ou incomplètes. La recherche par groupes permet de régler certains problèmes à l'intérieur même du groupe comme les confusions tangente/ perpendiculaire ou tangente / asymptote.
– Première synthèse : Confrontation des réponses. L'enseignant fait noter les points de désaccords.	Le principal point de désaccord qui apparaît dans la première synthèse concerne les droites qui sont refusées comme tangentes car elles coupent la courbe en plus d'un point.
– Deuxième synthèse (différée) Après l'introduction du concept de nombre dérivé d'une fonction en un point.	L'enseignant précise bien que pour l'instant les élèves ne possèdent pas suffisamment d'éléments pour savoir qui a raison, et ce n'est qu'après la recherche des autres activités que ces désaccords seront de nouveau examinés.

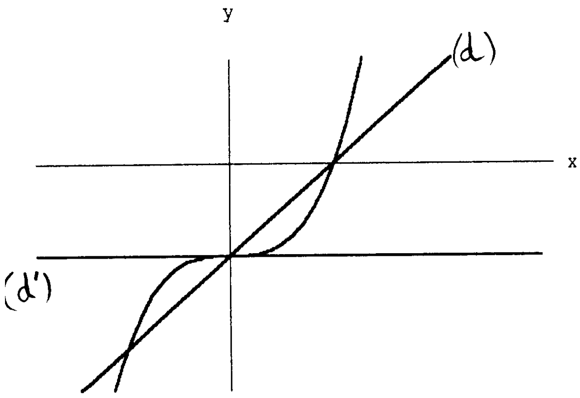
<u>Activité 2 (</u>15 à 20 min.) – Travail individuel – Correction collective En synthèse : introduction de la tangente en A à la courbe comme position limite des sécantes qui tournent autour du point A. <u>Activité 3</u> (10 à 15 min.) – Travail individuel (pour vérifier si la conception géométrique est acquise). <u>Activités 4 et 5</u>(durée variable suivant les classes) – Travail individuel – Correction collective En synthèse : Définitions du coefficient directeur d'une tangente comme limite de quotients différentiels et du nombre dérivé.	Les activités suivantes dépendent de la section et du niveau de la classe. On peut s'appuyer essentiellement sur : –Le cadre géométrique (activités 2 et 3) avec la position limite de sécantes qui tournent autour d'un point. L'utilisation d'un rétroprojecteur avec une ficelle facilite la correction (un logiciel de géométrie ou les calculatrices graphiques également quand c'est possible). –Le cadre numérique (activités 4 et 5) avec la limite d'une suite de quotients différentiels posent plus de problèmes à beaucoup d'élèves, notion de limite et calculs mal maîtrisés. Les obstacles relatifs à cette notion sont nombreux. Plusieurs articles sont parus dans la revue REPERES IREM : Repères IREM n° 34 : « La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ? » M.J. Perrin, IUFM Nord-Pas-De-Calais. Repères IREM n° 24 : « Tangente à une courbe et dérivation » P. Michel, IREM de Strasbourg. Repères IREM n° 25 : « Une approche heuristique de l'analyse » groupe AHA. Repères IREM n° 5 : « Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente » M. Schneider-Gilot, Facultés universitaires de Namur.

TANGENTE ET NOMBRE DÉRIVÉ

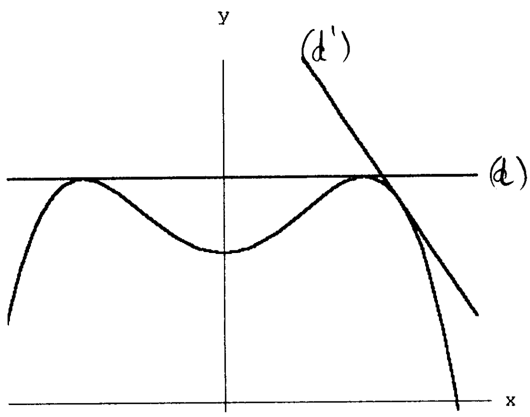
Activité 1 :

Pour chacune des situations suivantes, conjecturer si les droites (d) et (d') sont tangentes à la courbe.

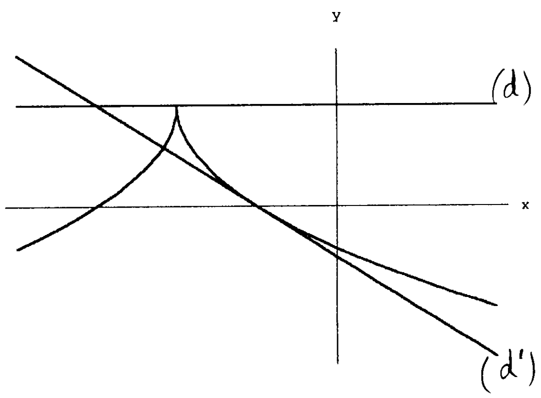
Situation N° 1



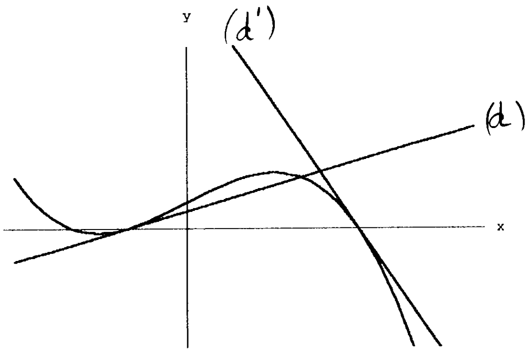
Situation N° 2



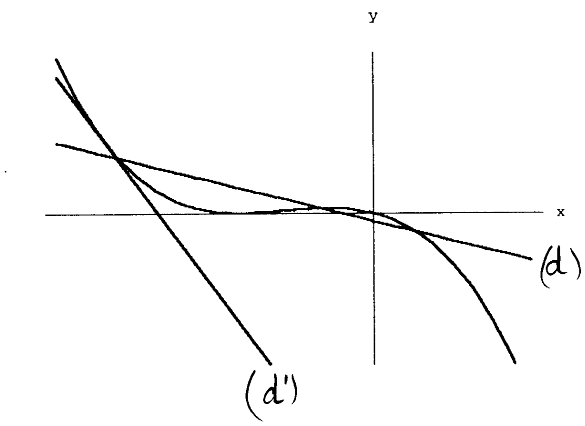
Situation N° 3



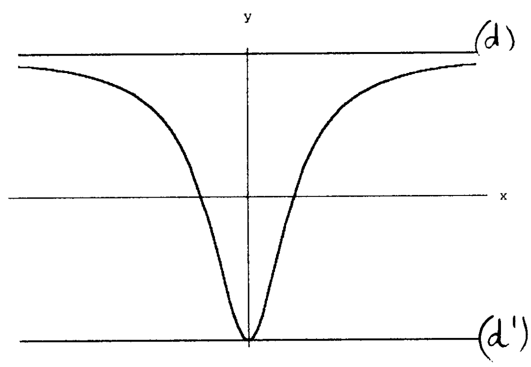
Situation N° 4



Situation N° 5



Situation N° 6



Activité 2 :

a) Avec un cercle

A est un point sur le cercle C,
M et N deux points variables de C.
Que deviennent les sécantes (AM) et (AN) lorsque les points M et N se rapprochent du point A ?

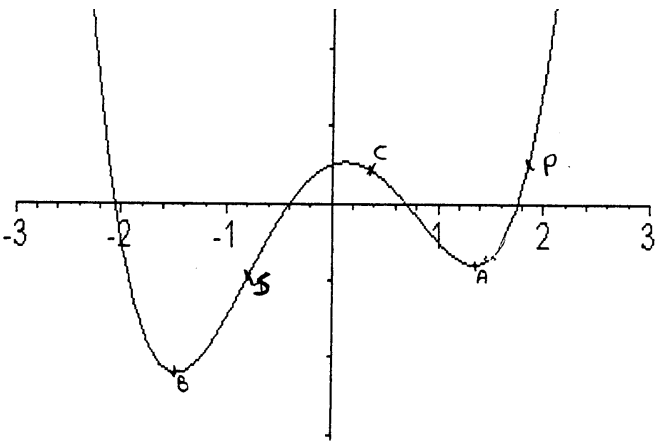
b) Avec une courbe

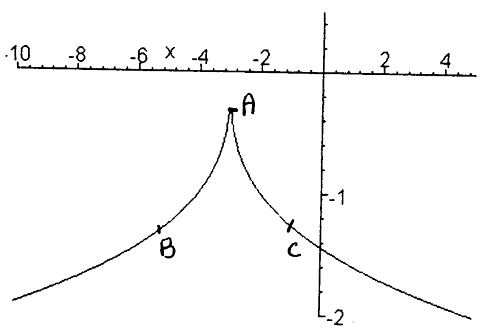
Même question que précédemment avec la courbe ci-contre.

A

Activité 3 :

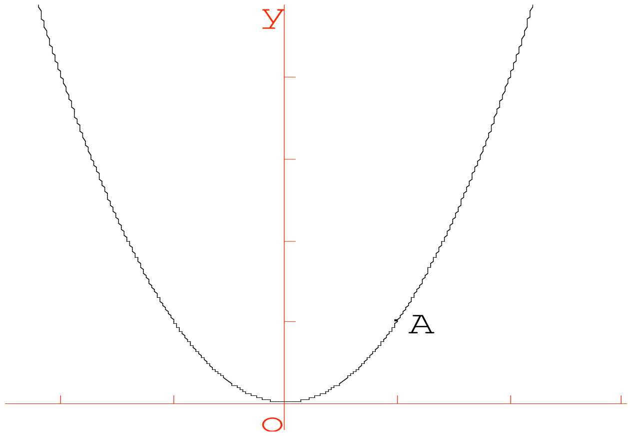
Pour chacune des courbes suivantes, tracer les tangentes aux points A, B, C puis S et P (elles ne peuvent être tracées que de façon approximative.)





Tracer une tangente en B et en C à cette courbe.
(de façon approximative)
Peut-on tracer une tangente en A ?

Activité 4 :
On considère la courbe suivante représentative de la fonction f(x) = x_ dans un repère (O ; □,i, □,j).
Soit le point A (1 ; 1) sur cette courbe



1) On considère le point B (2 ; f(2)),
Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

Calculer l'équation réduite de la droite (AB).

2) On considère un point M de la courbe d'abscisse □ (□ ≠ 1).
Quelle est l'ordonnée du point M ?

Calculer le coefficient directeur **m** de la droite (AM) en fonction de □.

3) Compléter le tableau suivant :

□	0	0.5	0.9	0.99	1.01	1.1	1.5	2
m								

Quand le point M se rapproche du point A, que peut-on dire de □ ?
que peut-on dire de m ?

Comment calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A ?

Activité 5 : Partie A

1) Représenter graphiquement la fonction f : x □□□ Erreur ! $x^2 + 2x - 1$ pour x □ [–6 ; 2].

2) A est le point de la courbe C_f d'abscisse –3.

Dans le tableau suivant, h est un réel,

B est le point de la courbe d'abscisse –3 + h.

Exprimer en fonction de h le coefficient directeur m(h) de la droite (AB)

3) Compléter le tableau suivant :

h	–1	–0.5	–0.1	–0.05	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-6}
m(h)							
$\mathbf{x_B}$							

Déterminer **la limite de m(h) quand h tend vers 0.**

Construire les droites (AB) correspondant à h = –1, h = –0,5.

Construire la droite T passant par A et de coefficient directeur –1.

4) On choisit d'autres points sur la courbe, on garde les mêmes notations

Compléter le tableau suivant :

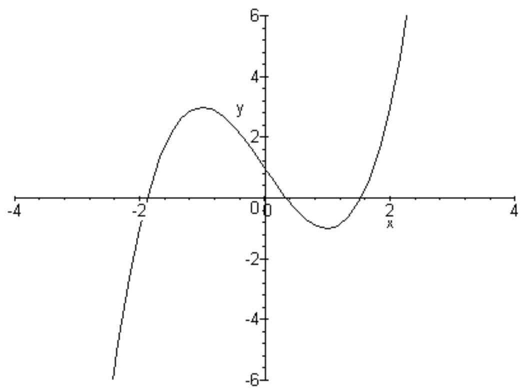
	A_1	A_2	A_3	A_4
$\mathbf{x_{Ai}}$	–4	–2	0	1
$\mathbf{m_i}$ **(h)**				
□$_i$ **= lim,h □ 0 m_i (h)**				

Construire les quatre droites passant par A_i et de coefficient directeur □$_i$.

Partie B

On a représenté ci-contre la fonction g :

x □□□ $x^3 - 3x + 1$



Soit A le point d'abscisse a de C_g et B le point d'abscisse a + h de C_g.

Exprimer le coefficient directeur m(h) de (AB) en fonction de h.

Compléter le tableau suivant :

a	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5
m(h)						
□ = lim,h □ 0 m(h)						

Construire les droites passant par A de coefficient directeur □.

Déterminer g ' (– 1), g ' (– 0.5), g ' (0), g ' (0.5), g ' (1), g ' (1.5), et g ' (a), a étant un réel quelconque.

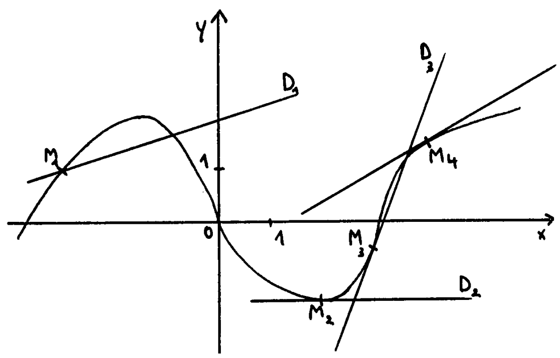
Tangente et nombre dérivé
Activités de réinvestissement

Activité 6 :

Constat : Des élèves tracent « des tangentes qui n'en sont pas » (la tangente en un point ne passe plus par le point, la tangente n'est plus une « bonne » approximation de la courbe au voisinage du point).
Les difficultés sont de 2 ordres :
- des difficultés à représenter une droite d'équation $y = mx + p$ en donnant du sens à m, sans repasser par la recherche de 2 points de la droite
- des difficultés à vérifier le tracé d'une tangente

Exercice 1 :

Les droites D_1, D_2, D_3, D_4 sont-elles tangentes à la courbe ci-contre aux points M_1, M_2, M_3, M_4 ? A quoi le reconnaissez vous ?



Exercice 2 :

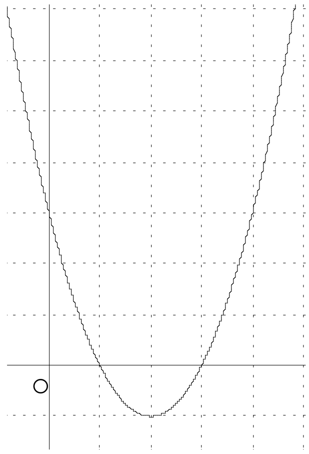
1°) Tracer dans un repère orthogonal les droites D_i de $i = 1$ à $i = 9$, en sachant que D_i passe par le point A_i et a pour coefficient directeur m_i. Les coordonnées des points A_i et les coefficients directeurs m_i sont indiqués ci-dessous : (On limitera les tracés aux segments autour des points A_i)

x_i	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y_i	–3	0,125	1	0,375	–1	–2,375	–3	–2,125	1
m_i	9	3,75	0	–2,25	–3	–2,25	0	3,75	9

2°) Représenter graphiquement une fonction dont la courbe représentative admet aux points A_i les droites D_i comme tangentes.

3°) Soit la fonction f définie sur I, R par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
Vérifier que f est une fonction qui convient.

Activité 7 : *Inversons la démarche*



Soit une fonction numérique f et sa dérivée g (g = f') dont la courbe représentative est tracée ci-contre.

1 - a) A l'aide du graphique, déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

b) En déduire le sens de variation de f.

2 - On veut tracer une représentation graphique possible de la fonction f.

a) Sachant que f (0) = – 1, tracer la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse 0.

b) De même sachant que f(1) = **Erreur !**, f(2) = – **Erreur !**, f(3) = –1 et f(4) = **Erreur !**, tracer les tangentes à la courbe Cf aux points d'abscisses 1 ; 2 ; 3 et 4.

c) Proposer un tracé de la courbe Cf.

3- On veut déterminer l'expression de f(x).

a) On suppose que pour tout x réel, f (x) = **Erreur !** $x^3 + a\,x^2 + bx + c$. Déterminer les valeurs de a, b, c et donner l'expression de f (x).
b) En déduire l'expression de g(x) et vérifier graphiquement.

4- Peut-on trouver d'autres fonctions admettant g pour fonction dérivée ?

Activité 8 : A***pproximation affine d'une fonction au voisinage d'un point***

Soit la fonction f définie sur I, R par : $f(x) = x^4 - x - 1$.

1°) Vérifier que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse – 1 a pour équation : $y = -5x - 4$.

2°) Compléter le tableau avec une approximation décimale d'ordre 4 :

x	–1,1	–1,01	–1,001	–1	–0,99	–0,9
f(x)						
–5x – 4						
f(x) – (–5x – 4)						

3°) Sans calculatrice, comment avoir une valeur approchée de f(– 1,011) et de f(– 0,99).

Etude du signe de la dérivée d'une fonction

Activité 9 :

1 – Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur l'ensemble I

f_1 (x) = 4 + x – x^2 I = I,R f_1' (x) =

f_2 (x) = $3x^3 - 27x^2 + 81x + 7$ I = I,R f_2' (x) =

f_3 (x) = **Erreur !** I =]– • ; – **Erreur !** [f_3' (x) =

f_4 (x) = **Erreur !** I = **Erreur !** f_4' (x) =

f_5(x) = 5x + 2 – **Erreur !** I =]3 ; + • [f_5' (x) =

f_6 (x) = $x^4 - 2x^2 - 3$ I = I,R f_6' (x) =

f_7 (x) = $x^3 + x - 5$ I = I,R f_7' (x) =

f_8 (x) = **Erreur !** – **Erreur !** I =]0 ; + • [f_8' (x) =

f_9 (x) = $2x^3 + 3x^2 + 6x + 6$ I = I,R f_9' (x) =

f_{10} (x) = x +**Erreur !** I =]**Erreur !** ; + • [f_{10}' (x) =

2 – On veut connaître le signe de ces dérivées

- Quelles sont celles pour lesquelles on peut conclure immédiatement (sans calcul) ?
- Pour les autres, indiquer, après les avoir regroupées, les différentes méthodes utilisées.

Etudier le signe d'une dérivée : commentaires

Constat :
Dans l'étude d'une fonction la partie souvent la plus mal traitée est celle de l'étude du signe de la dérivée ; les élèves cherchent en général plus ou moins bien les valeurs qui annulent cette dérivée et dressent ensuite le tableau de variation en s'aidant de la courbe obtenue sur leur calculatrice graphique sans donner aucune explication sur le signe.

Objectif :
l'objectif de cette fiche est de faire élaborer une méthode pour l'étude du signe de la dérivée afin que cet exercice ne paraisse plus aux élèves comme quelque chose d'insurmontable.

Connaissances mobilisées :
- Les formules et théorèmes permettant de déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme ou rationnelle,
- signe et factorisation d'un polynôme,
- cette fiche peut être faite dès le début d'une classe de terminale ; une autre fiche a été élaborée avec des fonctions logarithmiques et exponentielles.

Gestion :
- La recherche des fonctions dérivées peut être faite à la maison ou au cours d'une séance précédente. Cela peut aussi être l'occasion d'utiliser des outils de calcul formel (calculatrices ou logiciels),
- après un court temps de recherche (environ 10 mn), recensement des fonctions dérivées pour lesquelles on peut conclure sans calcul,
- étude ensuite des autres dérivées individuellement ou en groupe. Les élèves n'ont pas droit à la touche *graph* de leur calculatrice sauf pour vérification ; travail un peu long,
- mise en commun des travaux, les dérivées sont regroupées suivant les différentes méthodes utilisées et élaboration d'une fiche méthode.

Commentaires :
Au départ plusieurs élèves ont essayé de placer les signes en prenant quelques valeurs ; leurs erreurs (en particulier lorsque □ = 0) les ont conduit à poser des questions sur les règles des signes.
les élèves n'ont pas eu de mal à monter leur fiche méthode ; l'étude du signe de la dérivée a été beaucoup mieux traitée dans les devoirs qui ont suivi.
Une heure n'a pas suffit, il faut bien compter 1h30.

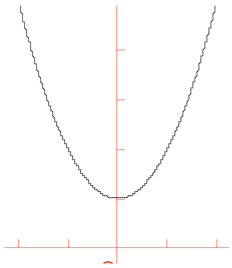
Une deuxième fiche après l'étude des fonctions logarithmes et exponentielles permet de reprendre efficacement ce travail.

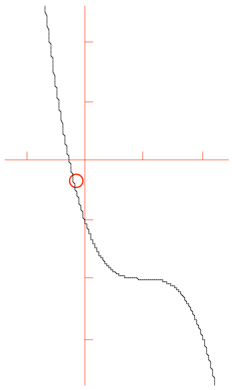
Etude du signe de la dérivée (bis)

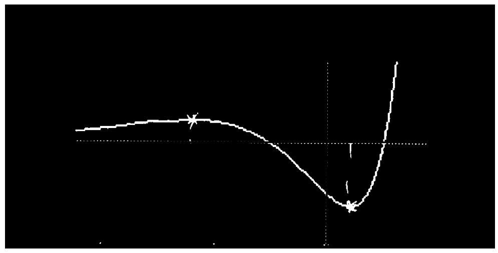
Activité 10 :

Exercice 1 :

Les courbes ci-dessous sont les courbes représentatives de la fonction dérivée de, respectivement, trois fonctions f, g et h définies sur I, R. A l'aide de ces graphiques déterminer le sens de variation de f, de g et de h.







$y = f'(x)$

$y = g'(x)$

$y = h'(x)$

Exercice 2 :

$f_1(x) = \ln x +$ **Erreur !**

$f_2(x) = \ln($ **Erreur !** $)$

$f_3(x) =$ **Erreur !**

$f_4(x) = 3 +$ **Erreur !**

$f_5(x) = -x + 3 +$ **Erreur !**

$f_6(x) = 2x - (x + 1)\ln(x + 1)$

$f_7(x) = x\,e^x$

$f_8(x) = -x^2\,e^x$

$f_9(x) = e^{-2x+3}$

$f_{10}(x) =$ **Erreur !**

$f_{11}(t) = 3t\,e^{-t}$

$f_{12}(x) =$ **Erreur !**

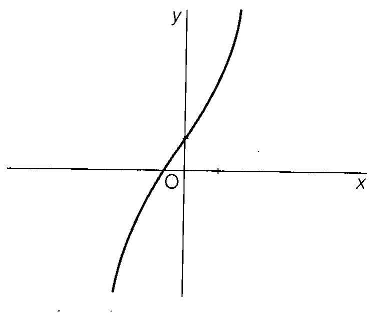
Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessus et indiquer pour chacune la méthode à utiliser pour l'étude de son signe (pour f'_5 il sera bon d'étudier le sens de variation de la dérivée seconde f''_5 avant d'étudier le signe de f'_5).

Activité 11 : **Critiquer des réponses**

Voici plusieurs réponses fournies par certains élèves de la classe à la première question d'un problème.
Qu'en pensez - vous ? Corrigez-les si besoin en analysant les erreurs.

Problème :

1. On considère la fonction f dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée par la figure ci-dessous :



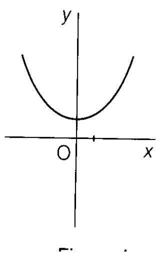


Figure 1

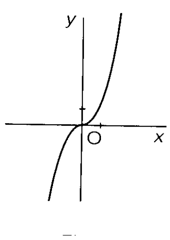


Figure 2

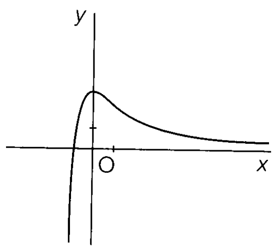


Figure 3

Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, quelle est la seule qui soit susceptible de représenter la fonction dérivée de f ? (On explicitera le choix fait.)

Elève n°1

« *La courbe susceptible de représenter la fonction dérivée de f est la courbe n °2 car c'est la seule qui puisse respecter la relation entre f(x) et f ' (x) dans un tableau de variation* »

Elève n°2

« La courbe qui représente la fonction f est la courbe n°2 :
C'est la seule qui a les mêmes limites en + • et en - • que la fonction f. »

Elève n°3

« *La courbe de la dérivée de la fonction f c'est la courbe n°1 car dans les deux cas pour x = 0 on obtient f(x) = 1.* »

Elève n°4

« *C'est la figure 1 car la fonction f doit être du troisième degré donc sa dérivée est du second degré, c'est une parabole.* »

Critiquer des réponses, analyser des erreurs : commentaires

Objectifs :
– Analyser les erreurs de raisonnement à propos des variations d'une fonction et du signe de sa dérivée.
– Critiquer un raisonnement.

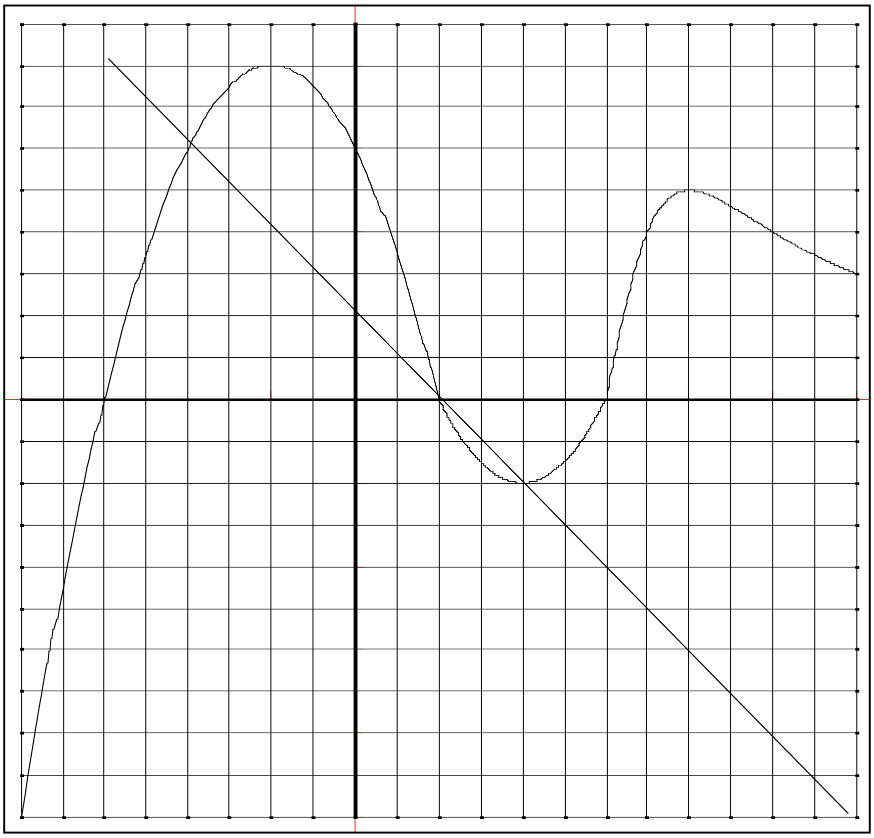
Déroulement :

Cette fiche est proposée lors de la correction d'un devoir. Elle reprend mots pour mots des réponses proposées à la première question du problème(Baccalauréat sujet F_{10} 1991).
Dans un premier temps les élèves travaillent par groupes de deux ou trois et doivent critiquer chacune des réponses.
Une synthèse collective est organisée dans un deuxième temps à l'issue de laquelle est rappelée la propriété sur les variations d'une fonction et le signe de la dérivée.

Lectures graphiques

Activité 12 :

Dans le repère ci-dessous on a tracé la droite d'équation y = – x + 1 et la courbe représentative d'une fonction g définie sur [-4 ; 6].
En observant ce graphique, dire pour chacune des phrases suivantes si vous pensez qu'elles sont vraies ou fausses ; justifier chaque réponse, en vous aidant si nécessaire de l'une des phrases jointes.



1. g(x) = 0 a pour solutions –3 ; 1 et 3.
2. g(x) est négatif pour tout x de [– 1 ; 2].
3. l'image de 4 par g est – 1.
4. la dérivée de g s'annule pour x = – 1 ; x = 2 et x = 4.
5. l'équation g(x) = 2,5 a quatre solutions.
6. g' (5) est un nombre négatif.
7. sur l'intervalle [– 4 ; –1] la fonction g est croissante.
8. pour tout x de [-3 ; 1], g(x) est positif.
9. g (0) = 3.
10. g' (x) est positif pour x ∈ [– 4 ; – 1] ∪ [2 ; 4].
11. g admet un maximum en x = – 1.
12. l'inéquation g(x) ≥ 3 a pour ensemble solution l'intervalle [–2 ; 0].
13. l'image de l'intervalle [– 4 ; 6] par la fonction g est l'intervalle [–5 ; 4].
14. le nombre 2 est solution de l'équation g(x) = – x + 1.
15. g(x) < – x + 1 si et seulement si x ∈ [– 4 ; – 2[∪] 1 ; 2].

Des phrases pour rédiger

- Le point de la courbe d'abscisse ….. a pour ordonnée ……
- Le point de la courbe d' ordonnée ….. a pour abscisse ……
- Les nombres de l'intervalle ….. ont leurs images dans l'intervalle …..
- La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse ….
- La courbe coupe la droite d'équation ….. aux points d'abscisse ….
- Les courbes représentant les fonctions … et …. se coupent aux points d'abscisses….
- La courbe est située au dessus de l'axe des abscisses pour x appartenant à l'intervalle …
- La courbe est située au dessous de l'axe des abscisses pour x appartenant à l'intervalle …
- La courbe est située au dessus de la droite d'équation …….pour x appartenant à l'intervalle …
- La courbe est située au dessous de la droite d'équation …….pour x appartenant à l'intervalle …
- La courbe de la fonction ….est située au dessus de la courbe de la fonction …. pour x appartenant à l'intervalle….
- La courbe de la fonction ….est située au dessous de la courbe de la fonction …. pour x appartenant à l'intervalle….
- La tangente à la courbe au point d'abscisse ….. est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à la courbe au point d'abscisse ….. a pour coefficient directeur ……
- Sur l'intervalle ….. la courbe monte.
- Sur l'intervalle …..la courbe descend.
- La fonction est croissante sur l'intervalle …..
- La fonction est décroissante sur l'intervalle …..
- La fonction change de sens de variation au point d'abscisse …. et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en ce point.

Lectures graphiques et phrases pour rédiger : commentaires

Constat :
En arrivant en terminale STI, les élèves ne maîtrisent pas toujours bien la lecture graphique d'une courbe ; en particulier le lien entre le nombre dérivé de la fonction en un point et la tangente à la courbe en ce point, n'est souvent pas acquis.
Par ailleurs ces élèves ont souvent du mal à expliquer et à rédiger leur justification.

Objectif :
l'objectif de cette fiche est de revoir les connaissances étudiées en seconde et en première sur la lecture graphique d'une courbe et les généralités sur les fonctions et de leur donner des outils pour rédiger leurs devoirs.

Connaissances mobilisées :
- Image et antécédent d'un nombre par une fonction ; résolution graphique d'une équation, d'une inéquation.
- Nombre dérivé et coefficient directeur d'une tangente ; sens de variation d'une fonction.
- Cette fiche peut être faite dès le début d'une classe de terminale.

Gestion :
- Dans un premier temps les élèves examinent en silence les phrases pour décider si elles sont vraies ou fausses.
- Un débat s'instaure ensuite qui est l'occasion de rappeler les connaissances oubliées.
- Ensuite les élèves rédigent individuellement les justifications en s'aidant des « phrases modèles » qui leur sont distribuées.

Commentaires :
Cette fiche qui permet de revoir rapidement des connaissances de base simples reste une référence tout au long de l'année.
Les élèves apprécient tout particulièrement les « phrases modèles ».

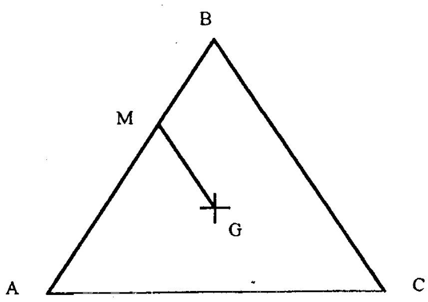
Activités 13 : **FONCTIONS PÉRIODIQUES**

Ces activités ont plusieurs objectifs :

- Comprendre ce qu'est une fonction périodique
- Découvrir et utiliser la fonction « partie entière »
- Découvrir une méthode permettant de construire la représentation graphique d'une fonction périodique.

Première activité

Première rencontre avec une fonction périodique



ABC est un triangle équilatéral de côté 8 cm, G est son centre de gravité.
Un point M se déplace sur le contour du triangle.
Pour chaque position du point M, on désigne par x la distance (exprimée en cm) parcourue par le point M à partir de A.
On veut étudier le plus précisément possible les variations de la longueur GM au cours du déplacement du point M sur le contour ABC.
On appelle f la fonction qui à x associe la longueur GM.

1. Sur quel ensemble est définie f ?
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f lorsque M fait un tour complet du triangle.
3. Exprimer f(x) en fonction de x et construire la courbe représentative de f pour $x \in [0 ; 8]$.
4. Comment trouver l'expression de f(x) pour $x \in [8 ; 16]$ puis pour $x \in [16 ; 24]$?

Deuxième activité

Partie A

Rappel : Soit $T \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T si : pour tout réel x, $f(x + T) = f(x)$

1 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

Pour tout x de $[0 ; 1[$, $f(x) = 2x$ et f est périodique de période 1.

a) Tracer la courbe C_f représentative de f, sur $[-5 ; 5]$, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Calculer $f(245,75)$

2 - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

Pour tout x de $[0 ; 2[$, $g(x) = 2x$ et g est périodique de période 2.

a) Tracer la courbe C_g représentative de g, sur $[-5 ; 5]$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Calculer $g(4,25)$; $g(-3,6)$; $g(245,75)$.

3 - Soit h la fonction définie sur I,R par :

Pour tout x de [0 ; 2[, h (x) = sin x et h est périodique de période 2.

a) Tracer la courbe C_h représentative de h, sur [–5 ; 5] dans un repère (O, □,i, □,j)

b) Calculer h (4,5) ; h (245,75) ; h (2 □)

4 - Expliquer la méthode utilisée dans les deux derniers exercices pour calculer les images demandées.

Cette méthode est-elle encore valable pour calculer g (– 7,8) et h (– 7,8) ?

5 - Soit k la fonction définie sur I,R par :

Pour tout x de [0 ; **Erreur !** [, k (x) = sin x et k est périodique de période **Erreur !**.

a) Tracer la courbe C_k représentative de k, sur [– 2 □ ; 2 □] dans un repère (O, □,i, □,j)

b) Calculer k (**Erreur !**) ; k (– **Erreur !**) ; k (12) ; k (–10) ; k (**Erreur !**) et k (**Erreur !**).

Partie B

Définition :
La fonction partie entière est celle qui à tout x réel associe l'entier relatif n, tel que
n □ x < n + 1.
On note E(x) la partie entière de x

1 - A l'aide de la fonction partie entière exprimer pour chacune des fonctions f, g, h et k de la partie A, l'image d' un réel x en fonction de x.

2 - Représenter ces fonctions sur l'écran de votre calculatrice ou d'un ordinateur.

3 - Représenter sur un écran les fonctions suivantes :

a) f_1 définie sur I,R et périodique de période 4 telle que sur [0 ; 4[, f_1 (x) = $x^2 – 4x$.

b) f_2 définie sur I,R et périodique de période 3 telle que sur [–1 ; 2 [, f_2 (x) = $\sqrt{x + 1}$.