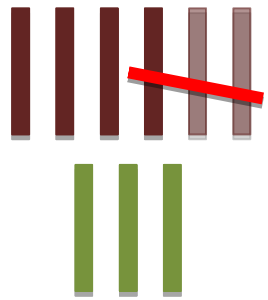
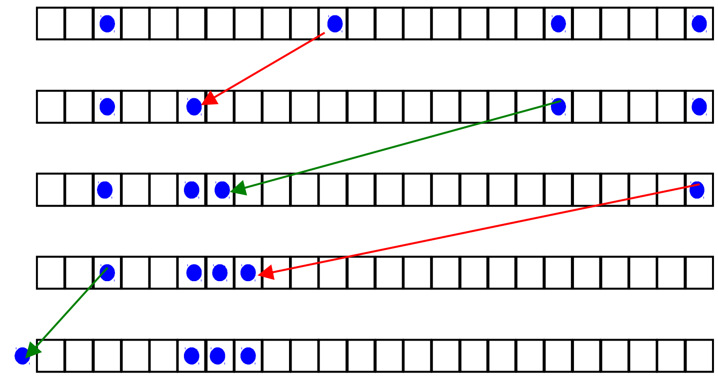
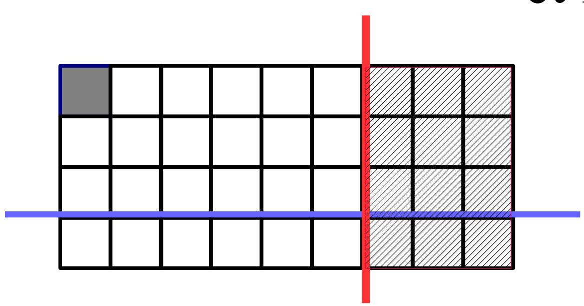
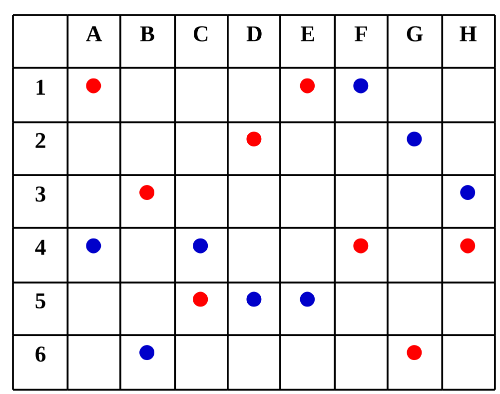


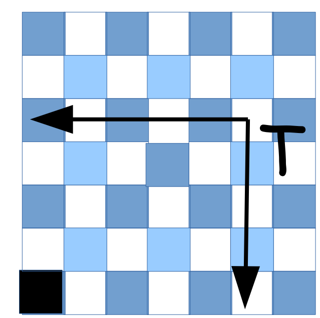


Raisonnements mathématiques dans les jeux combinatoires
Jeux de soustraction – jeu de *Nim*

Denise GRENIER
Institut Fourier – Thème « mathématiques discrètes et didactique »
et IREM – Université Grenoble Alpes

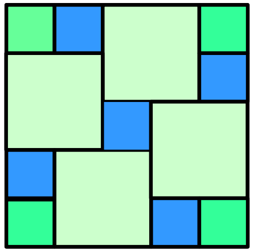




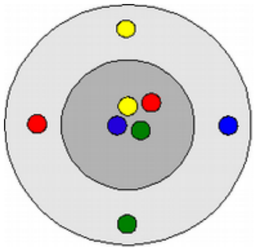


Mathématiques Discrètes

Des objets, notions, problèmes et outils spécifiques

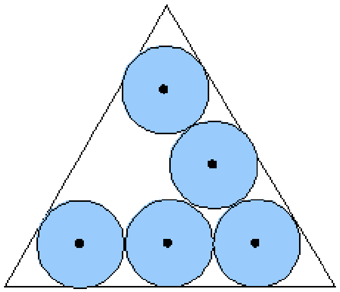


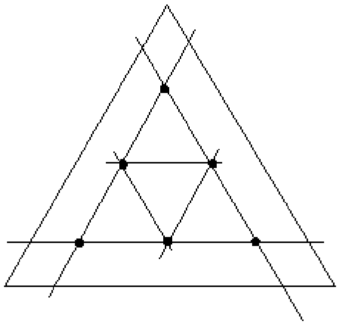
Théorie des **nombres**
Théorie des **graphes**
Théories du **langage** et de l'**information**
Théorie des **jeux**
Théorie de la **complexité**



– Une approche différente d'objets et notions de divers domaines
Numérique, géométrique, graphique

– Des modélisations et des raisonnements spécifiques
Dualité (empilement et recouvrement)
Coloration
Partitions (principes de)
Double comptage/bijection
Cages à pigeons (principe de Dirichlet)
Récurrence
Optimisation combinatoire – Problèmes de max/min





Jeu combinatoire

– jeu à ***deux joueurs***, jouant alternativement,

– les ***coups*** sont définis par une règle

– ***à information complète*** : chaque joueur connait complètement l'état du jeu

– ***le hasard n'intervient pas***

– ***toute partie a une fin*** avec le premier joueur qui ne peut plus jouer,

– ***partie nulle ou gagnante*** pour l'un des joueurs

– ***jeu partisan*** (échecs, dames) ***/ jeu impartial***

Berlekamp : l'un des fondateurs de la théorie des jeux combinatoires

Berlekamp, Conway et Guy (1982) : «Winning Ways for your Mathematical Plays »
Ensemble de leurs résultats sur les jeux mathématiques.

« Games of no chance » : ouvrage collectif sur les recherches actuelles

Jeux combinatoires particuliers

Jeu de soustraction

– des objets (jetons, bâtons, etc..) en un ou plusieurs tas, impartial

– un coup consiste à enlever un certain nombre de ces objets dans un ou plusieurs tas, avec contrainte ou non selon la règle du jeu

– pas de partie nulle, car diminution stricte du nombre d'objets

– le joueur qui ne peut plus jouer a perdu (version *normale*), ou le joueur qui enlève le dernier objets a perdu (version *misère*)

Exemples « connus »

Fort Boyard : un tas, et un nombre maximum d'allumettes (1, 2 ou 3).

Jeu de Marienbad (en version misère)

Autre contextualisation : ***La course à n*** *... avec des pas de 1, 2 ou 3*

Intérêt pédagogique : approche « simple » des notions de position perdante / position gagnante, stratégie gagnante.

Résoudre un jeu combinatoire

permet de trouver, dans une situation donnée, les positions perdantes ou gagnantes du jeu, et éventuellement une stratégie gagnante

Position gagnante (G) : ***il existe*** un coup à jouer qui donne une position perdante

Position perdante (P) : ***quel que soit*** le coup joué, il donne une position gagnante

Stratégie gagnante : procédure permettant de déterminer le ou les coups à jouer dans une position gagnante

Exemple : dans La course à n *... avec des pas de 1, 2 ou 3*

Les positions gagnantes sont repérées par rapport au reste de la division euclidienne de n par 4. La stratégie gagnante consiste donc à se retrouver à chaque coup sur la position gagnante suivante jusqu'à 22

Dans les jeux impartiaux, une position est gagnante ou perdante.
On a G=non P

Jeux de *Nim et variantes*

Jeu de Nim : Un jeu de soustraction (résolu en 1901, Bouton) qui vérifie en plus :

– pas de contrainte sur le nombre d'objets que l'on prend

– il existe une stratégie gagnante

Appelation « *Nim* » : venue plus tard, attribuée à Charles Bouton dans un article de la revue The Annals of Mathematics : « *Nim*, a game with a complete mathematical theory »

Les mathématiciens étudient ces jeux et les modélisent depuis le début du XXème siècle (Bouton 1901, Sprague 1935 et Grundy 1939).

Le théorème de Grundy-Sprague (1935-1939) résout les stratégies gagnantes pour tous les jeux de Nim et leurs équivalents

Jeux de Nim et variantes dans l'histoire

Variantes du jeu de Nim (*Nim*-poker) (jeux très anciens)

En Afrique (*Tiouk-Tiouk*)

En Chine : le *Fan-tan*

Égypte antique : l*e jeu du moulin ou jeu des mérelles* (jeu partisan résolu récemment)

Étudiés en Europe dès le moyen âge

Fra Luca Pacioli (1508) *De viribus quantitatis*

Claude Bachet de Méziriac (1612) *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*

Jean Leurechon (1624) *Récréation mathématique*

Leur projet pédagogique commun : enseigner les mathématiques de manière ludique et agréable

Variantes du jeu de *Nim*

Le jeu de *Nim* à plusieurs tas (somme de jeux de *Nim*)

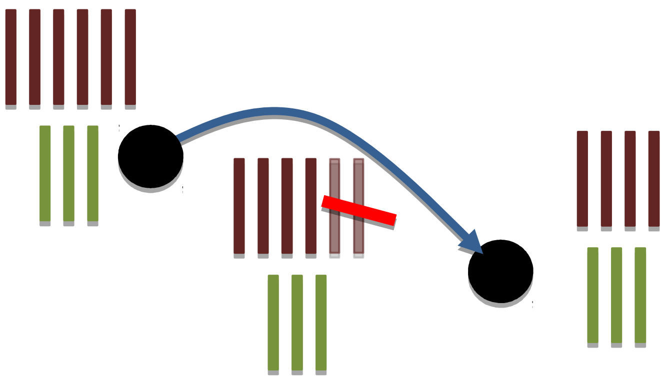
Il se joue sur plusieurs tas d'objets (allumettes, billes, graines, jetons …), ou sur des grilles (avec des graines, jetons, etc...).

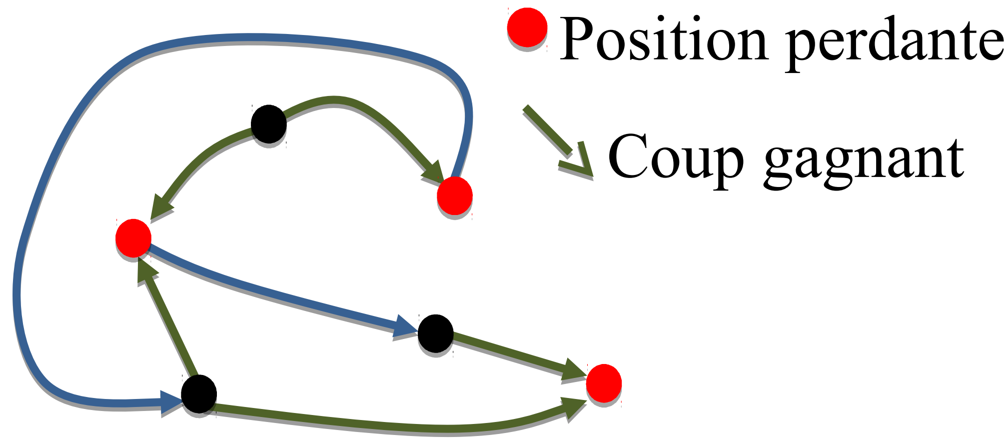
Chaque joueur retire le nombre d'allumettes qu'il veut dans le tas de son choix. Celui qui ne peut plus joueur a perdu – autrement dit celui qui retire la dernière allumette a gagné (convention ***normale*** du jeu).

Ce jeu a été rendu célèbre par le film de Alain Resnais en 1961 « L'année dernière à Marienbad », en convention « misère ».

G et P – illustration (Sylvain Gravier)

graphe de jeu





Un sommet est une position du jeu
Un arc entre 2 sommets : s'il existe un coup allant d'une position à l'autre

Une position ne permet d'atteindre que des positions

Le graphe de jeu permet de décrire l'ensemble de toutes les parties possibles étant donnée une situation de départ.

Variantes du jeu de Nim

♦ Jeu de Grundy (1939)

Un seul tas au départ. Un coup consiste à séparer l'un des tas en deux tas de tailles différentes. Se joue en version normale (il ne reste alors que des tas à 1 ou 2 objets). *Résolu par le théorème de Sprague-Grundy*

♦ Jeu de Wythoff (1907)

Se joue avec deux tas. Un coup consiste au choix à prendre un nombre d'objets dans un des deux tas, ou prendre un même nombre d'objets dans les deux tas à la fois. *Les positions gagnantes sont caractérisées numériquement, utilisant le nombre d'or et la fonction partie entière.*

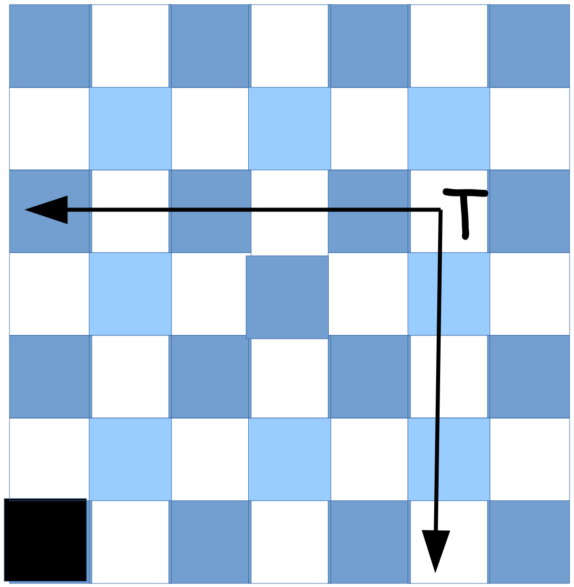
♦ Jeux Octaux (Berlekamp, Conway, Guy, 1982)

Un coup consiste à retirer des objets d'un tas et éventuellement à séparer ce tas en deux. Règles définies à l'aide d'un système numérique à 8 chiffres. (cf. *Winning Ways for your Mathematical Plays, op. Cit.*)

Modèles et variantes

♦ Variante du jeu de Wythoff (jeu de quadrillage)

se joue sur un damier où une tour a été posée sur une case. L'objectif est de mettre cette tour dans un trou situé sur un coin du damier, par exemple celui en bas à gauche, en la déplaçant dans la direction du trou, vers la gauche ou vers le bas. Le joueur atteignant le trou a gagné.



(étudié dans un Maths-à-modeler junior)

Un jeu ancien : le *Tiouk-Tiouk*

Jeu africain sur une grille avec un nombre pair de colonnes et un nombre variables de lignes (avec graines et bâtonnets, pions).

Chaque joueur a autant de pions que de colonnes. Une couleur par joueur. Au début, on place les pions sur les lignes extrêmes.

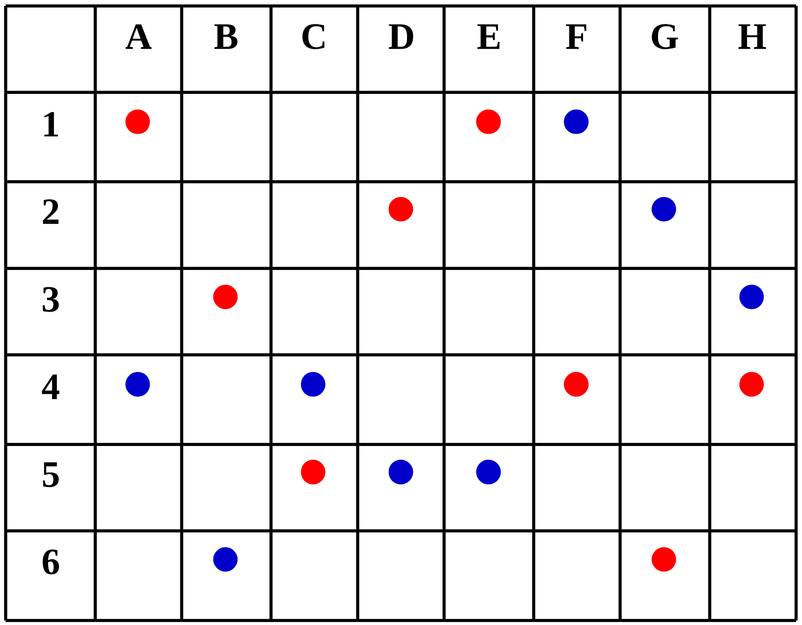
Un coup consiste à avancer ou reculer le pion de sa couleur dans une colonne de son choix, sans passer par dessus le pion de l'autre couleur.

Lorsque tous les pions d'un joueur sont bloqués, la partie est terminée et le joueur bloqué a perdu.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
1	●	●	●	●	●	●	●	●
2								
3								
4								
5								
6	●	●	●	●	●	●	●	●

Résolution mathématique du *Tiouk-tiouk* et généralisation : Le Northcott's Game (XXème siècle)

Complexité plus grande. Même règle du jeu que le ***Tiouk-tiouk***
Positions des pions, au début du jeu, fixées par les joueurs, n'importe où dans les colonnes, mais toujours un pion par colonne.

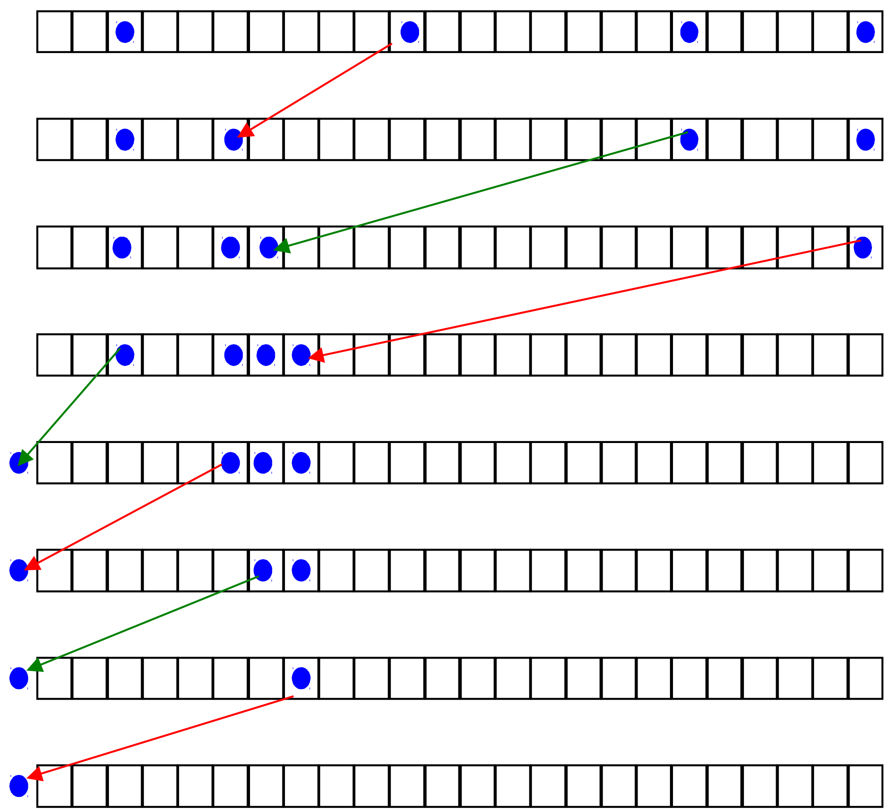


Les tas sont les intervalles entre deux pions, leur longueur peut croître ou décroître.

Jeu des pièces sur une bande

Règle du jeu.

Sur une bande de longueur n, on dispose un nombre p de pièces. Les joueurs jouent à tour de rôle et doivent déplacer une seule pièce vers la gauche sans sauter par dessus une autre pièce, le joueur ne pouvant plus jouer a perdu !!



Le jeu du chocolat (Maths-à-modeler)

Jeu à deux (équipes de) joueurs

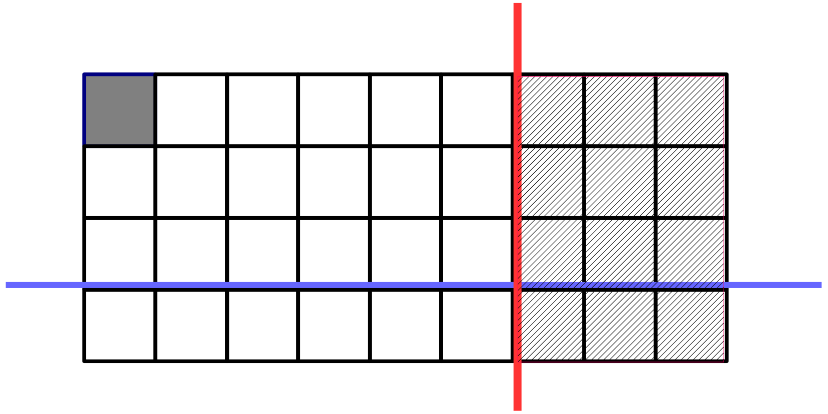
Chaque joueur doit, à tour de rôle, couper la tablette dans une seule de ses dimensions et choisir de garder l'un des deux morceaux. Celui qui est obligé de prendre le carré de savon a perdu.

Question. Résoudre le jeu (existe-t-il une stratégie gagnante quelles que soient les dimensions de la tablette ?

JEU 1. Carré de savon dans un coin.

JEU 2. Carré de savon sur un bord.

JEU 3. Carré de savon n'importe où dans la tablette.



Le jeu du chocolat (suite) (thèse Colipan, 2014)

Recherche d'une stratégie gagnante

Anticipation (du résultat d'un coup)
Relations entre dimensions du rectangle et le carré de savon
Mise en place d'un raisonnement inductif « descendant »

Preuve (que la stratégie est gagnante)

Modélisation: couple, triplet ou quadruplet pour le cas général (n, m, p, q)
Outils: Nim-somme (écritures en binaire)
Recherche d’un invariant

Nim-somme

Un « bit » est un chiffre qui peut prendre les valeurs 0 ou 1. Pour un nombre *a*, le i-ème bit de *a* est celui en position *i* dans son écriture en binaire, compté de droite à gauche.

La Nim-somme de deux nombres *a* et *b*, notée $a \oplus b$, est le nombre dont le *i*-ème bit vaut 0 si la somme des *i*-èmes bits de *a* et *b* est paire, et 1 sinon.

La Nim-somme de *n* nombres a_1, a_2, ..., a_n , notée $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$, est le nombre dont le *i*-ème bit vaut 0 si la somme des i-èmes bits des *n* nombres est paire, et 1 sinon.

Exemple. Les nombres a=11, b=9 et c=7 s'écrivent en binaire 1011, 1001, 111 et leur Nim-somme vaut 0101, soit 5 en base 10.

Théorème (C.L. Bouton)

Si la Nim-somme $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$ est nulle, toute modification d'un seul des a_i entraîne qu'elle ne l'est plus.

Si la Nim-somme $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$ n'est pas nulle, on peut la rendre nulle en diminuant un seul des a_i.

Corollaire

Dans la version normale, la position (a_1,..., a_n) dans le jeu de Nim à n tas est perdante si et seulement si la Nim-somme est nulle. $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0$.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème. Il suffit de remarquer que la position finale du jeu est 0,…,0 qui est de Nim-somme nulle.

Exemples

La situation (5, 7, 10) a pour Nim-somme $101 \oplus 111 \oplus 1010 = 1000$, elle est perdante

La situation (5, 7, 2) a pour Nim-somme $101 \oplus 111 \oplus 10 = 000$, elle est gagnante

Références pour cet exposé

Colipan Ximena (2014) *Étude didactique des situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires*. Thèse de l'université Joseph Fourier Grenoble.

Delahaye Jean-Paul (2009) Stratégies magiques au pays de Nim. *Pour la Science*, n°377 mars 2009.

Rougetet Lisa (2012) Les multiples ancêtres du jeu de Nim *Pour la Science* n°420 octobre 2012.

Ouvrage

Groupe « Logique, Raisonnement et SiRC » (2018). *Situations de Recherche pour la classe. Expérimenter, conjecturer, raisonner et prouver en mathématiques – collège, lycée et au-delà*. Nouvelle édition revue et augmentée. ed. IREM de Grenoble.