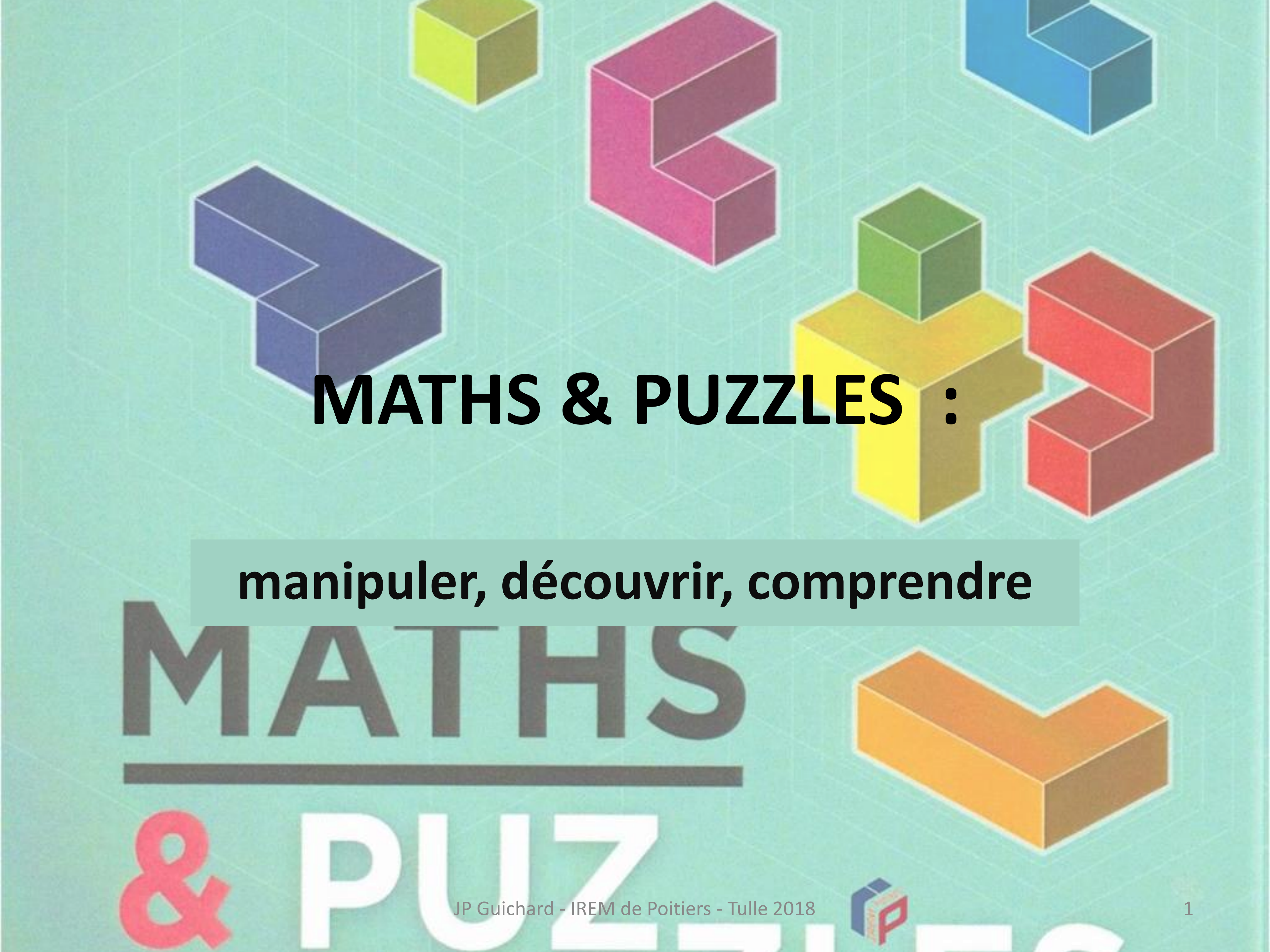
MATHS & PUZZLES :

manipuler, découvrir, comprendre



MATHS & PUZZLES

Introduction : la voie royale vers les mathématiques

1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

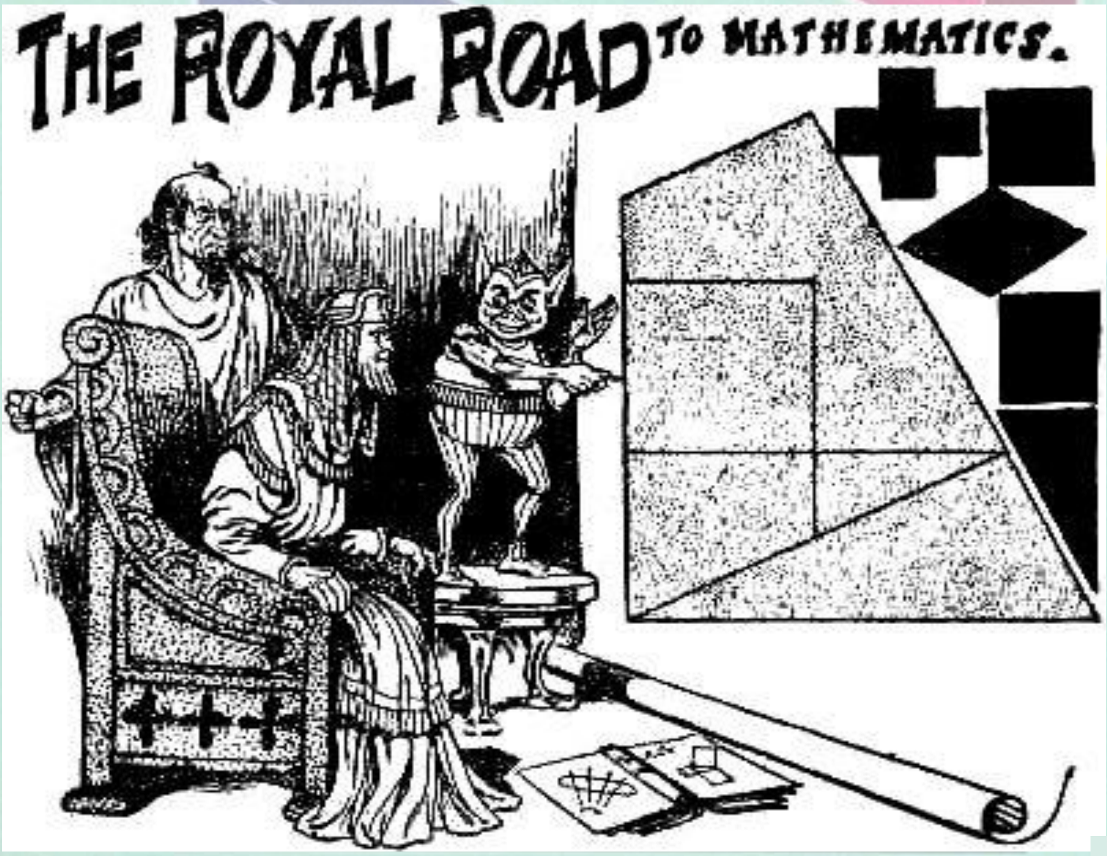
2. Formules arithmétiques et algébriques : preuves sans mots

3. Paradoxes : le raisonnement à l'épreuve

4. Résolution d'équations : la géométrie ressource de l'algèbre

5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l'histoire

Introduction
La voie royale vers les mathématiques

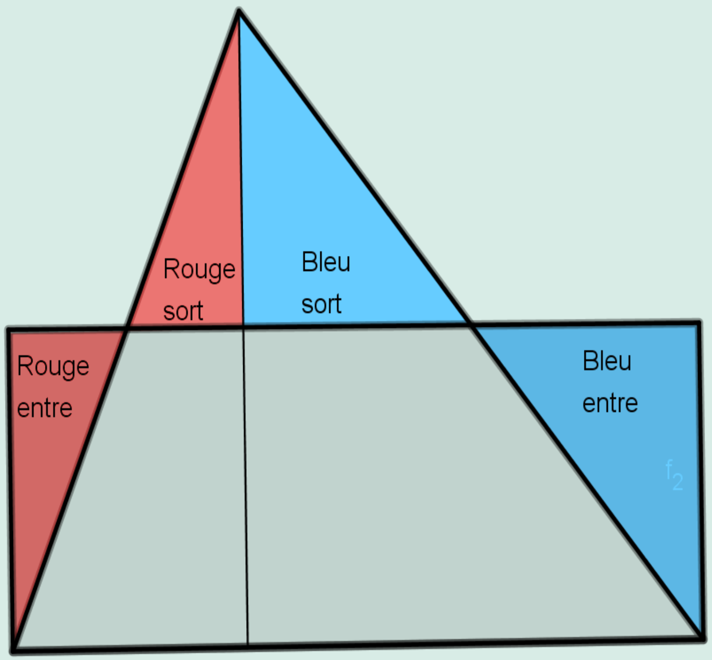


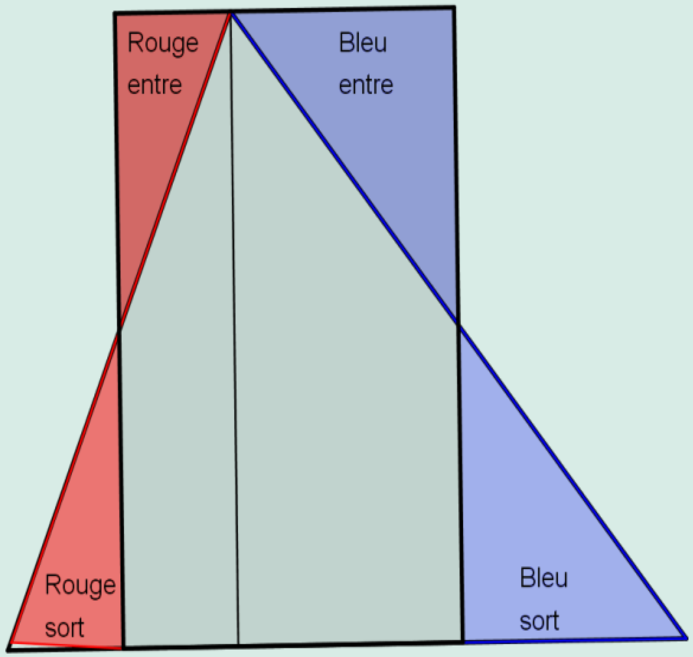
De nouveau je suis obligé de dire à votre Impériale Grandeur que la voie royale pour la géométrie n'a pas encore été découverte, **s'exclama Euclide à l'adresse du Roi Ptolémée, qui avait somnolé pendant un cours sur les éléments de géométrie.**

Sam Loyd *Cyclopedia of puzzles*

1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

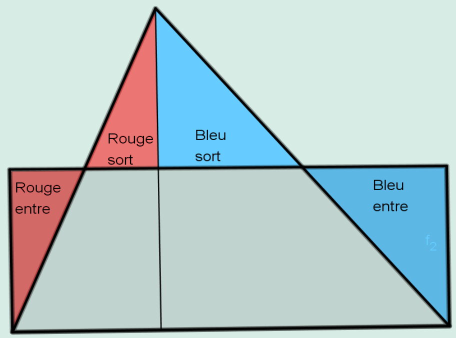
1.1. L'aire du triangle en Chine (3^e siècle) (1)

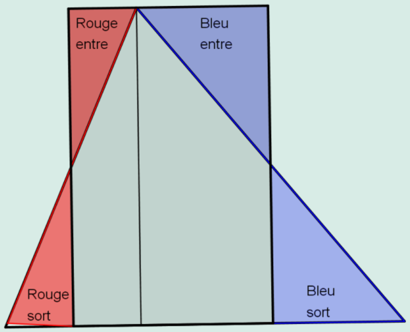




1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

1.1. L'aire du triangle en Chine (3e siècle) (2)





Deux formules :

aire du triangle = base × ½ hauteur ou **aire du triangle = ½ base × hauteur**

Et la nôtre ?

Une méthode :

Figure → observation → dissection (découpage) → manipulation → rectangle → observation → formule

1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

Le calcul des aires origine des puzzles ?

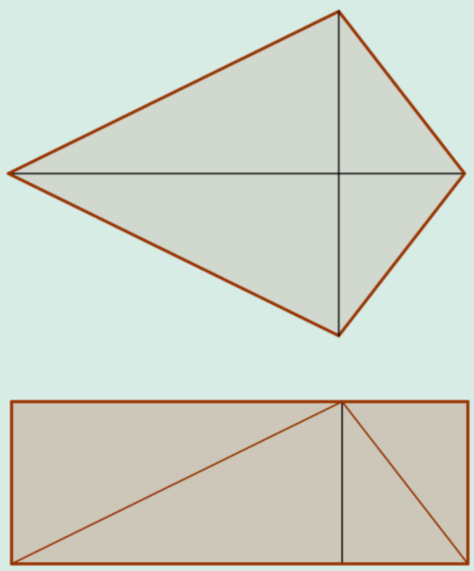
Démarche (ancestrale comme actuelle) :

découper une figure en morceaux et avec ces morceaux reconstituer un rectangle.

Donc on fabrique un puzzle permettant de reconstituer les 2 figures.

1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

1.2. L'aire du cerf volant (1)



Aire du cerf-volant = axe × ½ diagonale

1. Formules d’aire : origine des puzzles ?

1.2. L’aire du cerf volant (2)

Une difficulté, des expériences pour l’avenir

On ne peut se contenter de faire glisser ou tourner les pièces : il faut en retourner deux.

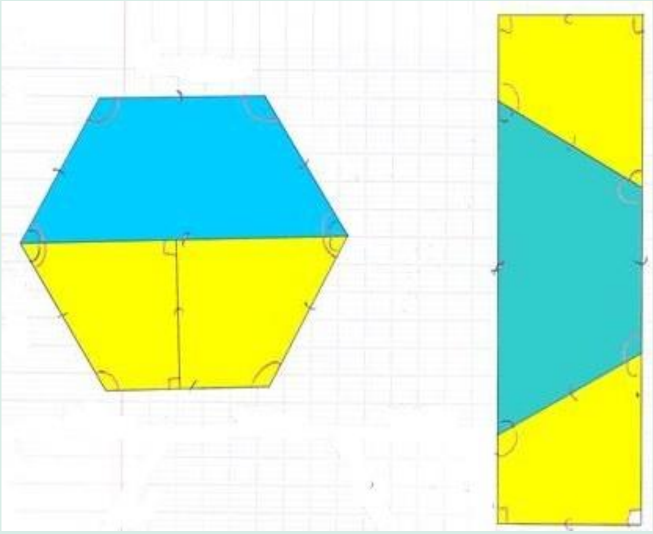
Familiarisation avec la notion d’isométrie positive ou négative.

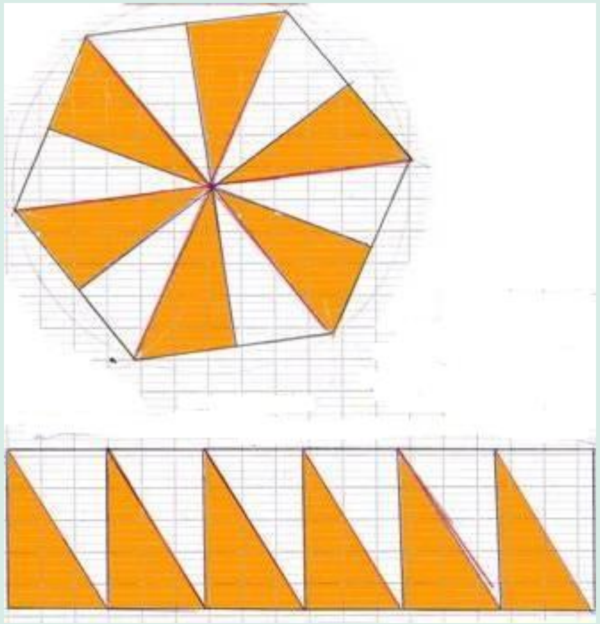
Les deux rectangles symétriques sont des pièces chirales (comme les mains).

Si on ne retourne pas les pièces, ce seront deux pièces distinctes, comme dans le jeu Tetris.

1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

1.3. De l'hexagone au cercle (1)





Aire du polygone régulier =

demi-périmètre × apothème (distance du centre aux côtés)

1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

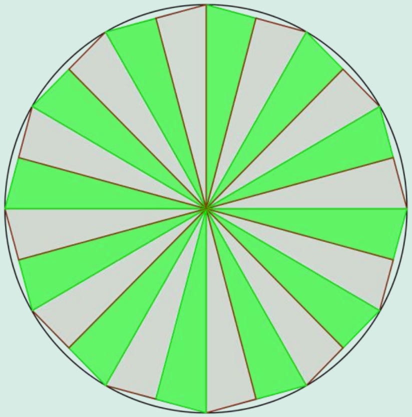
1.3. De l'hexagone au cercle (2)

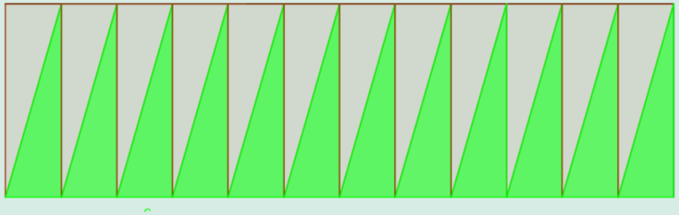
Calculer la superficie de Neuf Brisach **(Défi pôle 4 affiche 1)**

1. Formules d’aire : origine des puzzles ?

1.3. De l’hexagone au cercle (3)

La méthode d’Archimède (3^e siècle av. J.-C.)





Aire du cercle = ½ périmètre du cercle × rayon

Chez les Chinois

Les 4 formules pour l’aire du disque données par Liu Hui dans les *Neuf chapitres* :

$$\mathbf{S = (\ell/2) \times (d/2),\ S = (\ell d)/4,\ S = 3/4\ d^2,\ S = 1/12\ \ell^2}$$

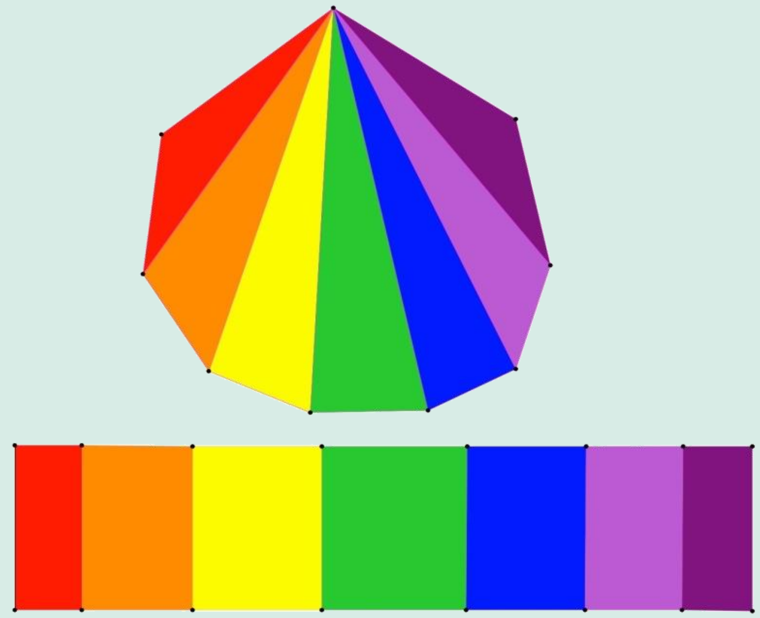
donnent à voir dans le produit de deux dimensions le rectangle ou la fraction de rectangle ou de carré d’aire égale.

1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

1.4. Le théorème de Bolyai-Gerwien-Wallace (19e s.) (1)

Les divers exemples donnés montrent qu'une méthode clé du calcul de l'aire d'une figure est d'en faire un puzzle dont les morceaux permettent de réaliser un rectangle.

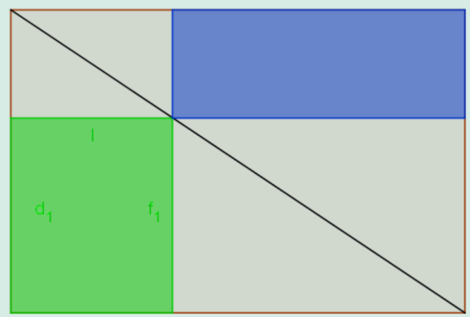
Est-ce toujours possible ?
La réponse est oui pour n'importe quel polygone, grâce au théorème de Bolyai-Gerwien-Wallace (première moitié du 19e s.).
Mais l'essentiel de la démarche figure dans les *Éléments* d'Euclide (3e s. av. J.-C.).



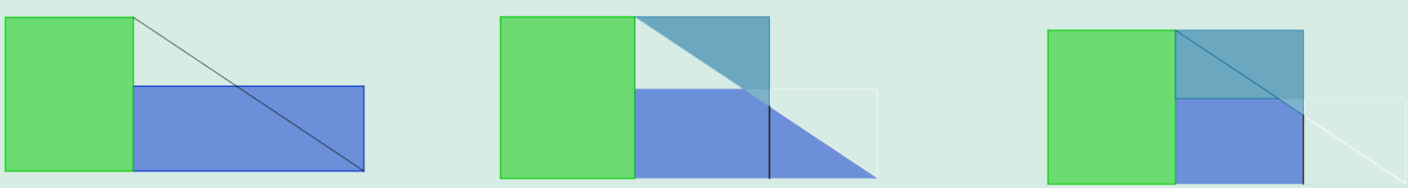
1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

1.4. Le théorème de Bolyai-Gerwien-Wallace (19e s.) (2)

Un théorème clé et fonctionnel : Euclide I 43



Cette transformation est-elle réalisable sous forme de puzzle ?



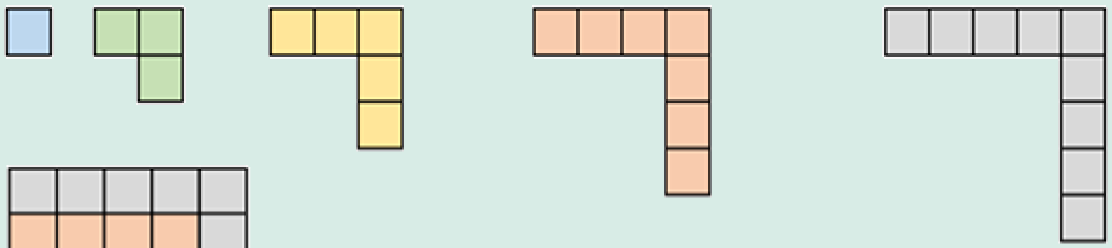
1. Formules d'aire : origine des puzzles ?

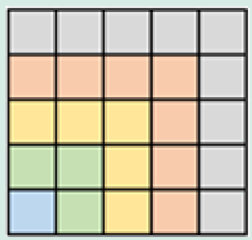
Bilan 1

Découper une figure pour pouvoir la transformer en une autre figure de même aire est une compétence indispensable pour le calcul des aires.

2. Formules arithmétiques et algébriques : preuves sans mots

2. 1. Combien vaut la somme des n premiers nombres impairs ? (1)





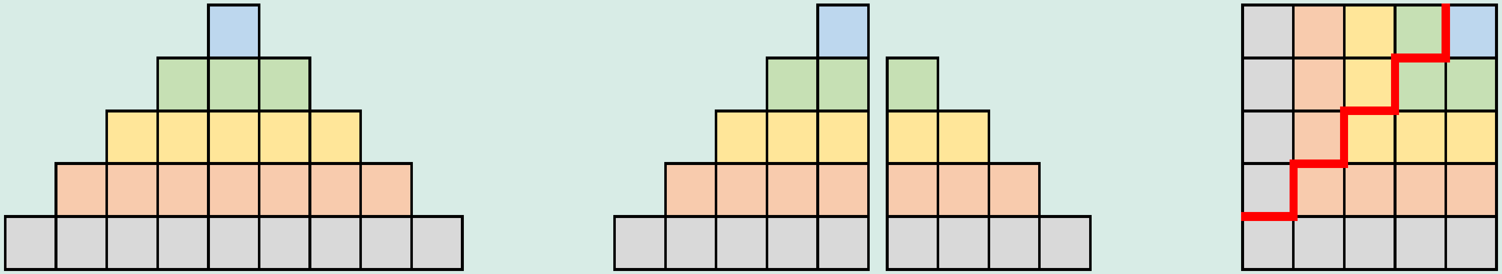
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Héritage pythagoricien : les nombres figurés
Ouvrages d'arithmétique de Nicomaque de Gérase (1e siècle), et de Boèce (6e siècle), références jusqu'au Moyen Age

2. Formules arithmétiques et algébriques : preuves sans mots

2. 1. Combien vaut la somme des n premiers nombres impairs ? (2)

Autre figuration des impairs et autre preuve

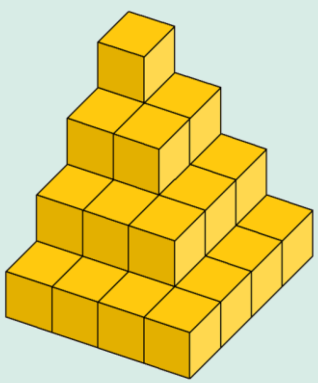


.

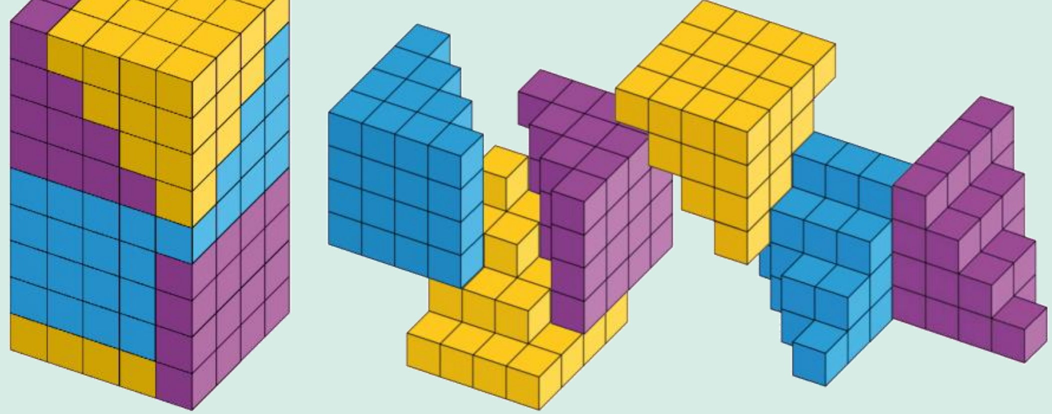
2. Formules arithmétiques et algébriques : preuves sans mots

2.2. Combien vaut la somme des n premiers carrés ?

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$?



$$1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Autres formules

Que vaut la somme des n premiers entiers ? des n premiers cubes ? **(voir pôle 2 panneau 2)**

Que vaut la somme des inverses des puissances de 2 ? des inverses des puissance de 4 ? **(voir le catalogue de l'exposition)**

2. Formules arithmétiques et algébriques : preuves sans mots

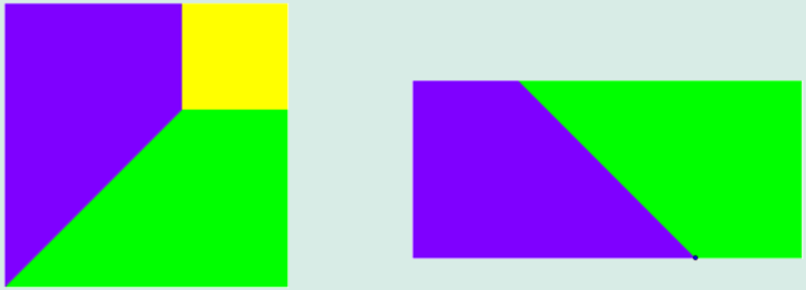
Représenter géométriquement les nombres permet à l’aide de puzzles de visualiser des formules, d’en comprendre le sens, de les démontrer et de les mémoriser.

2. Formules arithmétiques et algébriques : preuves sans mots

2.3. Formules algébriques (1)

Pour les identités, remarquables ou pas, on peut faire de même **(voir pôle 2 panneau 3 et catalogue)**.

Un exemple



De quelle identité s'agit-il ?

2. Formules arithmétiques et algébriques : preuves sans mots

2.3. Formules algébriques (2)

La figure de l'hypoténuse (Chine ancienne) : Un tangram à 9 pièces

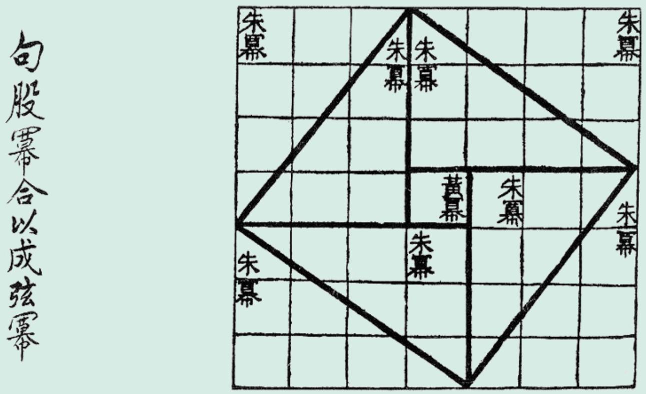


Fig. 1: $\mathbf{(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab}$ et $\mathbf{c^2 = (a – b)^2 + 2ab}$

Fig. 2 : $\mathbf{(a + b)^2 = c^2 + 2ab}$

Fig. 3 : $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$

Avec 2 et 3 : $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

Avec 1 et 3 : $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab}$

3 lectures 2 manipulations

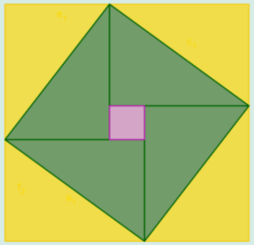


Fig. 1

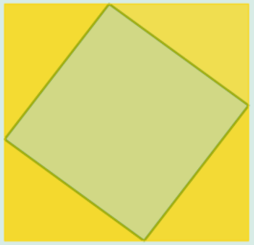


Fig. 2

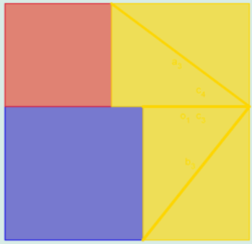


Fig. 3

2. Formules arithmétiques et algébriques : preuves sans mots

Bilan 2

Établir des formules à l'aide de puzzles, c'est se familiariser avec les écritures littérales et les comprendre mieux.
C'est se doter d'un outil de mémorisation et d'heuristique.

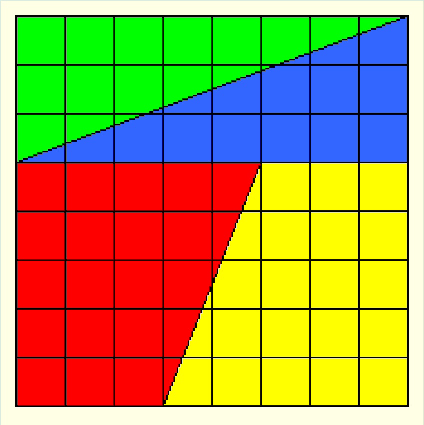
3. Paradoxes : le raisonnement à l'épreuve

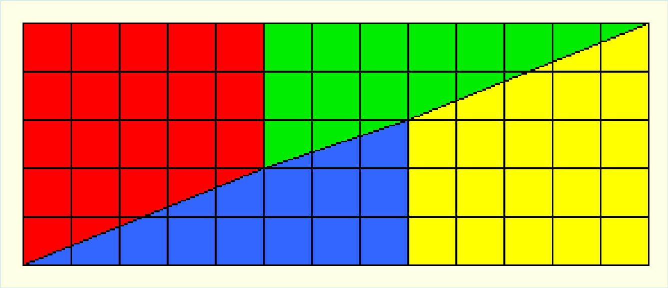
3.1 Le puzzle de la vie : une vidéo

https://www.youtube.com/watch?v=st2DcdiHaS0

3. Paradoxes : le raisonnement à l’épreuve

3. 2. Problème d’alignement (1) : 64 = 65 (Lewis Carroll)





3/5 **8/13**

Bilan

-Vérifier les alignements (voir aussi triangle de Curry **catalogue**, Abū l-Wafā’ **pôle 3**, le loculus d’Archimède **pôle 1**)

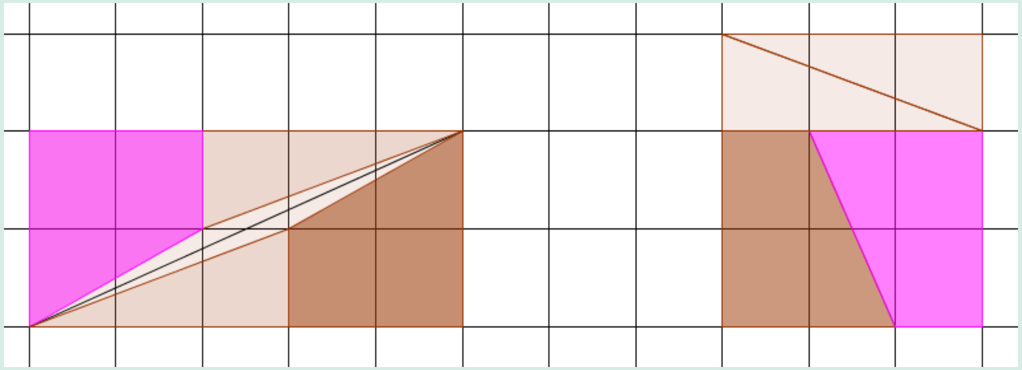
- Le problème de l’alignement : un problème qui vit dans le travail sur les puzzles (de la somme des angles au théorème de Bézout)

3. Paradoxes : le raisonnement à l'épreuve

3. 2. Problème d'alignement (2) : *approfondir*

La suite de Fibonacci : **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …**

1, 2, 3, 5 : **9 = 10** et ça se voit



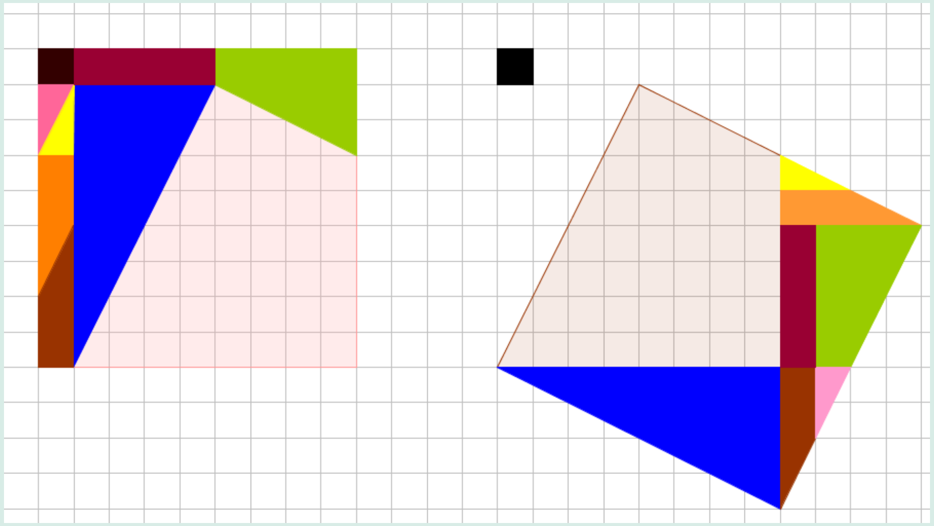
3, 5, 8, 13 : **64 = 65**

8, 13, 21, 34 : **441 = 442** et c'est impossible à voir

La clé : $u_{n-1}u_{n+1} = u_n^2 \pm 1$ (une propriété de la suite de Fibonacci)

3. Paradoxes : le raisonnement à l'épreuve

3.3. Problème d'aire : le carré de Marie-Noëlle



Bilan

- Comment savoir qu'une figure est un carré ? (voir aussi Abū l-Wafā' **pôle 3**)
- Approfondir : fabriquer d'autres puzzles paradoxaux

3. Paradoxes : le raisonnement à l'épreuve

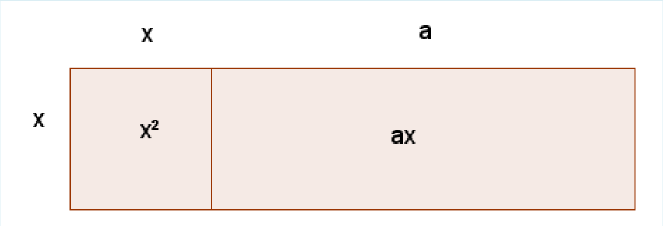
Bilan 3

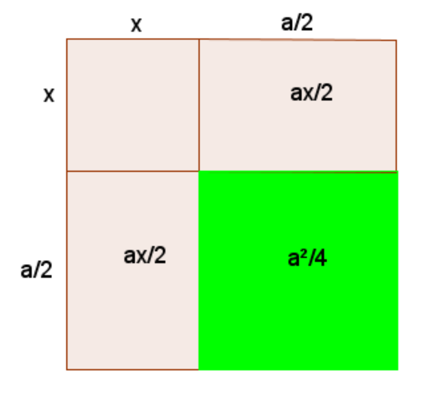
Les puzzles paradoxaux nous rappellent que raisonnement et preuve sont sans cesse présents dans la manipulation, mais ont parfois besoin d'être explicités.

4. Résolution d’équations : la géométrie ressource de l’algèbre

4.1. Résoudre $x^2 + ax = b$ (1)

2 rectangles → 1 découpage en 2 → 1 manipulation → 1 **gnomon** → 1 carré





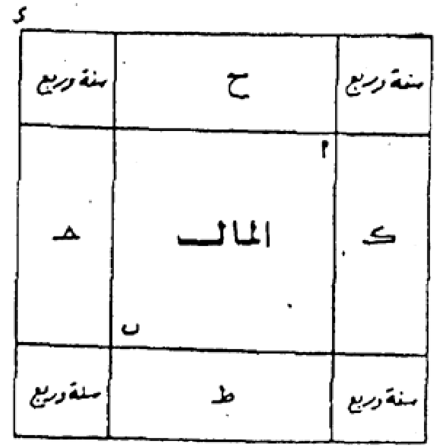
$$\mathbf{(x + a/2)^2 = b + a^2/4}$$

4. Résolution d'équations : la géométrie ressource de l'algèbre

4.1. Résoudre $x^2 + ax = b$ (2)

Ou bien un découpage en 4 pour faire une **croix**

مربع مجهول الأضلاع وهو المال الذى نريد أن نعرفه ونعرف جذره وهو سطح
اب وكل ضلع من اضلاعه فهو جذره وكل ضلع من أضلاعه إذا ضربته فى عدد
من الأعداد فما بلغت الأعداد
فهى اعداد جذور كل جذر
مثل جذر ذلك السطح فلما
قيل إن مع المال عشرة أجذاره
اخذنا ربع العشرة وهو اثنان
ونصف وصيرنا كل ربع منها
مع ضلع من اضلاع السطح
فصار مع السطح الأول الذى
هو سطح اب اربعة سطوح
متساوية طول كل سطح منها
مثل جذر سطح اب وعرضه اثنان ونصف وهى سطوح ح ط ك ه
فحدث سطح متساوى الاضلاع مجهول أيضا ناقص فى زواياه الأربع فى



كل زاوية من النقصان اثنان ونصف فى اثنين ونصف فصار الذى يحتاج
إليه من الزيادة حتى يتربع السطح اثنان ونصف فى مثله أربع مرات ومبلغ
ذلك جميعه خمسة وعشرون. وقد علمنا أن السطح الأول الذى هو سطح المال
والأربعة السطوح التى حوله وهى عشرة أجذار هى تسعة وثلاثون من العدد.
فاذا زدنا عليها الخمسة والعشرين التى هى المربعات الأربع التى هى على زوايا سطح
اب تم تربيع السطح الأعظم وهو سطح ده وقد علمنا أن ذلك كله أربعة
وستون وأحد أضلاعه جذره وهو ثمانية فاذا نقصنا من الثمانية مثل ربع العشرة
مرتين من طرفى ضلع السطح الأعظم الذى هو سطح ده وهو خمسة بقى من
ضلعه ثلاثة وهو جذر ذلك المال. وإنما نصفنا العشرة الأجذار وضربناها فى
مثلها وزدناها على العدد الذى هو تسعة وثلاثون ليتم لنا بناء السطح الأعظم
بما نقص من زواياه الأربع لأن كل عدد يضرب ربعه فى مثله ثم فى أربعة
يكون مثل ضرب نصفه فى مثله فاستغنينا بضرب نصف الأجذار فى مثلها عن
الربع فى مثله ثم فى أربعة وهذه صورته.

al-Khwārizmī (IXe s.)

4. Résolution d’équations : la géométrie ressource de l’algèbre

4.2. Une prouesse au 16e siècle

Les mathématiciens italiens résolvent l’équation du troisième degré : **$x^3 + px = q$** en découpant un cube (**voir catalogue pp. 66-67**)

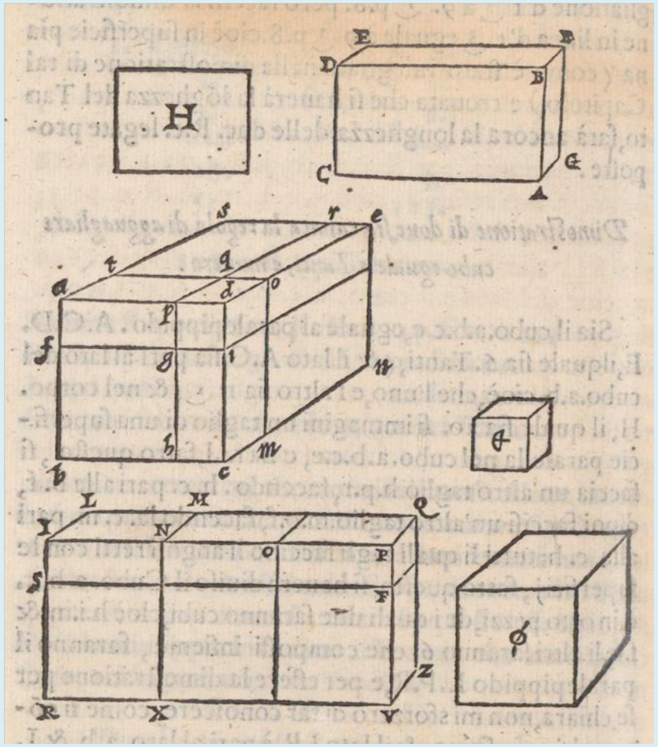
$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$

$x = a - b,\ 3ab = p\,, \qquad a^3 - b^3 = q$

Reste à trouver 2 nombres connaissant leur produit et leur différence

$$\begin{cases} a^3 b^3 = \dfrac{p^3}{27} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Et $x = a - b$



Bombelli (*Algebra, 1572)*

4. Résolution d’équations : la géométrie ressource de l’algèbre

Bilan 4

Certaines transformations des écritures algébriques qui permettent de résoudre les équations sont issues de décompositions et recompositions de figures qui relèvent de l’art des puzzles.

Ce sont bien souvent elles qui ont servi à établir les formules que nous connaissons, et que nous démontrons maintenant autrement mais en ayant perdu le sens de ces transformations.

5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l'histoire

Peut-on construire un carré d'aire égale à celle d'une ou plusieurs figures données ?

3 exemples célèbres :

- la duplication du carré
- la quadrature du cercle
- le théorème de « Pythagore »

5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l'histoire

5.1. La quadrature d'un polygone (1)

Le triangle de Dudeney : un puzzle articulé



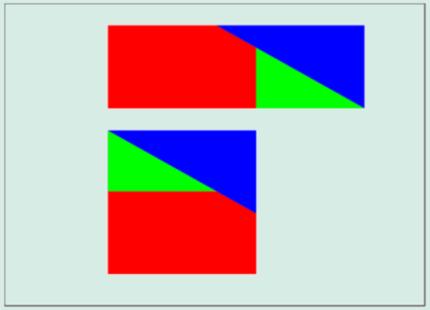
Voir pôle 5

5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l'histoire

5.1. La quadrature d'un polygone (2)

Un polygone quelconque

Toujours possible : théorème de **Bolyai-Gerwien-Wallace**
Polygone $\rightarrow$ rectangle $\rightarrow$ carré
La dernière étape : Euclide II 14 + découpage



Sauriez-vous réaliser et justifier le découpage ?

Des questions

- Quel est le nombre minimum de pièces ?
- Pour le triangle, 4 est-il ce minimum ?
- Peut-on dans tous les cas réaliser un puzzle articulé ?

Oui : 2008 !

5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l'histoire

5.2. Avec des carrés faire un carré (1)

(thème du pôle 3 de l'exposition)

Avec des carrés égaux : (les cas faciles 4, 9, … : les nombres carrés)

– 2 carrés (*Ménon* de Platon)

En ne découpant qu'un carré, ou …

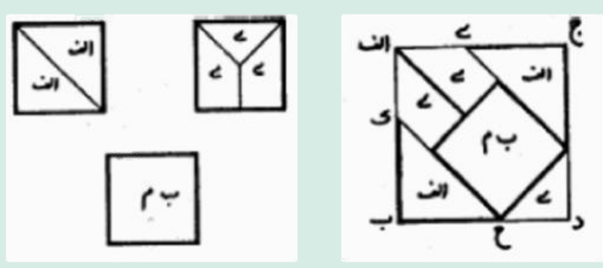
5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l'histoire

5.2. Avec des carrés faire un carré (2)

(Thème du pôle 3 de l'exposition)

Avec des carrés égaux : (les cas faciles 4, 9, … : les nombres carrés)

– 3 carrés (Abū l-Wafā' (940-988))



Inexact (en 6 pièces)

Abū l-Wafā' (en 9 pièces)

Articulé en 7 pièces (Frederickson, 2002)

Blanvillain en 6 pièces (non convexes, 2010)

(voir catalogue pp. 85-90)

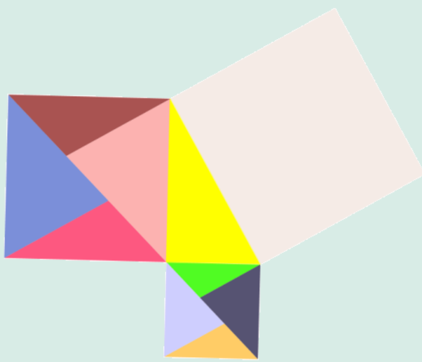
Voir Repères IREM n°93, article de Marc Moyon (http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/WR/IWR13019/IWR13019.pdf)

5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l'histoire

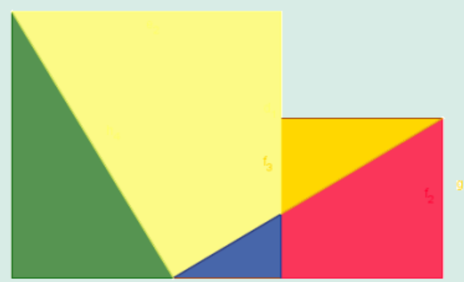
5.2. Avec des carrés faire un carré (3)

(thème du pôle 3 de l'exposition)

Avec 2 carrés de tailles inégales (théorème de Pythagore)



Léonard de Vinci (8 pièces)



Clairaut (5 pièces articulables)

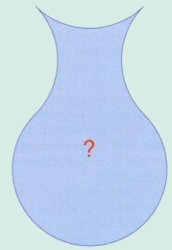
Périgal
(en ne coupant qu'un carré)

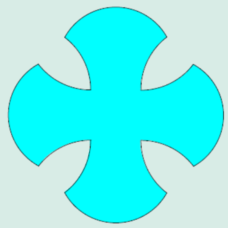
[Périgal : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/pythagor/textes/perigal.htm]

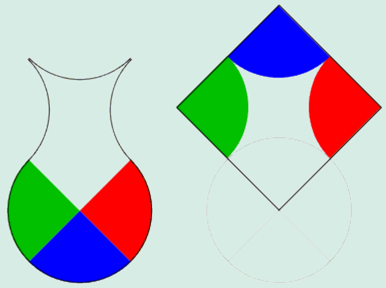
5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l’histoire

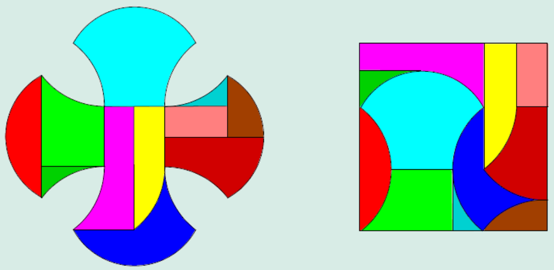
5.3. Avec des figures courbes faire un carré (1)

Vase, croix grecque …







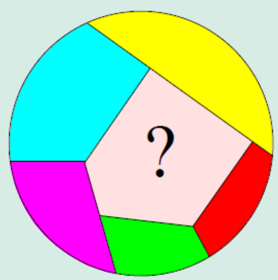


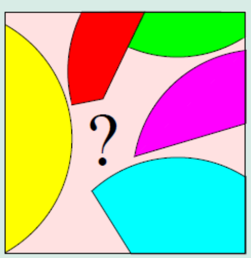
Vincent Borrelli

5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l'histoire

5.3. Avec des figures courbes faire un carré (2)

Le cercle : impossible ? Vraiment ?





Problème posé par le célèbre logicien Tarski en 1925

Réponse
Oui : Laczkovich (1990)

mais sans procédé de construction effective (10^{50} pièces !)

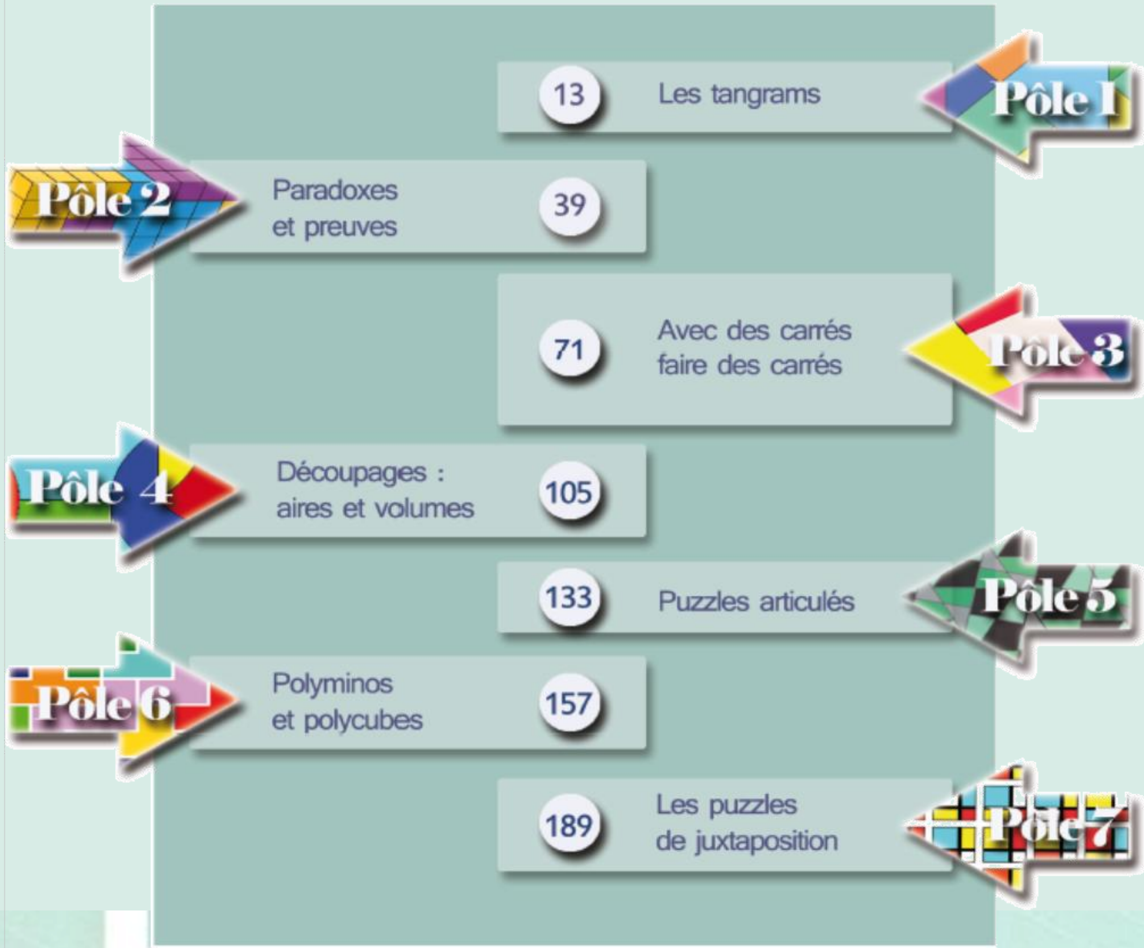
5. La quadrature des figures : un problème qui a traversé l’histoire

Bilan 5

Les puzzles : un moyen de réaliser la quadrature des figures, même quand elle est impossible à la règle et au compas …
et de faire des mathématiques de la maternelle à l’université.

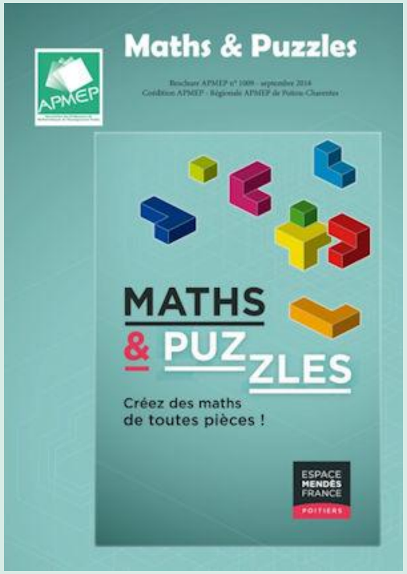
Conclusion

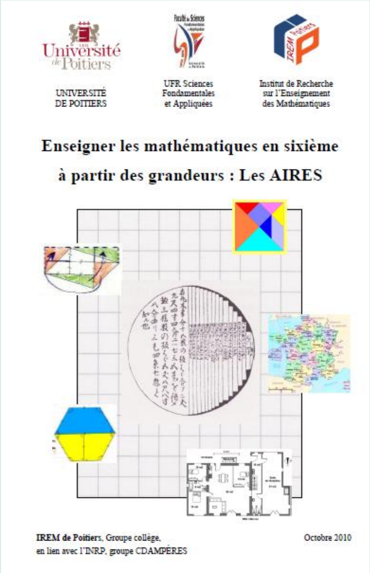
L’exposition, son catalogue, son matériel (1)



Conclusion

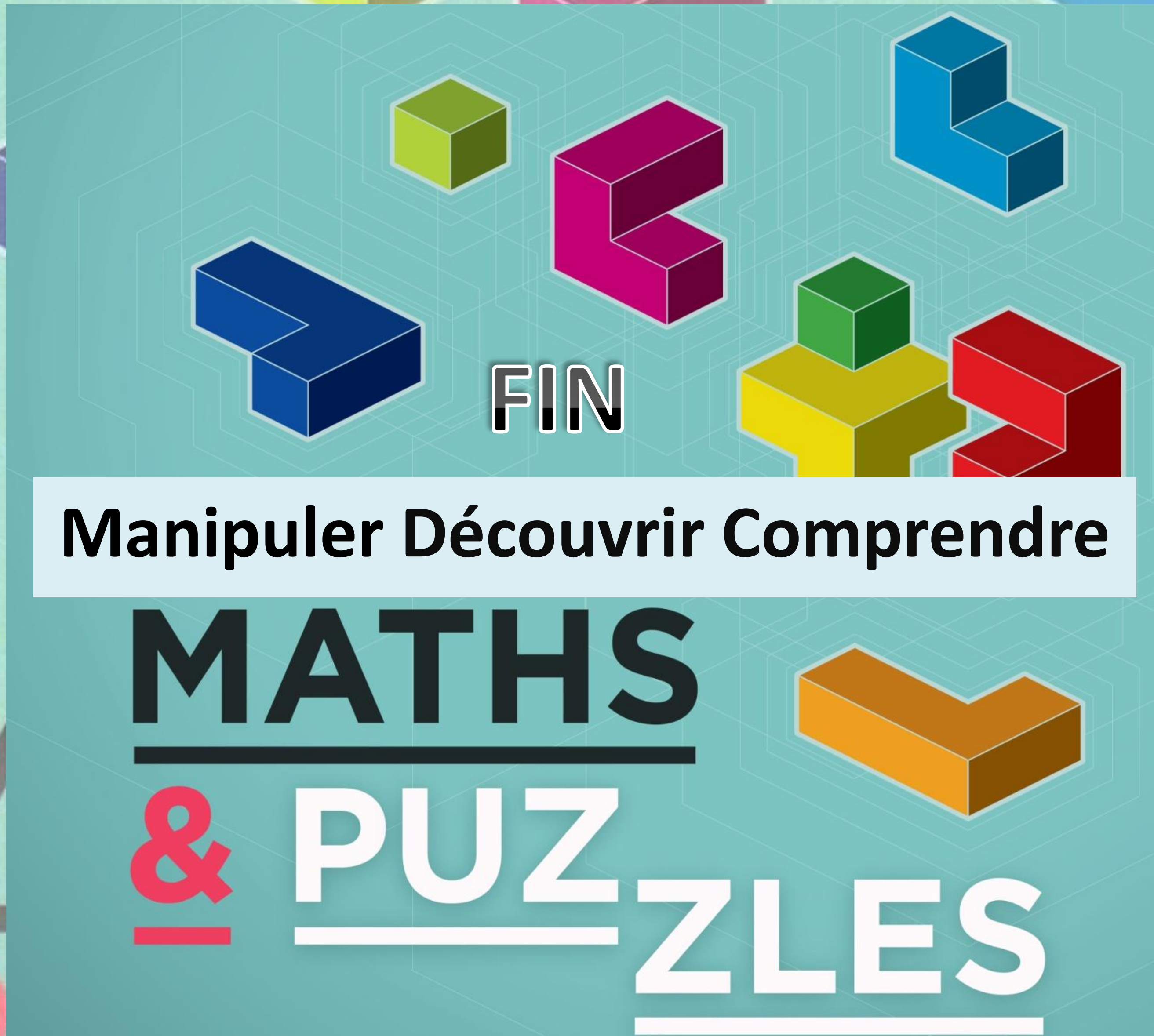
L’exposition, son catalogue, son matériel (2)





Une exposition que l’on peut louer :
http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article284

Un fabricant de matériel en Limousin : François Célèrier, professeur de mathématiques à la retraite, créateur et fabricant de jeux en bois 87380 Magnac-Bourg (https://www.youtube.com/watch?v=wy5fX6enwYE)


FIN
Manipuler Découvrir Comprendre
MATHS
& PUZZLES

Tetris