

## Arithmétique au quotidien :

### De l'utilisation de l'arithmétique à la détection des erreurs :

Si on résume :

#### 1 Activité : Les billets de banque

Les billets en euros sont numérotés de façon astucieuse. Les numéros se présentent sous la forme d'une lettre suivie de 11 chiffres ou de deux lettres suivies de 10 chiffres (nouvelles coupures).

Il faut savoir aussi que chaque lettre, qui débute le numéro du billet, correspond au pays émetteur du billet. Ainsi :

U correspond à la France,

V correspond à l'Espagne,

Z correspond à la Belgique, etc.

Remplaçons d'abord la lettre par un nombre à deux chiffres indiqué dans le tableau suivant :

A = 11	B = 12	C = 13	D = 14	E = 15	F = 16	G = 17	H = 18
I = 19	J = 20	K = 21	L = 22	M = 23	N = 24	O = 25	P = 26
Q = 27	R = 28	S = 29	T = 30	U = 31	V = 32	W = 33	X = 34
Y = 35	Z = 36						

Nous obtenons alors un nombre de 13 chiffres. Notons-le  $N$ .

*Ce nombre  $N$  est un multiple de 9.*



$$3 + 1 + 1 + 2 + 9 + 1 + 3 + 9 + 5 + 2 + 8 + 7 + 1 + 2 = 54 \text{ et } 5 + 4 = 9$$

## 2 Activité : Code ISBN

Au dos de chaque livre, magazine, on trouve deux codes L'ISBN et le "code-barre" ISBN-EAN.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{ISBN } 0-901690-54-6 & & \text{langue} & & \text{8 chiffres} & & \\
 N = & \underbrace{0} & & \underbrace{901690} & \underbrace{54} & & \underbrace{6} \\
 & & & \text{partie2} & \text{partie3} & & \text{clé}
 \end{array}$$

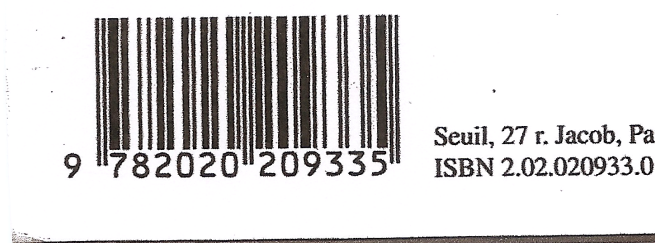
On pose  $D = 090169054$ . ( le code sans la clé ) et on calcule  $S(D) = (1 \times 0) + (2 \times 9) + (3 \times 0) + (4 \times 1) + (5 \times 6) + (6 \times 9) + (7 \times 0) + (8 \times 5) + (9 \times 4) = 182$ .

182 a pour reste 6 dans la division par 11.

Donc la clé d'ISBN est bien  $cl = 6$ .

Le numéro ISBN avec sa clé, noté  $N$  ( $N = 10D + cl$ ) vérifie :

$$S(N) = S(D) + 10 \times cl \equiv 0 \pmod{11} \text{ (en remplaçant, si besoin } X \text{ par } 10)$$



Un nombre naturel  $n$  est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres l'est.

Quel est le reste de la division de 78987 par 11 ?

C'est celui de  $7 - 8 + 9 - 8 + 7 = 7$  par 11.

C'est donc 7.

### 3 Activité : Le numéro « INSEE »

Ce numéro est un nombre composé de 13 chiffres suivis d'une clé de contrôle de 2 chiffres :

Sexe 1 ou 2	Année de naissance	Mois de naissance	Département de naissance	Commune de naissance (numéro INSEE)	Ordre de naissance dans le mois	Clé de contrôle
Un chiffre 1	deux chiffres 56	deux chiffres 09	deux chiffres 30	trois chiffres 567	trois chiffres 057	deux chiffres ??

Considérons le NIR suivant :

$$N = \overbrace{2600276632002}^D \underbrace{34}_{cl}$$

La clé  $cl$  est le nombre tel que  $D + cl = 2600276632036$  soit un multiple de 97 et  $1 \leq cl \leq 97$ .

#### Exemples avec deux méthodes

$$N = 1234567890$$

Repérage des blocs →	$N = 12 \parallel 34 \parallel 56 \parallel 78 \parallel 90$
Écriture selon les puissance de 100 →	$N = 12 \times 100^4 + 34 \times 100^3 + 56 \times 100^2 + 78 \times 100 + 90$
Remplacement des blocs par les restes →	$12 \times 3^4 + 34 \times 3^3 + 56 \times 3^2 + 78 \times 3 + 90$
Execution des opérations →	2718
Repérage des blocs →	27   18
Écriture selon les puissance de 100 →	$27 \times 100 + 18$
Remplacement des blocs par les restes →	$18 + 27 \times 3$
Exécution des opérations →	99
Division euclidienne →	2

Repérage des blocs →	$N = 12345678 \times 100 + 90$
Remplacement de 100 par 3 →	$N_1 = 12345678 \times 3 + 90$
→	$N_1 = 3703724$
Repérage des blocs →	$N_1 = 37037 \times 100 + 24$
Remplacement de 100 par 3 →	$N_2 = 37037 \times 3 + 24$
→	$N_2 = 1111137$
Repérage des blocs →	$N_2 = 11111 \times 100 + 37$
Remplacement de 100 par 3 →	$N_3 = 11111 \times 3 + 37$
→	$N_3 = 33370$
Repérage des blocs →	$N_3 = 333 \times 100 + 70$
⋮→	$N_4 = 1069 = 10 \times 100 + 69$
⋮→	$N_5 = 10 \times 3 + 69 = 99$
⋮→	$N_6 = 2$

## 4 Activité : Numéro « SIREN »

### Vérification du numéro SIREN et constitution de la clé

#### Vérification

Soit  $N = 7\ 3\ 2\ 8\ 2\ 9\ 3\ 2\ 0$

(numéro SIREN complet avec sa clé).

On peut schématiser le calcul de la vérification de la clé associée à  $N$  comme suit (règle de Luhn).

$$N = \boxed{7}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{2}\ \boxed{9}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{0}$$

$$\boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{0} \text{ Somme } \boxed{7} + \boxed{2} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{0} = 14$$

$$\boxed{\phantom{0}}\ \boxed{3}\ \boxed{\phantom{0}}\ \boxed{8}\ \boxed{\phantom{0}}\ \boxed{9}\ \boxed{\phantom{0}}\ \boxed{2}\ \boxed{\phantom{0}} \times 2 \quad \begin{matrix} 6 & 16 & 18 & 4 \\ \hline \end{matrix}$$

$$\text{Somme de chiffres } 6 + 7 + 9 + 4 = 26$$

---


$$14 + 26 = 40 \equiv 0 [10]$$

On a calculé

$$L(N)$$

On a la propriété

*Si  $N$  est un numéro SIREN d'une entreprise alors*

$$L(N) \equiv 0 [10]$$

Autrement dit

$$\text{Si } L(N) \equiv 0 [10]$$

alors le nombre  $N$  peut-être le numéro SIREN d'une entreprise ; sinon, non.

#### Construction de la clé

Sur un exemple et avec le même type de formalisme que dans l'exemple précédent on obtient :

$$D = 5\ 1\ 2\ 8\ 2\ 9\ 3\ 3$$

$$10D = \boxed{5}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{2}\ \boxed{9}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{0}$$

$$\boxed{5}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{0} \text{ Somme } \boxed{5} + \boxed{2} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{0} = 12$$

$$\boxed{\phantom{0}}\ \boxed{1}\ \boxed{\phantom{0}}\ \boxed{8}\ \boxed{\phantom{0}}\ \boxed{9}\ \boxed{\phantom{0}}\ \boxed{3}\ \boxed{\phantom{0}} \times 2 \quad \begin{matrix} 2 & 16 & 18 & 6 \\ \hline \end{matrix}$$

$$\text{Somme de chiffres } 2 + 7 + 9 + 6 = 24$$

---


$$12 + 24 = 36 \equiv 6 [10]$$

et donc la clé vaut 4.

## 5 Et alors ?

### 5.1 Billets

- Si on code les lettres de 1 à 26, suivant leur position dans l'alphabet, on obtient que  $N$  à pour reste 8 dans la division euclidienne par 9? Expliquez pourquoi.
- Si l'on considère que le chiffre des unités du nombre  $N$  précédemment construit, est une clé de contrôle, comment peut-on la construire? Pourquoi?
- Soit  $N = 345678$ . Trouvez un nombre  $N'$  obtenu en modifiant deux chiffres du nombre  $N$  et tel que  $N - N'$  soit divisible par 9. Justifiez votre choix. (une solution  $N' = 975678$ ).
- Et un critère de divisibilité par 8?

### 5.2 ISBN

- Quels sont parmi les numéros suivants ceux qui sont des numéros ISBN?  
 $2 - 8769 - 4033 - 7$ ;  $0 - 486 20498 - 7$ ;  $0 - 8228 - 8315 - 8$ .
- Critère de divisibilité par 11 : Quelques pistes de travail  
Soit  $n = 6321$   
Trouver les multiples de 11 les plus proches de 10,100,1000?  
Écrire  $n$  en faisant intervenir ces multiples?  
Soit  $n = 9856$  on essaye de faire la même chose ....
- Peut-on trouver 2 numéros ISBN différents sur un chiffre ayant la même clé?
- Soit  $D = 345679$ ;  $cl = 7$ . Trouvez  $D'$  différent de  $D$  sur deux chiffres et tel que sa clé soit égale à 7.
- Permutation de deux chiffres dans les numéros ISBN : Peut-on dire quelque chose, dans ce cas?

### 5.3 NIR

Soient  $N$  et  $N'$  deux nombres choisis de manière à ce que  $N$  et  $N'$  diffèrent de deux chiffres non consécutifs dans leur écriture en base 10. Ce choix correspond à la situation où  $N$  est le bon NIR à saisir et  $N'$  est le nombre saisi qui comporte une erreur sur deux chiffres.

$$N = \overbrace{2600276632002}^D \underbrace{34}_{cl} \qquad N' = \overbrace{2601276662002}^{D'} \underbrace{34}_{cl}$$

Testez la clé.

$$N = \overbrace{2600276632002}^D \underbrace{34}_{cl} \qquad N' = \overbrace{2600286332002}^{D'} \underbrace{34}_{cl}$$

Que se passe-t-il? Pourquoi?

### 5.4 SIREN

Vérifiez le code SIREN suivant : SIREN 596 145 524.