Critères de divisibilité

Equipe de Recherche et de Réflexion
Arithmétique au Lycée

Année 2006-2008

Critères de divisibilité

Pré-requis :
Seconde : Notions de divisibilité sur les entiers
- **Propriété 1** : Soit a, b, c trois entiers relatifs. Si a divise b et $b+c$, alors a divise c.
  Preuve : Si a divise b et $b+c$, alors il existe k_1 et k_2 tels que $b = k_1 a$ et $b+c = k_2 a$.
  Donc $c = (b+c) - b = k_2 a - k_1 a = (k_2 - k_1)a$ et a est un diviseur de c.
- Décomposition en produit de facteurs premiers

Terminale S :
- Ecriture des entiers dans la base b, où $b \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$
- Utilisation du modulo
- Théorème de Gauss

Un **critère de divisibilité** est un moyen technique permettant de déterminer si un nombre en divise un autre. Naturellement, il n'y a pas unicité du critère ; ainsi, nous proposerons parfois différentes approches pour un même critère.

Les preuves sont faites sur des nombres quelconques mais de taille fixée. La généralisation à tous les nombres n'est qu'une question de notation ; cette dernière serait alors difficile à assimiler pour les élèves.

La première partie n'est pas reproduite dans la partie réservée aux élèves de Terminale S. Son contenu peut naturellement être repris et adapté aux nouvelles notations.

Cette fiche n'est pas un tout ; on peut en sélectionner une partie à sa convenance.

1 Critères en Seconde

Parlons-nous le même langage ?
Les questions qui suivent permettont de faire une petite mise au point :
- Qu'est-ce qu'un chiffre ? Un nombre ?
- 5 est-il un nombre ?
- Dans 234, quel est le chiffre des dizaines ?

1.1 Notation

Soit n un entier naturel ; il existe $k \in \mathbb{N}$ et k chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tels que

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_2 100 + a_1 10 + a_0 \text{ est noté } n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$$

La juxtaposition de ces k chiffres est l'écriture du nombre n (en base 10). Le chiffre a_0 est le chiffre des unités, a_1 celui des dizaines, a_2 celui des centaines, etc.

Exemple : Soit $n = 35765$ alors $n = \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ avec $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 7$, $a_3 = 5$, $a_4 = 3$.

Exercice 1.1.1 Pour se familiariser avec la notation :

1. Soit $n = 347526$. Donner a_3.
2. Si n est défini par $a_0 = a_2 = 2$, $a_1 = 5$ et $a_3 = 7$, donner le nombre n.
3. Redécomposer 213 en *somme* de puissances de 10.

Exercice 1.1.2 Introduction de l'unicité de l'écriture d'un nombre :
A quelles conditions sur a, b, c, les nombres $\overline{abc}$ et $\overline{cba}$ sont égaux ?

Exercice 1.1.3 Soit $n = \overline{mcdu}$. Montrer que $n = \overline{mcd} \times 10 + u$.

Exercice 1.1.4 Parmi les nombres suivants, lesquels sont formés de 3 chiffres identiques : 123, 111, 300, 777. Ecrire de façon formelle un nombre formé de 3 chiffres identiques.
Vérifier que les nombres suivants sont divisibles par 37 :

1. Les nombres formés de 3 chiffres identiques.
2. Les nombres formés de 2 séquences de 3 chiffres identiques.

Expliquer.
***Indication** : Mettre en facteur le nombre 111 et constater que 37 divise 111*

Exercice 1.1.5 Vérifier que 20072007 et 17921792 sont divisibles par 73. Expliquer, puis donner deux autres nombres de 8 chiffres multiples de 73.
***Indication** : Mettre en facteur 10001.*

Exercice 1.1.6 Donner plusieurs nombres ayant 5 pour chiffre des unités et calculer leur carré. Quels sont leurs chiffres des dizaines ? Le démontrer.

1.2 Quelques critères simples

Critère de divisibilité par 5 :

$$n \text{ est divisible par } 5 \quad \Leftrightarrow \quad \text{son chiffre des unités est } 0 \text{ ou } 5$$

Preuve : Soit $n = \overline{abcd}$. Comme 5 divise 10 et $n = \overline{abc} \times 10 + d$ (Exercice 1.1.3), alors 5 divise $\overline{abc} \times 10$. La Propriété 1 donne :

$$5 \text{ divise } n \quad \Leftrightarrow \quad 5 \text{ divise } d$$

Les seuls chiffres divisibles par 5 sont 0 et 5, d'où le résultat.

Critère de divisibilité par 4 : 4 divise $\overline{a_1 a_0}$ ou encore 4 divise $2a_1 + a_0$

Preuve : Soit $n = \overline{abcd}$. Comme $10 = 2 \times 4 + 2$ et $100 = 25 \times 4$, nous avons

$n = \overline{ab} \times 100 + c10 + d$ donc $n = \overline{ab} \times 25 \times 4 + \overline{cd}$ et $n = (\overline{ab} \times 25 + c \times 2) \times 4 + 2c + d$

La Propriété 1 donne que 4 divise n si et seulement si 4 divise $\overline{cd}$ ou encore si et seulement si 4 divise $2c + d$.

Exercice 1.2.1 Déterminer les valeurs du chiffre x telles que le nombre $546x8$ soit un multiple de 4.

Exercice 1.2.2 Etablir le **critère de divisibilité par 8** suivant :

$$8 \text{ divise } \overline{abcde} \text{ si et seulement si } 8 \text{ divise } 4c + 2d + e.$$

***Indication** : Utiliser le fait que* $10 = 8 + 2$, $100 = 12 \times 8 + 4$ *et* $1000 = 125 \times 8$.

1.3 Petite généralisation

Idée générale : En pratique, trouver un critère de divisibilité par un nombre d revient à trouver une relation exploitable entre d et les puissances de 10.
Exemple :

- Pour 5, nous avons remarqué que 5 divise 10 et donc aussi que 5 divise 10^k pour tout k dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi, grâce à la Propriété 1, il suffit de considérer uniquement le chiffre des unités pour établir un critère.

- Pour 4, nous avons : 4 divise 100 ...

Critère de divisibilité par 9 : 9 divise $a_k + a_{k-1} + \cdots a_2 + a_1 + a_0$

n est divisible par 9 $\quad\Leftrightarrow\quad$ la somme des chiffres de son écriture est divisible par 9

Preuve : Soit $n = \overline{abcd}$. Montrons que 9 divise $n - (a + b + c + d)$. On note que $10 = 9 + 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^k - 1$.

$$\begin{aligned} n - (a + b + c + d) &= a10^3 + b10^2 + c10 + d - a - b - c - d \\ &= a(10^3 - 1) + b(10^2 - 1) + c(10 - 1) \end{aligned}$$

Le nombre 9 divise chacun des trois termes de la somme obtenue ; donc 9 divise $n - (a + b + c + d)$. La Propriété 1 permet de conclure :

$$9 \text{ divise } n \quad\Leftrightarrow\quad 9 \text{ divise } a + b + c + d$$

Exercice 1.3.1 Etablir le **critère de divisibilité par 3** suivant

$$3 \text{ divise } \overline{abcde} \text{ si et seulement si } 3 \text{ divise } a + b + c + d + e.$$

Indication : *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, 3 divise $10^k - 1$*

Exercice 1.3.2 Critère de divisibilité par 11
Soit $n = \overline{abcd}$ et $m = a - b + c - d$ la somme alternée de ses chiffres.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, 11 divise $10^k - (-1)^k$
2. Montrer que $n + m$ est un multiple de 11.
3. En déduire que

   n est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres l'est.

Exercice 1.3.3 Les nombres 123, 1234 sont-ils divisibles par 6 ?
Indication : *Utiliser la décomposition de 6 en produit de facteurs premiers*

2 Critères en Terminale S (spécialité)

2.1 Notation

L'expression mathématique "$a = b \pmod{c}$" se dit "a est congru à b modulo c" et est définie par : il existe un entier relatif k tel que $a = b + k \times c$.
Ainsi, on note que le nombre a divise b se traduit par $b = 0 \pmod{a}$.

Soit b et n, deux entiers naturels ; il existe $k \in \mathbb{N}$ et k nombres compris entre 0 et $b - 1$, $a_1, a_2, \ldots a_k$ tels que

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0}^{\mathrm{b}} = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_2 b + a_1 b + a_0$$

La juxtaposition de ces k nombres est l'écriture du nombre n en base b. Dans le cas de la base 10 ou si le contexte est clair, on s'autorise à omettre la notation de la base dans l'écriture du nombre.

Exemple : Soit $n = \overline{1001101}^2$ alors $n = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 98 = \overline{98}^{10}$.
Exemple : Soit $n = \overline{4321}^8 = \overline{6403}^7 = \overline{14241}^6 = \overline{33012}^5 = \overline{123101}^4 = \overline{10002121}^3 = \overline{100011010001}^2 = \overline{2257}^{10} = 2257$.

2.2 Quelques critères originaux

Travaillons sur un **critère de divisibilité par 7** en restant conforme à la première partie :

Chercher un lien intéressant entre 7 et une puissance de 10 : 7 divise 1001

Ainsi, on a $10^3 = -1 \pmod 7$. On en déduit :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad 10^{3k} = (-1)^k \pmod 7 \text{ ou encore } 7 \text{ divise } 10^{3k} - (-1)^k$$

Critère de divisibilité par 7 : 7 divise $\cdots \overline{a_{11}a_{10}a_9} - \overline{a_8a_7a_6} + \overline{a_5a_4a_3} - \overline{a_2a_1a_0}$

n est divisible par 7 $\Leftrightarrow$ la somme alternée des groupes de 3 chiffres de son écriture l'est

Preuve : (seconde) Soit $n = \overline{gfedcba}$.; posons le nombre $m = -g + \overline{fed} - \overline{cba}$ et montrons que 7 divise $n + m$:

$$\begin{aligned} n + m &= \overline{gfedcba} \\ &= g \times 10^6 + \overline{fed}10^3 + \overline{cba} - g + \overline{fed} - \overline{cba} \\ &= g \times (10^6 - 1) + \overline{fed}(10^3 + 1) \end{aligned}$$

Or 7 divise chacun des deux termes de la somme obtenue ; donc 7 divise $n + m$. La Proppriètè 1 permet de conclure :

$$7 \text{ divise } n \quad \Leftrightarrow \quad 7 \text{ divise } -g + \overline{fed} - \overline{cba}$$

Preuve : (terminale) Soit $n = \overline{gfedcba} = g10^6 + \overline{fed}10^3 + \overline{cba}$. Nous avons $10^6 = 1 \pmod 7$ et $10^3 = -1 \pmod 7$, donc :

$$n = g - \overline{fed} + \overline{cba} \pmod 7$$

Conclusion : 7 divise n si et seulement si 7 divise $g - \overline{fed} + \overline{cba}$.

En pratique, ce critère permet de réduire facilement tout nombre à un nombre inférieur à 1000. Ainsi, la recherche de divisibilité restante est largement accessible. Toutefois, on peut alourdir le critère en rajoutant :

$$7 \text{ divise } \overline{cba} \quad \Leftrightarrow \quad 7 \text{ divise } 2c + 3b + a$$

Indication : $100 = 2 \pmod 7$ *et* $10 = 3 \pmod 7$

Exercice 2.2.1 Déterminer les valeurs des chiffres x et y telles que 4534x95y5 soit divisible par 7.

Exercice 2.2.2 Déterminer un **critère de divisibilité par 13, 33, 73**.
Indication *: On a* $1000 = -1 \pmod{13}$, $100 = 1 \pmod{33}$ *et* $10000 = -1 \pmod{73}$

Exercice 2.2.3 Dire si les nombres n=296235480, m=26750955 sont divisibles par 10, 12, 33 et 165.

Exercice 2.2.4 Déterminer les valeurs du chiffre x telles que 2675x955 soit divisible par 15.

Exercice 2.2.5 Donner un nombre supérieur à 100 qui soit divisible par 4 et par 6 mais pas par 24. Expliquer ce résultat en relation avec le Lemme de Gauss.

2.3 Algorithmes en guise de critères

Ici, nous mettons en avant une technique qui consiste à itérer une régle de calcul jusqu'à ce que la divisibilité soit facile voire évidente.

Procédons sur le cas du **critère de divisibilité par 7**.

Cherchons un lien intéréssant entre 7 et un multiple de 10 : 7 divise $2 \times 10 + 1$

Critère de divisibilité par 7 : Prendre le nombre sans le chiffre des unités, auquel on retire 2 fois l'unité enlevée. Ainsi de suite jusqu'à obtenir un multiple évident.

$$7 \text{ divise } \overline{gfedcba} \quad \Leftrightarrow \quad 7 \text{ divise } \overline{gfedcb} - 2a$$

Preuve : Soit $n = \overline{dcba}$. Nous avons l'égalité suivant modulo 7 :

$$n = \overline{dcba} = \overline{dcb} \times 10 + a = \overline{dcb} \times 10 + a - 21a = \overline{dcb} \times 10 - 20a \pmod 7$$

Comme 10 est premier avec 7, le Lemme de Gauss nous permet d'écrire :

$$n = 0 \pmod 7 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{dcb} - 2a = 0 \pmod 7$$

Ce qui est le résultat attendu.

Exemple : Considérons le nombre 16415. Ce nombre est divisible par 7 si et seulement le nombre 1631 $(= 1641 - 2 \times 5)$ l'est, si et seulement si 161 (=163 - 2) l'est, si et seulement si 14 (=16-2) l'est : ce qui est vrai. Donc 16415 est un multiple de 7.

Exercice 2.3.1 Appliquer ce critère de divisibilité par 7 à 12345 et 2345.

Exercice 2.3.2 De la même façon, exhiber un *critère de divisibilité par 11, 13, 17 et 19.*
Indication *: On a* 13 *divise* 39 *et* 17 *divise* 51

Exercice 2.3.3 Voici un **critère de divisibilité par 7**. Appliquer le critère sur l'exemple 287 et justifier son fonctionnement :

> *Multiplier le chiffre de gauche par 3 et l'ajouter au chiffre suivant. Remplacer les deux chiffres utilisés par le résultat. Recommencer jusqu'à obtenir un nombre à un chiffre. Le nombre initial est divisible par 7 si et seulement si le chiffre obtenu est 7.*

2.4 Dans les autres bases

La démarche est exactement la même et certains critères peuvent directement être réinvestis. Par exemple :

Critère de divisibilité par 2 en base 3 :

n est divisible par 2 $\quad \Leftrightarrow \quad$ la somme des chiffres de son écriture en base 3 est divisible par 2

Indication : $2 = -1 \pmod 3$ *similaire à* $9 = -1 \pmod{10}$

Critère de divisibilité par 3 en base 2 :

n est divisible par 3 $\quad \Leftrightarrow \quad$ la somme alternée des chiffres de son écriture en base 2 est divisible par 2

Indication : $3 = 1 \pmod 2$ *similaire à* $11 = 1 \pmod{10}$

Exercice 2.4.1 Déterminer un **critère de divisibilité par 4 et 5 en base 2**.

Proposition de solutions

Solution 1.1.1

1. Si $n = 347526$ alors $a_3 = 7$.
2. Si n est défini par $a_0 = a_2 = 2$, $a_1 = 5$ et $a_3 = 7$, alors $n = 7252$.
3. On a $213 = 2 \times 100 + 10 + 3 \times 1$ ou $213 = 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0$.

Solution 1.1.2 $\overline{abc} = \overline{cba}$ si et seulement si $a = c$.

Solution 1.1.3 $\overline{mcdu} = m\times10^3+c\times10^2+d\times10+u = (m\times10^2+c\times10+d)\times10+u = \overline{mcd}\times10+u$.

Solution 1.1.4 Si n est un nombre formé de 3 chiffres identiques, alors il existe un chiffre a tel que $n = \overline{aaa}$.

1. Soit $n = \overline{aaa}$; alors $n = a \times (100 + 10 + 1) = a \times 111$. Or $111 = 37 \times 3$, donc $n = a \times 3 \times 37$ est un multiple de 37.
2. Les nombres formés de 2 fois 3 chiffres identiques s'écrivent : $\overline{aaabbb}$ avec a, b deux chiffres. Soit $n = \overline{aaabbb}$, on a $n = a\times111\times1000+b\times111 = (a\times1000+b)\times111 = (a\times1000+b)\times3\times37$ qui est donc un multiple de 37.

Solution 1.1.5 On remarque que $20072007 = 2007 \times 10001$ et $17921792 = 1792 \times 10001$. Comme $10001 = 73 \times 137$, ces deux nombres sont des multiples de 73. Il en est de même pour tout nombre de la forme $\overline{abcdabcd}$ comme 12341234 et 43214321.

Solution 1.1.6 Les nombres 15, 245,105 conviennent : $15^2 = 225$, $245^2 = 60025$ et $105^2 = 11025$. Le chiffre de dizaine des carrés est toujours 2.

En fait, il suffit de le montrer sur les nombres s'écrivant avec deux chiffres (< 100), car le chiffre des dizaine d'un carré ne dépent que du chiffre des unité et celui des dizaines. Soit $n = \overline{d5}$:

$$n^2 = (d \times 10 + 5)^2 = d^2 \times 100 + 2 \times d \times 10 \times 5 + 5^2 = (d^2 + d) \times 100 + 25$$

L'écriture du nombre n^2 se termine par 25.

Solution 1.2.1 Le critère de divisibilité par 4 donne :

$$4 \text{ divise } 546x8 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \text{ divise } 2x + 8$$

Comme 4 divise 8, la Propriètè 1 donne que 4 divise $2x$ et donc 2 divise x. Les solutions sont $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Solution 1.2.2 Soit $n = \overline{abcde}$. Comme $10 = 8 + 2$, $100 = 12 \times 8 + 4$ et $1000 = 125 \times 8$, nous avons

$$n - (4c + 2d + e) = \overline{ab} \times 1000 + c(100 - 4) + d(10 - 2) + e - e = \left(\overline{ab} \times 125 + c12 + d\right) \times 8$$

Ainsi, 8 divise $n - (4c + 2d + e)$; la Propriété 1 permet de conclure.

Solution 1.3.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^k - 1$. Nous savons que 3 divise 9, alors pour tout nombre $k \in \mathbb{N}$, 3 divise $10^k - 1$. On montre, comme dans la preuve du critère de divisibilité par 9, que 3 divise $n - (a + b + c + d + e)$. La propriété 1 permet de conclure.

Solution 1.3.2

1. Traitons séparément les cas où k est pair et impair :
   - Cas où $k = 2p$:

   $$10^{2p} - (-1)^{2p} = 10^{2p} - 1 = 1\underbrace{0\ldots0}_{2p \text{ chiffres } 0} - 1 = \underbrace{99\ldots99}_{p \text{ couples de chiffres } 99} = 9 \times 11 \times \underbrace{101...01}_{p \text{ couples de chiffres } "01"}$$

   Donc 11 divise $10^{2p} - (-1)^{2p}$.
   - Cas où $k = 2p + 1$: $10^{2p+1} - (-1)^{2p+1} = (10^{2p} - 1 + 1) \times 10 + 1 = 10 \times (10^{2p} - 1) + 11$

   Les deux termes sont divisibles par 11, donc $10^{2p+1} - (-1)^{2p+1}$ aussi.

2. Travaillons sur l'écriture de $n+m$:

$$\begin{aligned} n+(a-b+c-d) &= a10^3+b10^2+c10+d+a-b+c-d \\ &= a(10^3+1)+b(10^2-1)+c(10+1)+d(1-1) \\ &= a(10^3-(-1)^3)+b(10^2-(-1)^2)+c(10-(-1)) \end{aligned}$$

   Le nombre 11 divise chacun des trois termes de la somme obtenue ; donc 11 divise $n+m$.

3. La Propriètè 1 permet de conclure

$$11 \text{ divise } \overline{abcd} \quad \Leftrightarrow \quad 11 \text{ divise } a-b+c-d$$

Solution 1.3.3 On note que $6 = 2 \times 3$. Comme 2 ne divise par 123, 6 non plus. De plus, 3 ne divise pas 1234 donc 6 non plus.

Solution 2.2.1 On a $4534x95y5 = -453+4x9-5y5 = -549+10(x-y) = 4+3(x-y) \pmod 7$

$$7 \text{ divise } 4534x95y5 \quad \Leftrightarrow \quad 4+3(x-y)=0 \pmod 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-y)=3 \pmod 7$$

D'après le Lemme de Gauss, comme 3 et 7 sont premiers entre eux, l'équation devient

$$x = y \pmod 7$$

Les couples solution sont : $(x, y) \in \{(0;7),(1;8),(2;9),(7;0),(8;1),(9;2)\}$.

Solution 2.2.2 Critères de divisibilité par 13,33,73

- par 13 : on observe que 13 divise 1001 ainsi $1000 = -1 \pmod{13}$: la démarche effectuée pour le critère de divisibilité par 7 peut être entièrement réutilisée.

$$n \text{ est divisible par } 13 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la somme alternée des groupes de 3 chiffres de son écriture l'est}$$

- par 33 : on observe que 33 divise 99 ainsi $100 = 1 \pmod{99}$: On peut s'inspirer de la démarche effectuée pour le critère de divisibilité par 9.

$$n \text{ est divisible par } 33 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la somme des groupes de 2 chiffres de son écriture l'est}$$

- par 73 : on observe que 73 divise 10001 ainsi $10000 = -1 \pmod{73}$: la démarche effectuée pour le critère de divisibilité par 7 peut être adaptée aux groupes de 4 chiffres.

$$n \text{ est divisible par } 73 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la somme alternée des groupes de 4 chiffres de son écriture l'est}$$

  Puis nous pouvons ajouter un test de clôture pour les nombres inférieurs à 10000 :

$$73 \text{ divise } \overline{abcd} \quad \Leftrightarrow \quad 73 \text{ divise } 51a+27b+\overline{cd}$$

Solution 2.2.3 Le Lemme de Gauss est un outil intéressant pour croiser des critères de divisibilité. Nous l'utilisons pour répondre à l'exercice.

- La décomposition en facteurs premiers de 10 est 2×5. Donc, le critère de divisibilité par 10 revient à appliquer celui par 2 puis celui par 5 : le chiffre des unités doit être divisible par 2 et 5 ; donc il est nul. Ainsi, 10 divise n mais pas m.
- On a $12 = 3 \times 4$. Le nombre m ne vérifie pas le critère de divisibilité par 4, car 4 ne divise pas 55. Le nombre n vérifie les critères par 4 et 3. Comme 3 et 4 sont premiers entre eux, on en déduit que n est divisible par 12 pas pas m.
- On a $33 = 3 \times 11$. Le nombre n ne vérifie pas le critère de divisibilité par 11 et m vérifie les critères par 3 et 11. Comme 3 et 11 sont premiers entre eux, on en déduit que m est divisible par 33 mais n ne l'est pas.

– On a $165 = 3 \times 5 \times 11$. La nombre m vérifie le critère de divisibilité par 5. Comme 5 est premier avec $33 = 3 \times 11$, m est divisible par 165 mais pas n qui n'est pas divisible par 11.

Solution 2.2.4 Le nombre $n = 2675x955$ se termine par 5 : c'est un multiple de 5. Comme $15 = 3 \times 5$ et que 3 est premier avec 5, le Lemme de Gauss permet de réduire le problème à chercher les valeurs du chiffre x telles que n soit un multiple de 3 :

$$2675x955 = 2+6+7+5+x+9+5+5 = 39+x = x \pmod 3$$

Les valeurs solutions sont $x \in \{0, 3, 6, 9\}$.

Solution 2.2.5 Exemple : 156 est un multiple de 4 et 6 mais pas de 24. En effet, 4 et 6 ne sont pas premiers entre eux, donc le lemme de Gauss ne s'applique pas.

Solution 2.3.1 Appliquons le critère "itératif" aux deux nombres :

$$\begin{array}{lll} 7 \text{ divise } 12345 & \Leftrightarrow & 7 \text{ divise } 1224 \\ & \Leftrightarrow & 7 \text{ divise } 114 \\ & \Leftrightarrow & 7 \text{ divise } 3 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 7 \text{ divise } 2345 & \Leftrightarrow & 7 \text{ divise } 224 \\ & \Leftrightarrow & 7 \text{ divise } 14 \end{array}$$

Donc 12345 n'est pas divisible par 7 mais 2345 l'est.

Solution 2.3.2 Critères de divisibilité par 11,13,17,19

- Par 11 : on a $11 = 10+1$

$$11 \text{ divise } \overline{abcdef} \quad \Leftrightarrow \quad 11 \text{ divise } \overline{abcde} - f$$

- Par 13 : on a 13 divise $40 - 1$

$$13 \text{ divise } \overline{abcdef} \quad \Leftrightarrow \quad 13 \text{ divise } \overline{abcde} + 4f$$

- Par 17 : on a 17 divise $50 + 1$

$$17 \text{ divise } \overline{abcdef} \quad \Leftrightarrow \quad 17 \text{ divise } \overline{abcde} - 5f$$

- Par 19 : on a $19 = 20 - 1$

$$19 \text{ divise } \overline{abcdef} \quad \Leftrightarrow \quad 19 \text{ divise } \overline{abcde} + 2f$$

Solution 2.3.3 Appliquons le critère sur le nombre 278, la suite des nombres obtenus est :

$$(3 \times 2 + 7 = 16)\ 168 \quad \longrightarrow \quad 98 \quad \longrightarrow \quad 35 \quad \longrightarrow \quad 14 \quad \longrightarrow \quad 7$$

Le critère repose sur le fait que 10-7= 3 :

$$\overline{ab} = a \times 10 + b = a \times 10 + b - 7a = a(10-7) + b = 3a + b \pmod 7$$

Solution 2.4.1 Critère de divisibilité par 4 et 5 en base 2

- Par 4 : On a $4 = 2^2$ donc

$$4 \text{ divise } \overline{abcdef}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \text{ divise } \overline{ef}^2 \quad \Leftrightarrow \quad e = f = 0$$

- Par 5 : On a $2^2 = -1 \pmod 5$ donc

$$5 \text{ divise } \overline{abcdef}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \text{ divise } -\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{ef}^2$$

n est divisible par 5 en base 2 $\Leftrightarrow$ la somme alternée des groupes de 2 chiffres de son écriture en base 2 l'est