Utilisation de la calculatrice

Equipe de Recherche et de Réflexion
Arithmétique au Lycée

Année 2007-2008

Module - Utilisation de la Calculatrice

Remarque : Ce module est à adapter suivant les calculatrices des élèves. Toutes n'ayant pas les mêmes capacités, il se peut qu'elles donnent des résultats différents ou même que les exemples proposés pour illustrer un phénomène ne soient plus judicieux. Ce document est réalisé avec une TI 82 Stats.fr qui affiche dix chiffres et travaille à une précision de douze chiffres significatifs.

1 Décimales cachées

Votre calculatrice affiche un certain nombre de chiffres ; est-ce là toute l'information qu'elle sait sur un nombre ou en sait-elle davantage ?
Les décimales cachées sont les chiffres qui suivent dans l'écriture du nombre, mais que la calculatrice ne peut afficher par faute de place.

Méthode : Pour faire *défiler* l'écriture d'un nombre, il suffit de retrancher la partie entière et multiplier le nombre par une puissance de 10 puis recommencer.

Exemple : Cherchons les décimales cachées de $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{2} \approx 1.414213562 & \to & (\text{Rép} - 1) \times 1000 \approx 414.2135624 \\ & \to & (\text{Rép} - 414) \times 1000 \approx 213.5623731 \\ & \to & (\text{Rép} - 213) \times 1000 \approx 562.3731 \end{array}$$

La valeur approchée de $\sqrt{2}$ que la calculatrice connaît est 1.4142135623731.

Exercice 1 Le résultat de 1.001^2 et de 1.000001^2 est-il exact ?

Exercice 2 Donner une valeur approchée à 10^{-12} de 123/7.

Exercice 3 Qu'elle la valeur que votre calculatrice possède en mémoire pour le nombre π ?

Exercice 4 Quelle est la précision de calcul de votre calculatrice ?

1. Considérer la fonction $f : x \mapsto x^3 - (x-1)(x^2+x+1)$. Tracer la fonction pour $x \in [0\ 10^5]$ et $y \in [-1\ ;2]$. Que constate-t-on ? Tenter une explication !
   (*S'il ne se passe rien prendre* $x \in [0; 10^{10}]$)
2. Déterminer, à l'entier près, l'abscisse du point précédent le changement de valeur entre 1 et 0 du graphe de f. La précision de calcul de votre calculatrice est donnée par le cube de ce nombre.
   Indication *: Approximer ce nombre avec la fonction* `trace` *puis utiliser le tableur.*

2 Résultats et esprit critique

En pratique, votre calculatrice travaille avec une précision fixe. Ainsi, des erreurs d'approximation peuvent avoir de dangeureuses conséquences si elle ne sont pas anticipées.

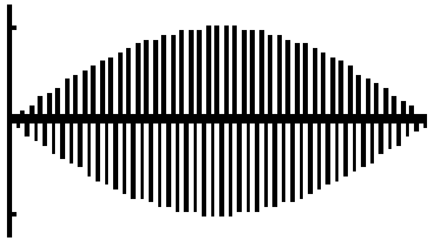
Exemple : Tapons $9^{12}(\sqrt{10^{20}+1} - \sqrt{10^{20}})$, la calculatrice répond 0 alors que le résultat est environ 14.12

Preuve :
$$\begin{array}{rcll} 9^{12}(\sqrt{10^{20}+1} - \sqrt{10^{20}}) & = & 9^{12}\frac{(\sqrt{10^{20}+1}-\sqrt{10^{20}})(\sqrt{10^{20}+1}+\sqrt{10^{20}})}{(\sqrt{10^{20}+1}+\sqrt{10^{20}})} & \\ & = & 9^{12}\frac{10^{20}+1-10^{20}}{(\sqrt{10^{20}+1}+\sqrt{10^{20}})} & (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\ & = & \frac{9^{12}}{(\sqrt{10^{20}+1}+\sqrt{10^{20}})} \approx 14.12148 & \end{array}$$

Exercice 5 Croissante ou décroissante ?
Configurer les angles de votre calculatrice en **radian** et la résolution graphique `Xrés = 1`.

1. Tracer la fonction $g : x \mapsto \sin(x)$ pour $x \in [0\ ;589]$ et $y \in [-2\ ;2]$ puis pour $x \in [0\ ;592]$. Que constate-t-on ?

2. Trouver l'explication de ce phénomène ?
3. Dans le même esprit, si l'on prend $x \in [0\,; 292,2]$, la courbe a une toute autre apparence. Expliquer



3 Calculer avec des grands nombres

Quand nous multiplions de grand nombres entre eux, le résultat peut ne pas tenir sur l'écran de notre calculatrice ! Nous allons développer un moyen pour contourner ce problème et pouvoir trouver facilement le résultat souhaité.

Méthode : Il suffit de découper le nombre en blocs de taille moitié de celle de l'affichage et de développer les calculs sur une feuille tout en utilisant la calculatrice pour les opérations intermédiaires.

Exemple : Considérons le calcul $A \times B$ avec $A = 12345678$ et $B = 7654321$.

$$\begin{array}{rcl}
A \times B & = & (1234 \times 10^4 + 5678) \times (765 \times 10^4 + 4321) \\
 & = & 1234 \times 765 \times 10^8 + 1234 \times 4321 \times 10^4 + 5678 \times 765 \times 10^4 + 5678 \times 4321 \\
 & = & \underbrace{1234 \times 765}_{=944010} \times 10^8 + \underbrace{(1234 \times 4321 + 5678 \times 765)}_{=9675784} \times 10^4 + \underbrace{5678 \times 4321}_{=24534638}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & 2453 & 4638 \\
 & & 967 & 5784 & \\
 & 94 & 4010 & & \\
\hline
= & 94 & 4977 & 8237 & 4638
\end{array}$$

Exercice 6

1. Déterminer 1357902468×7532.
2. Déterminer le carré de 1235789.

4 Calcul approché du cosinus d'un angle

Pour cette activité, nous considérons que nous possédons une calculatrice qui possède uniquement les opérations de base $(+, -, \times$ et $/)$ et nous voulons calculer le cosinus d'un angle.

Dans cette partie tous les angles sont donnés en radian.

Voici deux résultats qui nous seront utiles :

1. Approximons la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,; \frac{\pi}{2}]$.
   On admet que la fonction cosinus est approximée par

$$\cos x \approx \overbrace{\underbrace{\overbrace{\underbrace{1-\frac{x^2}{2}}_{a(x)}+\frac{x^4}{24}}^{b(x)}-\frac{x^6}{720}}_{c(x)}+\frac{x^8}{40320}}^{d(x)}-\cdots$$

Définir la fonction $\cos(x)$ et $a(x)$ dans votre calculatrice graphique et vérifier que leur courbe est proche sur $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$; faire le tracé pour $x \in [0\ 4]$ et $y \in [|2\ ;2]$. Faites de même avec $\cos(x)$ et $c(x)$.

Exercice 7 En définissant les fonctions $y_1(x) = \cos(x) - a(x)$, $y_2(x) = \cos(x) - b(x)$, $y_3(x) = \cos(x) - c(x)$, $y_4(x) = \cos(x) - d(x)$ et utilisant le tableur de votre calculatrice, donner la précision de chacune de ces aproximations, à savoir :

fonction	y_1	y_2	y_3	y_4
maximum (en $\frac{\pi}{2}$)				

En conclusion, chacune de ces fonctions permet d'approximer la fonction cosinus sur $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$. La précision souhaitée déterminera la fonction à utiliser.

2. Ramenons le calcul du cosinus d'un angle au calcul du cosinus d'un angle appartenant à $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$.
   On sait que la fonction cosinus est 2π-périodique, ainsi tout angle possède un représentant dans $[0\ ;2\pi]$; ensuite il suffit de trouver l'angle de $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$ qui aura la même valeur de cosinus au signe près.

   Exercice 8 Compléter le tableau suivant :

angle	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{18\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{20\pi}{6}$	$15\sqrt{2}$	$7,14$
représentant sur $[0\ ;2\pi]$	$\frac{5\pi}{4}$					
cosinus associé sur $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$	$-\cos\frac{\pi}{4}$					

Exemple : Calcul de $\cos(125)$ (en radian) à 10^{-2} près.
- La fonction assurant cette précision est $a(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.
- Le représentant de 125 sur $[0\ ;2\pi]$ est 5,62 car $125 \approx 19 \times 2\pi + 5,62$.
- Le cosinus associé sur $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$ est $\cos(2\pi - 5,62) = \cos(0,66)$.
- Ainsi $\cos(125) \approx 1 - \frac{0,66^2}{2} \approx 0,78$.

Exercice 9 Donner une valeur approchée de $\cos(\frac{\pi}{5})$ et $\cos(212)$ à 10^{-3} près.

Exercice 10 *Calcul d'un sinus*

1. Avec votre calculatrice, observer que la fonction $\sin(x)$ peut être approximée sur $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$ par

$$x \mapsto x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

2. Donner une valeur approchée de $\sin(\frac{11\pi}{12})$. Quelle est la précision de cette approximation ?

Exercice 11 *Calcul d'une racine carré*

1. Avec votre calculatrice, observer que la fonction $g(x) = \sqrt{1+x}$ peut être approximée sur $[-1\ ;1]$ par
$$x \mapsto 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$
2. Donner une valeur approchée de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
3. Quelle est la précision des ces approximations ?

Proposition de solutions

Solution 1

• $1.001^2 = 1.002001$

Le résultat est exact car un décalage n'augmente pas la précision : $(\text{Rép} - 1) \times 1000 \approx 2.001$

• $1.000001^2 \approx 1.000002$ le résultat est approché : $(\text{Rép} - 1) \times 1000 \approx 0.002000001$

Solution 2

$$\begin{array}{rcl} \frac{123}{7} \approx 17.57142857 & \to & (\text{Rép} - 17) \times 1000 \approx 571.4285714 \\ & \to & (\text{Rép} - 571) \times 1000 \approx 428.571429 \end{array}$$

La valeur approchée de 123/7 est 17,571428571429

Solution 3

$$\begin{array}{rcl} \pi \approx 3.141592654 & \to & (\text{Rép} - 3) \times 1000 \approx 141.5926536 \\ & \to & (\text{Rép} - 141) \times 1000 \approx 592.6535898 \\ & \to & (\text{Rép} - 592) \times 1000 \approx 653.5898 \end{array}$$

La valeur approchée de π que la calculatrice connaît est 3.1415926535898.
Une valeur plus précise de π est 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494 459230781640628620899862803482534211706798214808651328230665 ...

Solution 4

1. Le graphe de f prend deux valeur : 1 sur une première partie puis 0. Cela s'explique par le fait que pour x suffisamment petit, la calculatrice arrive à effectuer les calculs et trouve :

$$\begin{array}{rcl} x^3 - (x-1)(x^2+x+1) & = & x^3 - (x^3 - 1) \\ & = & 1 \end{array}$$

   Mais dés que x^3 dépasse la précision de la calculatrice, elle ne peut plus faire de différence entre x^3 et $x^3 - 1$, ainsi elle retourne 0.

2. Une approche graphique, puis l'utilisation de la table nous permet d'avoir :

x	12	325	21544	21545	25000	10^{20}
$f(x)$	1	1	1	0	0	0

   La précision de la calculatrice est $21544^3 \approx 9,9995\ 10^{12}$

Solution 5

1. Dans un cas la courbe semble décroissante et dans l'ordre croissante.
2. L'écran de la calculatrice utilise 95 pixels par ligne en mode graphique. Ainsi pour tracer une fonction, la calculatrice considére 95 points équi-réparti sur l'intervalle d'étude soit 94 sous-intervalles.

$$94 \times 2\pi \approx 590,6$$

   – En choisissant $x \in [0\ 589]$, on prend un pas de tracé juste plus petit que 2π ; ainsi, les écarts cumulés permettent de prendre des points de tracé qui correspondent à des angles entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$: le sinus y est décroissant.

   – En choisissant $x \in [0\ 592]$, on prend un pas de tracé juste plus grand que 2π ; ainsi, les écarts cumulés permettent de prendre des points de tracé qui correspondent à des angles entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: le sinus y est croissant.

3. Dans ce cas, la calculatrice prend alternativement des points :
   – entre $[\pi\ ; 0]$ ce qui explique la bordure supérieure de la *courbe*,
   – entre $[0\ ; -\pi]$ ce qui explique la bordure inférieure de la *courbe*.
   Deux points consécutifs sont reliés par un segment quasi vertical.

Remarque : Voici les caractéristiques à adapter suivant la calculatrice des élèves :

Modèle	*pixels* par ligne*	intervalles d'affichage		
TI 82, 83+, 84+	95	$x \in [0\,;589]$	$x \in [0\,;592]$	$x \in [0\,;292,2]$
TI Nspire	317	$x \in [0\,;1984]$	$x \in [0\,;1987]$	$x \in [0\,;989,6]$
CASIO 25+	79	$x \in [0\,;489]$	$x \in [0\,;491]$	$x \in [0\,;242]$
CASIO 35+, 65, 85 SD, 100	127	$x \in [0\,;790]$	$x \in [0\,;793]$	$x \in [0\,;392,7]$

* *pixels utilisés pour la représentation graphique ; l'écran est légèrement plus grand !*

Solution 6 En détaillant les calculs comme dans l'exemple on obtient :

$$1357902468 \times 7532 = 10227721388976 \qquad 1235789^2 = 1527174452521$$

Solution 7

fonction	y_1	y_2	y_3	y_4
maximum (en $\frac{\pi}{2}$)	2×10^{-1}	2×10^{-2}	10^{-3}	2×10^{-5}

Solution 8

angle	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{18\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{20\pi}{6}$	$15\sqrt{2}$	$7,14$
représentant sur $[0\,;2\pi]$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{7}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\approx 2,364$	$\approx 0,857$
cosinus associé sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$	$-\cos(\frac{\pi}{4})$	$-\cos(\frac{3\pi}{7})$	$\cos(\frac{\pi}{3})$	$-\cos(\frac{\pi}{3})$	$-\cos(0,778)$	$\cos(0,857)$

Solution 9 Considérons l'approximation donnée par $c(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$ pour avoir une précision de 10^{-3} :
• $\frac{\pi}{5} \in [0\ \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\frac{\pi}{5})$ est approximé par $c(\frac{\pi}{5}) \approx 0,8090164$. (La précision réelle est de 10^{-5}.)
• Le représentant de 212 sur $[0\,;2\pi]$ est environ de 4,655 car $212 \approx 66 \times 2\pi + 4,655$.
Le cosinus associé sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ est $-\cos(4,655 - \pi) = \cos(1,513)$; ainsi :

$$\cos(212) \approx c(1,513) \approx 0,0571$$

La précision est exactement de 10^{-3} dans ce cas car le nombre est proche de $\frac{\pi}{2}$, là où l'approximation est la moins bonne !

Solution 10 L'angle appartenant à $[0\ \frac{\pi}{2}]$ qui a le même sinus que $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12}$; ainsi,

$$\sin(\frac{11\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{12}) \approx \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)_{(x=\frac{\pi}{12})} \approx 0,25881906$$

Cette approximation est précise à 10^{-7} près.

Solution 11 Dans les deux cas un petit travail de réécriture est nécessaire pour pouvoir ramener le calcul à un nombre de la forme $\sqrt{1+x}$ avec $x \in [-1\,;1]$. Pour cela, il suffite d'aller chercher le carré le plus proche, ici c'est 4 pour les deux nombres considérés :

$$\sqrt{3} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{5} = 2\sqrt{\frac{5}{4}} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}}$$

Maintenant il suffit d'utiliser l'approxiation de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en $x = -\frac{1}{4}$ et $x = \frac{1}{4}$:

$$\sqrt{3} \approx 2\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4\right)_{(x=-\frac{1}{4})} \approx 1,7325 \qquad \text{(précision de } 10^{-3} \text{ près)}$$

$$\sqrt{5} \approx 2\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4\right)_{(x=\frac{1}{4})} \approx 2,2363 \qquad \text{(précision de } 10^{-3} \text{ près)}$$