

Le Cuisinier est-il meilleur stratège que les pirates ?

Licence de Mathématiques / Terminale S spécialité mathématiques

1 Objectifs

Réinvestissement d'une relation de Bézout pour résoudre un système de congruences.

2 Prérequis

- Congruences ;
- relation de Bezout.

3 Énoncé du problème

Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 3 pièces d'or à l'arrivée au repaire des pirates sur l'île de Bora-Bora.

Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors 4 pièces d'or.

Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier.

Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

4 Exemple de déroulement

4.1 Matériel à disposition

- Calculatrice ;
- éventuellement ordinateur avec tableur.

4.2 Organisation de la séance

- laisser du temps pour la recherche individuelle ou en groupe ;
- collecter les résultats, comparer les méthodes mises en œuvre et montrer leurs limites ;
- exhiber la forme générale des solutions d'un système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv \alpha \pmod{a} \\ x \equiv \beta \pmod{b} \end{cases}$$

- à l'aide d'une relation de Bézout : si $ua + bv = 1$, alors $x \equiv \beta ua + \alpha bv \pmod{ab}$ convient ;
- appliquer cette méthode au problème (en deux temps (et trois mouvements!)).

4.3 Procédures élèves envisageables

- Utilisation d'un tableur ;
- arithmétique (utilisation des propriétés des congruences).

4.4 Prolongements possibles

Théorème Chinois des restes.

4.5 Retour d'expérience

5 Compétences et notions du programme

- Extraire
- Chercher, Analyser
- Modéliser
- Calculer

6 Source

Folklore universitaire

7 Annexes