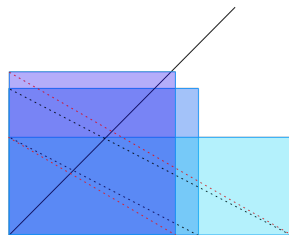


Partie 2

Calcul de la racine carrée

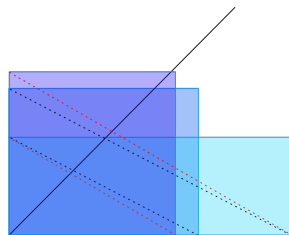
- Chez les anciens (Babyloniens, Égyptiens et Grecs) : Étant donné un rectangle, déterminer un carré ayant la même aire.



Les rectangles ont même aire. Chaque rectangle a pour longueur la moyenne (arithmétique) des dimensions du rectangle précédent.

Calcul de la racine carrée

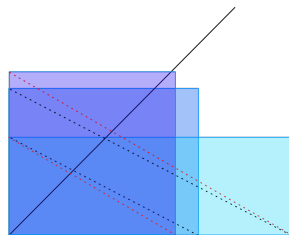
- Chez les anciens (Babyloniens, Égyptiens et Grecs) : Étant donné un rectangle, déterminer un carré ayant la même aire.
- Soit A la valeur de l'aire du rectangle. Si $x^2 = A$, on a trouvé le carré cherché.



Les rectangles ont même aire. Chaque rectangle a pour longueur la moyenne (arithmétique) des dimensions du rectangle précédent.

Calcul de la racine carrée

- Chez les anciens (Babyloniens, Égyptiens et Grecs) : Étant donné un rectangle, déterminer un carré ayant la même aire.
- Soit A la valeur de l'aire du rectangle. Si $x^2 = A$, on a trouvé le carré cherché.
- Sinon, on prend le rectangle dont le côté est la moyenne arithmétique des deux côtés du rectangle : $\frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$ et on recommence l'opération.



Les rectangles ont même aire. Chaque rectangle a pour longueur la moyenne (arithmétique) des dimensions du rectangle précédent.

Exemple

Déterminer un carré dont l'aire vaut 2 c'est, en langage moderne, calculer $\sqrt{2}$ ou, plus précisément, en donner une approximation.



Exemple

Approximation de la racine carrée de 2

- Pour commencer on prend $x_0 = 1$

Exemple

Approximation de la racine carrée de 2

- Pour commencer on prend $x_0 = 1$
- Comme $x_0^2 \neq 2$, on calcule $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0}) = \frac{3}{2}$

Exemple

Approximation de la racine carrée de 2

- Pour commencer on prend $x_0 = 1$
- Comme $x_0^2 \neq 2$, on calcule $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0}) = \frac{3}{2}$
- Comme $x_1^2 \neq 2$, on calcule $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{17}{12}$

Exemple

Approximation de la racine carrée de 2

- Pour commencer on prend $x_0 = 1$
- Comme $x_0^2 \neq 2$, on calcule $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0}) = \frac{3}{2}$
- Comme $x_1^2 \neq 2$, on calcule $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{17}{12}$
- En poursuivant les calculs on obtient le tableau suivant :

Racine de 2

Rang de l'itération	Longueur du premier côté	Longueur du deuxième côté
0	2	1
1	$\frac{3}{2} \approx 1.5$	$\frac{4}{3} \approx 1.33333$
2	$\frac{17}{12} \approx 1.41667$	$\frac{24}{17} \approx 1.411776$
3	$\frac{577}{408} \approx 1.414215$	$\frac{816}{577} \approx 1.414211$
4	$\frac{665\,857}{470\,832} \approx 1.41421356$	$\frac{941\,664}{665\,857} \approx 1.41421356$

Racine de 2

Algorithme 1 - Construction de deux suites

- **Entrées** : e # précision souhaitée

Racine de 2

Algorithme 1 - Construction de deux suites

- **Entrées :** e # précision souhaitée
 - $a := 2, b := 1$ # initialisation

Racine de 2

Algorithme 1 - Construction de deux suites

- **Entrées :** e # précision souhaitée
 - $a := 2, b := 1$ # initialisation
 - **tant que** $|a - b| > e$ **faire**

Racine de 2

Algorithme 1 - Construction de deux suites

- **Entrées** : e # précision souhaitée
 - $a := 2, b := 1$ # initialisation
 - **tant que** $|a - b| > e$ **faire**
 - $a := \frac{1}{2}(a + b)$

Racine de 2

Algorithme 1 - Construction de deux suites

- **Entrées** : e # précision souhaitée
 - $a := 2, b := 1$ # initialisation
 - **tant que** $|a - b| > e$ **faire**
 - $a := \frac{1}{2}(a + b)$
 - $b := \frac{2}{a}$

Racine de 2

Algorithme 1 - Construction de deux suites

- **Entrées** : e # précision souhaitée
 - $a := 2, b := 1$ # initialisation
 - **tant que** $|a - b| > e$ **faire**
 - $a := \frac{1}{2}(a + b)$
 - $b := \frac{2}{a}$
 - **Retourner** a et b
- **Sorties** : deux approximations de $\sqrt{2}$.

Racine de 2

Algorithme 2 - Construction d'une suite

- **Entrées** : e # précision souhaitée

Racine de 2

Algorithme 2 - Construction d'une suite

- **Entrées** : e # précision souhaitée
 - $a := 0, b := 1$ # initialisation

Racine de 2

Algorithme 2 - Construction d'une suite

- **Entrées** : e # précision souhaitée
 - $a := 0, b := 1$ # initialisation
 - **tant que** $|a - b| > e$ **faire**

Racine de 2

Algorithme 2 - Construction d'une suite

- **Entrées** : e # précision souhaitée
 - $a := 0, b := 1$ # initialisation
 - **tant que** $|a - b| > e$ **faire**
 - $a := b$

Racine de 2

Algorithme 2 - Construction d'une suite

- **Entrées** : e # précision souhaitée
 - $a := 0, b := 1$ # initialisation
 - **tant que** $|a - b| > e$ **faire**
 - $a := b$
 - $b := \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{b} \right)$

Racine de 2

Algorithme 2 - Construction d'une suite

- **Entrées** : e # précision souhaitée
 - $a := 0, b := 1$ # initialisation
 - **tant que** $|a - b| > e$ **faire**
 - $a := b$
 - $b := \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{b} \right)$
 - **Retourner** b
- **Sorties** : une approximation de $\sqrt{2}$.

Évaluation

Soit a , b , c , d , e et x des nombres réels. Calculer

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Évaluation-1

Soit a, b, c, d, e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Procédure 1

- Prendre a, b, c, d, e et x

Évaluation-1

Soit a, b, c, d, e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Procédure 1

- Prendre a, b, c, d, e et x
- Calculer $x^2 = x * x, x^3 = x * x * x, x^4 = x * x * x * x$ (les réserver !)

Évaluation-1

Soit a, b, c, d, e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Procédure 1

- Prendre a, b, c, d, e et x
- Calculer $x^2 = x * x, x^3 = x * x * x, x^4 = x * x * x * x$ (les réserver !)
- Calculer $a * x^4, b * x^3, c * x^2, d * x$ (les réserver !)

Évaluation-1

Soit a, b, c, d, e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Procédure 1

- Prendre a, b, c, d, e et x
- Calculer $x^2 = x * x, x^3 = x * x * x, x^4 = x * x * x * x$ (les réserver !)
- Calculer $a * x^4, b * x^3, c * x^2, d * x$ (les réserver !)
- Calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Évaluation-2

On veut calculer a, b, c, d, e et x étant des nombres réels, calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Procédure 1

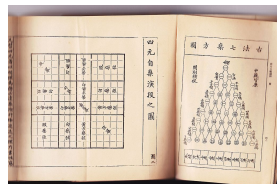
- Prendre a, b, c, d, e et x
- Calculer $x^2 = x * x, x^3 = x * x * x, x^4 = x * x * x * x$ (les réserver !)
- Calculer $a * x^4, b * x^3, c * x^2, d * x$ (les réserver !)
- Calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Nombre d'opérations ?

Méthode de Horner¹–Ruffini²

Soit a, b, c, d, e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. On a :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = e + x(d + x(c + x(b + xa))).$$



Zhu Shijie (1270 - 1330)

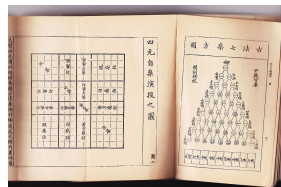
Miroir précieux des quatre éléments

-
1. William George H. 1786-1837
 2. Paolo R. 1765- 1822

Méthode de Horner–Ruffini

Soit a , b , c , d , e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. On a :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = e + x(d + x(c + x(b + xa))).$$



Zhu Shijie (1270 - 1330)

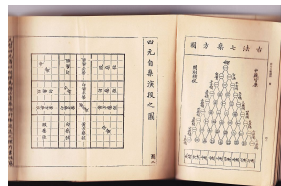
Miroir précieux des quatre éléments

Méthode de Horner–Ruffini

Soit a , b , c , d , e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. On a :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = e + x(d + x(c + x(b + xa))).$$

- On calcule $a * x$ et on ajoute b (et on réserve $a_1 = a * x + b$)



Zhu Shijie (1270 - 1330)

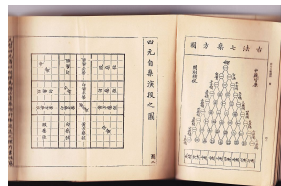
Miroir précieux des quatre éléments

Méthode de Horner–Ruffini

Soit a , b , c , d , e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. On a :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = e + x(d + x(c + x(b + xa))).$$

- On calcule $a * x$ et on ajoute b (et on réserve $a_1 = a * x + b$)
- On calcule $a_1 * x$ et on ajoute c (et on réserve $a_2 = a_1 * x + c$)



Zhu Shijie (1270 - 1330)

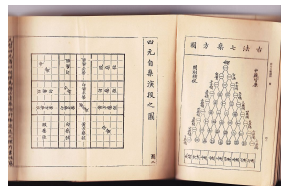
Miroir précieux des quatre éléments

Méthode de Horner–Ruffini

Soit a , b , c , d , e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. On a :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = e + x(d + x(c + x(b + xa))).$$

- On calcule $a * x$ et on ajoute b (et on réserve $a_1 = a * x + b$)
- On calcule $a_1 * x$ et on ajoute c (et on réserve $a_2 = a_1 * x + c$)
- On calcule $a_2 * x$ et on ajoute d (et on réserve $a_3 = a_2 * x + d$)



Zhu Shijie (1270 - 1330)

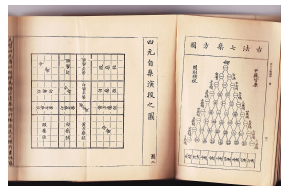
Miroir précieux des quatre éléments

Méthode de Horner–Ruffini

Soit a , b , c , d , e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. On a :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = e + x(d + x(c + x(b + xa))).$$

- On calcule $a * x$ et on ajoute b (et on réserve $a_1 = a * x + b$)
- On calcule $a_1 * x$ et on ajoute c (et on réserve $a_2 = a_1 * x + c$)
- On calcule $a_2 * x$ et on ajoute d (et on réserve $a_3 = a_2 * x + d$)
- On calcule $a_3 * x$ et on ajoute e .



Zhu Shijie (1270 - 1330)

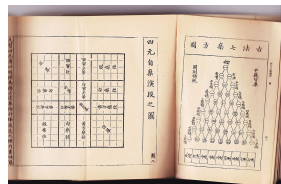
Miroir précieux des quatre éléments

Méthode de Horner–Ruffini

Soit a, b, c, d, e et x des nombres réels. On veut calculer $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. On a :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = e + x(d + x(c + x(b + xa))).$$

- On calcule $a * x$ et on ajoute b (et on réserve $a_1 = a * x + b$)
- On calcule $a_1 * x$ et on ajoute c (et on réserve $a_2 = a_1 * x + c$)
- On calcule $a_2 * x$ et on ajoute d (et on réserve $a_3 = a_2 * x + d$)
- On calcule $a_3 * x$ et on ajoute e .



Zhu Shijie (1270 - 1330)

Miroir précieux des quatre éléments

Nombre d'opérations ?

Horner-Ruffini pour une expression quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

Horner-Ruffini pour une expression quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

- **Entrées** : Les coefficients a_i , le monôme x (ou sa valeur)

Horner-Ruffini pour une expression quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

- **Entrées** : Les coefficients a_i , le monôme x (ou sa valeur)
 - $n :=$ degré du polynôme P .

Horner-Ruffini pour une expression quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

- **Entrées** : Les coefficients a_i , le monôme x (ou sa valeur)
 - $n :=$ degré du polynôme P .
 - $R := a_n$

Horner-Ruffini pour une expression quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

- **Entrées** : Les coefficients a_i , le monôme x (ou sa valeur)
 - $n :=$ degré du polynôme P .
 - $R := a_n$
 - pour k allant de 1 à n faire

Horner-Ruffini pour une expression quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

- **Entrées** : Les coefficients a_i , le monôme x (ou sa valeur)
 - $n :=$ degré du polynôme P .
 - $R := a_n$
 - pour k allant de 1 à n faire
 - $R := R * x + a_{n-k}$

Horner-Ruffini pour une expression quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

- **Entrées** : Les coefficients a_i , le monôme x (ou sa valeur)
 - $n :=$ degré du polynôme P .
 - $R := a_n$
 - pour k allant de 1 à n faire
 - $R := R * x + a_{n-k}$
 - fin pour

Horner-Ruffini pour une expression quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

- **Entrées** : Les coefficients a_i , le monôme x (ou sa valeur)
 - $n :=$ degré du polynôme P .
 - $R := a_n$
 - pour k allant de 1 à n faire
 - $R := R * x + a_{n-k}$
 - fin pour
- **Sortie** : Le résultat R est égal à $P(x)$ sous la forme d'un polynôme de Horner ((ou à la valeur de $P(x)$))

Horner-Ruffini pour un polynôme quelconque

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

- **Entrées** : Les coefficients a_i , le monôme x (ou sa valeur)
 - $n :=$ degré du polynôme P .
 - $R := a_n$
 - pour k allant de 1 à n faire
 - $R := R * x + a_{n-k}$
 - fin pour
- **Sortie** : Le résultat R est égal à $P(x)$ sous la forme d'un polynôme de Horner (ou à la valeur de $P(x)$)

Application

Calculer $2^5 + 2^3 + 2^2 + 1$ (donner l'écriture décimal du nombre écrit 101101 en binaire).

Une équation du second degré par El Khawarizmi



Mouhammed Ibn Moussa El Khawarizmi
v. 780 - v. 850

Une équation du second degré par El Khawarizmi

Un extrait de Hissab El-jabr w'el-mouqabala

Un carré et 21 unités égalent 10 racines³...

La solution de ce type de problème est obtenue de la manière suivante.

Vous prenez d'abord la moitié des racines, 5 dans l'exemple, qui multiplié par lui-même donne 25. De 25 enlevez les 21 unités... Cela donne 4, dont vous prenez la racine carrée 2. A la moitié des racines, 5, vous enlevez 2 et il reste 3... Vous pouvez ajouter à la moitié des racines, soit 5, le nombre 2 que vous venez de lui soustraire. Cela donne 7, qui est une racine du carré et 49 complète le carré.

3. Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 + 21 = 10x$.

En langage moderne !

Résoudre

$$x^2 + ax = b$$

revient à résoudre l'équation

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$



Un algorithme de tri

Déterminer le plus grand élément de l'ensemble

- $\{17, 5, 35, 28\}$

Un algorithme de tri

Déterminer le plus grand élément de l'ensemble

- $\{17, 5, 35, 28\}$
- $\{175, 57, 35, 4321, 78, 28, 4101, 3245, 2, 1, 65, 1234, \}$

Un algorithme de tri

Déterminer le plus grand élément de l'ensemble

- $\{17, 5, 35, 28\}$
- $\{175, 57, 35, 4321, 78, 28, 4101, 3245, 2, 1, 65, 1234, \}$
- $\{85, 429, 632, 721, 96, 32, 589, 147, 25, 698, 421, 147, 589, 32, 45, 869, 7, 52, 13, 69, 85, 47, 32, 569, 85, 2147, 665, 8, 23, 17, 324, 536, 280, 200, 25, 980, 65, 38, 749, 632, 58, 74, 13, 65, 829, 107, 511, 35, 781, 78, 28, 101, 245, 231, 117, 65\}$

Maximum

Entrée : Une liste de nombres.

Sortie : Un plus grand élément de la liste.

Début

■ $\text{Max} \leftarrow 0$

Fin

Maximum

Entrée : Une liste de nombres.

Sortie : Un plus grand élément de la liste.

Début

- $\text{Max} \leftarrow 0$
- Pour chaque terme x de la liste faire

Fin

Maximum

Entrée : Une liste de nombres.

Sortie : Un plus grand élément de la liste.

Début

- $\text{Max} \leftarrow 0$
- Pour chaque terme x de la liste faire
 - Si $x > \text{Max}$ alors $\text{Max} \leftarrow x$

Fin

Maximum

Entrée : Une liste de nombres.

Sortie : Un plus grand élément de la liste.

Début

- $\text{Max} \leftarrow 0$
- Pour chaque terme x de la liste faire
 - Si $x > \text{Max}$ alors $\text{Max} \leftarrow x$
- Retourner Max

Fin

Querelle des Abacistes et des Algoristes



Illustration du livre de Georg Reisch, *Margarita philosophica cum additionibus novis*, Basiliae, Schottus, (1508)

Abacistes vs Algoristes



Illustration de "The Ground of Arts" du mathématicien anglais Robert Recorde (1510-1558)

UN LIVRE

Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce.

JEAN-LUC CHABERT et *al.*

Collection Regards sur la science

Éditions Belin, 1994

Sitographie

- <https://slideplayer.fr/slide/464440/>
- <https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithmique/>
- <https://culturemath.ens.fr/>
- <https://images.math.cnrs.fr/>
- <https://images.math.cnrs.fr/Dis-maman-ou-papa-c-est-quoi-un-algorithme-dans-ce-monde-numerique>
- <https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ar/node17.html>
- <https://interstices.info/quest-ce-quun-algorithme>