

Jeu de raisonnement logique, langage, reformulation et démonstration

Stéphane Vinatier et Marc Moyon

jeudi 7 décembre 2017

Atelier basé sur le jeu de raisonnement logique *CQFD - IREM de Limoges* du « groupe de Tulle » (2013-2016) :

Atelier basé sur le jeu de raisonnement logique *CQFD - IREM de Limoges* du « groupe de Tulle » (2013-2016) :

| | |
|----------------------|----------------------------------|
| Jérôme DUFOUR | collège Cabanis à Brive |
| Patrick GUILLOU | collège de Pierre-Buffière |
| Michel LAFONT | retraité |
| Bernard MADELMONT | lycée Edmond Perrier à Tulle |
| Michaël MAISONNEUVE | collège de Beaulieu-sur-Dordogne |
| Marie-France PERIN | collège de Neuvic |
| Marie-Josée SOLIGNAC | collège d'Argentat |
| Stéphane VINATIER | université de Limoges |

Un constat récurrent :

la difficulté des élèves ou étudiants de tous niveaux à construire (imaginer, présenter, rédiger,...) un raisonnement mathématique.

Un constat récurrent :

la difficulté des élèves ou étudiants de tous niveaux à construire (imaginer, présenter, rédiger,...) un raisonnement mathématique.

Notre diagnostic :

le manque de pratique !

Un constat récurrent :

la difficulté des élèves ou étudiants de tous niveaux à construire (imaginer, présenter, rédiger,...) un raisonnement mathématique.

Notre diagnostic :

le manque de pratique !

Notre proposition :

un jeu de raisonnement mathématique...

Le principe

Construire un raisonnement mathématique, c'est simple !

Le principe

Construire un raisonnement mathématique, c'est simple !
Du moins si l'on sait :

Le principe

Construire un raisonnement mathématique, c'est simple !

Du moins si l'on sait :

- identifier les **données** (connues) et les **conclusions** (à démontrer) ;

Le principe

Construire un raisonnement mathématique, c'est simple !

Du moins si l'on sait :

- identifier les **données** (connues) et les **conclusions** (à démontrer) ;
- raccrocher la situation à une théorie mathématique : aux **définitions** et aux **propriétés** du cours dont elle relève ;

Le principe

Construire un raisonnement mathématique, c'est simple !

Du moins si l'on sait :

- identifier les **données** (connues) et les **conclusions** (à démontrer) ;
- raccrocher la situation à une théorie mathématique : aux **définitions** et aux **propriétés** du cours dont elle relève ;
- utiliser ces **propriétés** à bon escient : vérifier que les **hypothèses** sont satisfaites et en tirer les **conclusions**.

Le principe

Construire un raisonnement mathématique, c'est simple !

Du moins si l'on sait :

- identifier les **données** (connues) et les **conclusions** (à démontrer) ;
- raccrocher la situation à une théorie mathématique : aux **définitions** et aux **propriétés** du cours dont elle relève ;
- utiliser ces **propriétés** à bon escient : vérifier que les **hypothèses** sont satisfaites et en tirer les **conclusions**.

Le raisonnement peut alors se construire de manière quasiment mécanique.

Le principe

Construire un raisonnement mathématique, c'est simple !

Du moins si l'on sait :

- identifier les **données** (connues) et les **conclusions** (à démontrer) ;
- raccrocher la situation à une théorie mathématique : aux **définitions** et aux **propriétés** du cours dont elle relève ;
- utiliser ces **propriétés** à bon escient : vérifier que les **hypothèses** sont satisfaites et en tirer les **conclusions**.

Le raisonnement peut alors se construire de manière quasiment mécanique.

Notre jeu tente de mettre en œuvre ce principe
de façon ludique.

Le(s) sens des mots

Pour vous :

- qu'est-ce qu'une **hypothèse** ?

Le(s) sens des mots

Pour vous :

- qu'est-ce qu'une **hypothèse** ?
- qu'est-ce qu'une **propriété** ?

Le(s) sens des mots

Pour vous :

- qu'est-ce qu'une **hypothèse** ?
- qu'est-ce qu'une **propriété** ?
- qu'est-ce qu'une **définition** ?

Le(s) sens des mots

Pour vous :

- qu'est-ce qu'une **hypothèse** ?
- qu'est-ce qu'une **propriété** ?
- qu'est-ce qu'une **définition** ?

Tous ces mots sont couramment employés dans des sens différents ; les élèves s'y retrouvent-ils ?

Les termes employés dans le jeu

Les raisonnements sont basés sur des *figures géométriques*

- o 6 cartes « *figure* »

et construits à l'aide de deux types de *cartes* :

- o 15 cartes « *donnée/conclusion* »
- o 10 cartes « *propriété* »

Les termes employés dans le jeu

Les raisonnements sont basés sur des *figures géométriques*

- o 6 cartes « **figure** »

et construits à l'aide de deux types de *cartes* :

- o 15 cartes « **donnée/conclusion** »
- o 10 cartes « **propriété** »

Il comporte aussi une **règle du jeu**, précisant notamment :

- o les **conventions** pour les figures (par exemple : les points qui *paraissent* alignés le sont vraiment) ;
- o les **définitions** utiles et quelques **reformulations** possibles.

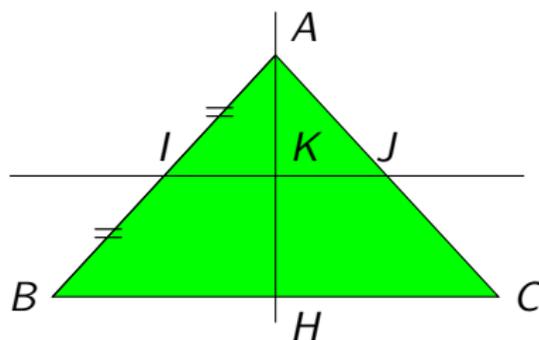
Reformulations

Elles sont indispensables et souvent implicites.

Reformulations

Elles sont indispensables et souvent implicites.

Dans la Figure 1 :



est codée la donnée :

$$IA = IB$$

à traduire par :

I milieu de $[AB]$

Dans la Figure 2, est inscrite la donnée :

I est le centre du cercle de diamètre $[AB]$ passant par H

Dans la Figure 2, est inscrite la donnée :

I est le centre du cercle de diamètre $[AB]$ passant par H

à traduire par :

$[AB]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABH

(en oubliant I),

Dans la Figure 2, est inscrite la donnée :

I est le centre du cercle de diamètre $[AB]$ passant par H

à traduire par :

$[AB]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABH

(en oubliant I), pour utiliser la propriété « si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés, alors le triangle est rectangle en le sommet qui n'appartient pas au côté ».

Dans la Figure 2, est inscrite la donnée :

I est le centre du cercle de diamètre $[AB]$ passant par H

à traduire par :

$[AB]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABH

(en oubliant I), pour utiliser la propriété « si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés, alors le triangle est rectangle en le sommet qui n'appartient pas au côté ».

On peut alors conclure que ABH est rectangle en H (sur la carte $(AH) \perp (BC)$).

Choix des propriétés

Entre les deux propriétés suivantes du triangle rectangle on a choisi de ne garder que la première :

si un triangle est rectangle, **alors** son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.

si un triangle est rectangle, **alors** la médiane issue de l'angle droit est de longueur égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.

Choix des propriétés

Entre les deux propriétés suivantes du triangle rectangle on a choisi de ne garder que la première :

si un triangle est rectangle, **alors** son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.

si un triangle est rectangle, **alors** la médiane issue de l'angle droit est de longueur égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.

Est-ce le bon choix ?

Reformulations ou équivalence ?

Les deux énoncés précédents ont le même contenu mathématique ; seule la façon de dire les choses est modifiée.

Reformulations ou équivalence ?

Les deux énoncés précédents ont le même contenu mathématique ; seule la façon de dire les choses est modifiée.

Mathématiquement ces énoncés sont **identiques** et ne font qu'un.

Reformulations ou équivalence ?

Les deux énoncés précédents ont le même contenu mathématique ; seule la façon de dire les choses est modifiée.

Mathématiquement ces énoncés sont **identiques** et ne font qu'un.

L'énoncé suivant est **équivalent** au précédent :

Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.

Règles du jeu

- a) les premières cartes « donnée/conclusion » posées doivent obligatoirement traduire les hypothèses apparaissant sur la carte « figure » (via symboles ou texte) ;

Règles du jeu

- a) les premières cartes « donnée/conclusion » posées doivent obligatoirement traduire les hypothèses apparaissant sur la carte « figure » (via symboles ou texte) ;
- b) on ne peut poser une carte « propriété » que si la ou les carte(s) « donnée/conclusion » correspondant aux hypothèses de la propriété sont déjà posées ;

Règles du jeu

- a) les premières cartes « donnée/conclusion » posées doivent obligatoirement traduire les hypothèses apparaissant sur la carte « figure » (via symboles ou texte) ;
- b) on ne peut poser une carte « propriété » que si la ou les carte(s) « donnée/conclusion » correspondant aux hypothèses de la propriété sont déjà posées ;
- c) une fois qu'une carte « propriété » est posée, on peut poser la ou les carte(s) « donnée/conclusion » qui traduisent les conclusions de la propriété en fonction de ses hypothèses, et s'en servir comme hypothèse(s) pour d'autres propriétés.

Règles du jeu

- a) les premières cartes « donnée/conclusion » posées doivent obligatoirement traduire les hypothèses apparaissant sur la carte « figure » (via symboles ou texte) ;
 - b) on ne peut poser une carte « propriété » que si la ou les carte(s) « donnée/conclusion » correspondant aux hypothèses de la propriété sont déjà posées ;
 - c) une fois qu'une carte « propriété » est posée, on peut poser la ou les carte(s) « donnée/conclusion » qui traduisent les conclusions de la propriété en fonction de ses hypothèses, et s'en servir comme hypothèse(s) pour d'autres propriétés.
- De plus, on ne peut poser sur le plateau une carte qui y figure déjà.

Déroulement du jeu

2, 3 ou 4 équipes ;

choisir une carte « **figure** » (commune à tous) et distribuer 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** » par équipe. Faire 3 tas pour la pioche à l'aide des cartes restantes.

Déroulement du jeu

2, 3 ou 4 équipes ;

choisir une carte « **figure** » (commune à tous) et distribuer 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** » par équipe. Faire 3 tas pour la pioche à l'aide des cartes restantes.

L'équipe la plus septentrionale commence (matériel : boussole).

Elle peut **tout à la fois** :

Déroulement du jeu

2, 3 ou 4 équipes ;

choisir une carte « **figure** » (commune à tous) et distribuer 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** » par équipe. Faire 3 tas pour la pioche à l'aide des cartes restantes.

L'équipe la plus septentrionale commence (matériel : boussole).

Elle peut **tout à la fois** :

- poser des cartes « **donnée/conclusion** » ou « **propriété** » sur le plateau, sans limitation de nombre ;

Déroulement du jeu

2, 3 ou 4 équipes ;

choisir une carte « **figure** » (commune à tous) et distribuer 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** » par équipe. Faire 3 tas pour la pioche à l'aide des cartes restantes.

L'équipe la plus septentrionale commence (matériel : boussole).

Elle peut **tout à la fois** :

- poser des cartes « **donnée/conclusion** » ou « **propriété** » sur le plateau, sans limitation de nombre ;
- échanger ses cartes **JOKER** contre les cartes de même type des autres équipes qu'elle utilise alors comme les siennes ;

Déroulement du jeu

2, 3 ou 4 équipes ;

choisir une carte « **figure** » (commune à tous) et distribuer 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** » par équipe. Faire 3 tas pour la pioche à l'aide des cartes restantes.

L'équipe la plus septentrionale commence (matériel : boussole).

Elle peut **tout à la fois** :

- poser des cartes « **donnée/conclusion** » ou « **propriété** » sur le plateau, sans limitation de nombre ;
- échanger ses cartes **JOKER** contre les cartes de même type des autres équipes qu'elle utilise alors comme les siennes ;
- se défausser des cartes qu'elle juge inutiles sous les pioches correspondantes.

Déroulement du jeu

2, 3 ou 4 équipes ;

choisir une carte « **figure** » (commune à tous) et distribuer 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** » par équipe. Faire 3 tas pour la pioche à l'aide des cartes restantes.

L'équipe la plus septentrionale commence (matériel : boussole).

Elle peut **tout à la fois** :

- poser des cartes « **donnée/conclusion** » ou « **propriété** » sur le plateau, sans limitation de nombre ;
- échanger ses cartes **JOKER** contre les cartes de même type des autres équipes qu'elle utilise alors comme les siennes ;
- se défausser des cartes qu'elle juge inutiles sous les pioches correspondantes.

Elle pioche alors les cartes qui lui manquent pour avoir à nouveau en main 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** ».

CQFD! (variante)

À ce moment là (et pas avant), si l'équipe a posé une carte « propriété » dont les hypothèses sont satisfaites par une ou des carte(s) « donnée/conclusion », sans voir qu'une ou des carte(s) « donnée/conclusion » déjà présentes en traduit les conclusions, une autre équipe peut le signaler en criant « **CQFD!** » (autant de fois que de cartes concernées).

Validation

Lorsqu'une équipe a joué, les autres équipes (ou l'enseignant) valident les raisonnements qu'elle a proposés.

Validation

Lorsqu'une équipe a joué, les autres équipes (ou l'enseignant) valident les raisonnements qu'elle a proposés.

Deux manières de jouer :

- **débutant** : les cartes ayant servi à construire le raisonnement restent en place sur le plateau

Validation

Lorsqu'une équipe a joué, les autres équipes (ou l'enseignant) valident les raisonnements qu'elle a proposés.

Deux manières de jouer :

- **débutant** : les cartes ayant servi à construire le raisonnement restent en place sur le plateau
problème : difficile de s'en resservir pour démontrer d'autres propriétés

Validation

Lorsqu'une équipe a joué, les autres équipes (ou l'enseignant) valident les raisonnements qu'elle a proposés.

Deux manières de jouer :

- **débutant** : les cartes ayant servi à construire le raisonnement restent en place sur le plateau
 - problème* : difficile de s'en resservir pour démontrer d'autres propriétés
 - solution* : on arrête la partie assez vite

Validation

Lorsqu'une équipe a joué, les autres équipes (ou l'enseignant) valident les raisonnements qu'elle a proposés.

Deux manières de jouer :

- **débutant** : les cartes ayant servi à construire le raisonnement restent en place sur le plateau
problème : difficile de s'en resservir pour démontrer d'autres propriétés
solution : on arrête la partie assez vite
- **avancés** : une fois les raisonnements validés, on range les cartes qui ont servi (cartes « donnée/conclusion » d'un côté, cartes « propriété » de l'autre) afin qu'elles puissent resservir librement

Validation

Lorsqu'une équipe a joué, les autres équipes (ou l'enseignant) valident les raisonnements qu'elle a proposés.

Deux manières de jouer :

- **débutant** : les cartes ayant servi à construire le raisonnement restent en place sur le plateau
problème : difficile de s'en resservir pour démontrer d'autres propriétés
solution : on arrête la partie assez vite
- **avancés** : une fois les raisonnements validés, on range les cartes qui ont servi (cartes « donnée/conclusion » d'un côté, cartes « propriété » de l'autre) afin qu'elles puissent resservir librement
problème : on perd la trace des raisonnements effectués

Validation

Lorsqu'une équipe a joué, les autres équipes (ou l'enseignant) valident les raisonnements qu'elle a proposés.

Deux manières de jouer :

- **débutant** : les cartes ayant servi à construire le raisonnement restent en place sur le plateau
problème : difficile de s'en resservir pour démontrer d'autres propriétés
solution : on arrête la partie assez vite
- **avancés** : une fois les raisonnements validés, on range les cartes qui ont servi (cartes « donnée/conclusion » d'un côté, cartes « propriété » de l'autre) afin qu'elles puissent resservir librement
problème : on perd la trace des raisonnements effectués
solution : on encode les raisonnements à l'aide des lettres ou chiffres associées à chaque carte.

Points

Chaque équipe marque :

- **1 point** par nouvelle carte posée ;
- **1 point** supplémentaire pour chaque raisonnement complet (hypothèse(s), propriété, conclusion) faisant intervenir une nouvelle carte.

Points

Chaque équipe marque :

- **1 point** par nouvelle carte posée ;
- **1 point** supplémentaire pour chaque raisonnement complet (hypothèse(s), propriété, conclusion) faisant intervenir une nouvelle carte.

Variante :

- **1 point** pour chaque « **CQFD !** » prononcé à bon escient.

Fin

Lorsque les **12 cartes « donnée/conclusion »** correspondant à la figure ont été posées sur le plateau, l'équipe suivante choisit une nouvelle carte « **figure** » dans la pioche, de couleur différente de la précédente. On range sous les pioches les cartes qui se trouvaient sur le plateau (par contre chaque équipe garde les siennes) et l'équipe qui a changé de figure commence.

Fin

Lorsque les **12 cartes** « donnée/conclusion » correspondant à la figure ont été posées sur le plateau, l'équipe suivante choisit une nouvelle carte « figure » dans la pioche, de couleur différente de la précédente. On range sous les pioches les cartes qui se trouvaient sur le plateau (par contre chaque équipe garde les siennes) et l'équipe qui a changé de figure commence.

La partie se termine lorsque les 12 cartes « donnée/conclusion » correspondant à la nouvelle figure ont été posées sur le plateau. L'équipe qui a le plus de points emporte la partie.

À vous de jouer !

Des idées pour intégrer le jeu à des séquences de classe ?