

CQFD

le raisonnement mathématique par le jeu

Le « groupe de Tulle »,
Équipe de Recherche et de Réflexion
de l'IREM de Limoges

2013-15

COMMENT JOUER

Préparation. Le jeu se joue à 2, 3 ou 4 équipes. Mélanger chaque catégorie de cartes, choisir une carte « **figure** » (commune à tous), la placer sur le plateau et distribuer 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** » à chaque équipe, faces visibles. Faire 2 tas avec les cartes « **propriété** » et « **donnée/conclusion** » restantes, faces cachées.

Déroulement. Les équipes jouent chacune à leur tour, en commençant par l'équipe la plus septentrionale et en tournant dans le sens trigonométrique. Lorsque vient le tour d'une équipe, elle peut tout à la fois :

- poser des cartes « **donnée/conclusion** » ou « **propriété** » sur le plateau, en fonction des **règles** énoncées ci-dessous, sans limitation de nombre ;
- échanger ses cartes *JOKER*, si elle en possède, contre les cartes de même type des autres équipes qu'elle utilise alors comme les siennes ;
- se défausser des cartes qu'elle juge inutiles sous les pioches correspondantes.

L'équipe pioche alors les cartes qui lui manquent pour avoir à nouveau en main 2 cartes « **propriété** » et 4 cartes « **donnée/conclusion** ».

À ce moment là (et pas avant), si l'équipe a posé une carte « **propriété** » dont les hypothèses sont satisfaites par une ou des carte(s) « **donnée/conclusion** », sans voir qu'une ou des carte(s) « **donnée/conclusion** » déjà présentes en traduit les conclusions, une autre équipe peut le signaler en criant « **CQFD!** » (autant de fois que de cartes concernées).

Après validation par les autres équipes, on note les **points** marqués puis on regroupe les cartes « **donnée/conclusion** » et « **propriété** » aux emplacements prévus. Puis c'est au tour de l'équipe suivante.

Changement de figure et fin de partie. Lorsque les **12 cartes** « **donnée/conclusion** » correspondant à la figure ont été posées sur le plateau, l'équipe suivante choisit une nouvelle carte « **figure** » dans la pioche, de couleur différente de la précédente. On range sous les pioches les cartes qui se trouvaient sur le plateau (par contre chaque équipe garde les siennes) et l'équipe qui a changé de figure commence.

La partie se termine lorsque les 12 cartes « **donnée/conclusion** » correspondant à la nouvelle figure ont été posées sur le plateau. L'équipe qui a le plus de points emporte la partie.

Règles. Le but du jeu est de construire des raisonnements logiques à partir de la situation décrite sur la carte « **figure** », à l'aide des cartes déjà posées sur le plateau et de celles dont dispose chaque équipe. Les trois règles suivantes assurent que le raisonnement effectué est correct :

- a) les premières cartes « **donnée/conclusion** » posées doivent obligatoirement traduire les hypothèses apparaissant sur la carte « **figure** » (via symboles ou texte) ;
- b) on ne peut poser une carte « **propriété** » que si la ou les carte(s) « **donnée/conclusion** » correspondant aux hypothèses de la propriété sont déjà posées ;
- c) une fois qu'une carte « **propriété** » est posée, on peut poser la ou les carte(s) « **donnée/conclusion** » qui traduisent les conclusions de la propriété en fonction de ses hypothèses, et s'en servir comme hypothèse(s) pour d'autres propriétés.

De plus, on ne peut poser sur le plateau une carte qui y figure déjà, dans la mesure où une carte « **propriété** » qui est déjà posée sur le plateau peut être réutilisée avec d'autres cartes « **donnée/conclusion** » qui traduisent ses hypothèses et, de même, une carte « **donnée/conclusion** » peut servir d'hypothèse ou de conclusion à plusieurs cartes « **propriété** ».

Points. Après validation par les autres équipes, chaque équipe marque :

- 1 point par nouvelle carte posée ;
- 1 point supplémentaire pour chaque raisonnement complet (hypothèse(s), propriété, conclusion) faisant intervenir une nouvelle carte.
- 1 point pour chaque « **CQFD!** » prononcé à bon escient.

Présentation. Lorsqu'une équipe joue, elle peut déplacer les cartes déjà présentes sur le plateau pour montrer la validité de son raisonnement, par exemple en plaçant les unes sous les autres les cartes « **donnée/conclusion** » qui servent d'hypothèses, la carte « **propriété** » et les cartes « **donnée/conclusion** » qui servent de conclusion. Après validation les cartes sont remises dans les emplacements prévus.

Durée. Les joueurs peuvent convenir ensemble de limiter la durée dont disposent les équipes pour jouer à chaque tour.

LES CARTES

Les 6 figures. Elles sont de deux couleurs (orange ou verte) correspondant à deux situations mathématiques différentes. Sur chaque carte « **figure** » sont codées certaines données : segments de même longueur (avec les symboles = ou \circ), droites perpendiculaires (avec un petit carré \square au niveau de l'intersection). De plus, on convient que :

- les points qui *semblent* être sur une même droite y sont vraiment ;
- les points qui *semblent* être sur un même cercle y sont vraiment.

Et rien d'autre ! Par exemple, on ne suppose pas que le point qui *semble* être le centre d'un cercle l'est vraiment (on peut éventuellement le démontrer grâce aux données et aux propriétés), sauf si cela est écrit en toutes lettres (Figure 2).

Les joueurs sont invités à se reporter aux définitions ci-dessous, qu'ils peuvent utiliser pour reformuler les indications portées sur les cartes « **figure** » à l'aide des cartes « **donnée/conclusion** ».

Les 15 données/conclusions. Elles apparaissent en 3 exemplaires chacune, sauf la carte *JOKER*, soit 47 cartes « donnée/conclusion » au total.

$$\begin{array}{ccc} (IJ) \parallel (BC) & (IH) \parallel (AC) & \\ (AH) \perp (BC) & (AB) \perp (AC) & (IJ) \perp (AH) \\ I \text{ milieu de } [AB] & J \text{ milieu de } [AC] & H \text{ milieu de } [BC] \end{array}$$

ABC est isocèle en A

$[AB]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABH

$[AC]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ACH

$[AI]$ est un diamètre du cercle circonscrit à AIK

$[AJ]$ est un diamètre du cercle circonscrit à AJK

A appartient au cercle de diamètre $[BC]$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

JOKER

Les 10 propriétés. Chacune apparaît en deux exemplaires, sauf la carte *JOKER*, soit 21 cartes « propriété » au total.

- ♠ **Si** deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, **alors** elles sont parallèles.
- ♡ **Si** deux droites sont parallèles **et si** une troisième droite est perpendiculaire à l'une d'elles, **alors** elle est perpendiculaire à l'autre.
- ◇ **Si** une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, **alors** elle est parallèle au troisième côté.
- ♣ **Si** une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle **et si** elle est parallèle à un autre côté de ce triangle, **alors** elle passe par le milieu du troisième côté.
- △ **Si** un triangle est rectangle, **alors** son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.
- **Si** un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés, **alors** le triangle est rectangle en le sommet qui n'appartient pas au diamètre.
- **Si** dans un triangle une hauteur passe par le milieu d'un côté, **alors** le triangle est isocèle, de sommet principal le sommet de cette hauteur.
- ✕ **Si** un triangle est isocèle **et si** une droite passant par le sommet principal est perpendiculaire à la base, **alors** cette droite passe par le milieu de la base.
- ∅ **Si** un triangle est rectangle, **alors** le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
- ¶ **Si** dans un triangle, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, **alors** le triangle est rectangle en le sommet opposé au plus grand côté.

▽ *JOKER*

Le plateau. Une feuille cartonnée de format A3 ou supérieur peut être utilisée comme plateau, en y déposant la figure choisie et les pioches dans la partie supérieure, les cartes « donnée/conclusion » toutes ensemble en dessous, les cartes « propriété » toutes ensemble encore en dessous. On fera tourner le plateau face à l'équipe dont c'est le tour de jouer pour faciliter la lecture et le maniement des cartes.

COMPLÉMENTS

Définitions. Les figures considérées sont toutes contenues dans le plan euclidien habituel, dont les éléments sont les *points*, qui contient des *droites* satisfaisant certains axiomes (d'Euclide notamment), des *segments* (portions de droites comprises entre deux points) et dans lequel on peut mesurer des longueurs.

On rappelle que le *milieu* d'un segment est le point du segment situé à égale distance des deux extrémités.

Deux droites sont *parallèles* si elles ont la même direction, c'est-à-dire si elles ne se coupent jamais (même en les envisageant jusqu'à l'infini). Deux droites sont *perpendiculaires* si elles se coupent en formant un angle droit (de mesure 90°).

Un *triangle* est la donnée de trois points qu'on appelle les *sommets* du triangle, tandis que les segments qui les relient sont appelés ses *côtés*; le sommet *opposé* à un côté est celui qui n'y appartient pas.

Étant donné un triangle, une *hauteur* est une droite perpendiculaire à l'un des côtés et passant par le sommet opposé; une *médiane* est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

Un triangle est *isocèle* s'il a deux côtés de même longueur, on appelle alors sommet *principal* celui qui appartient à ces deux côtés, *base* le troisième côté.

Un triangle est dit *rectangle* si deux de ses côtés sont perpendiculaires, on appelle alors *hypoténuse* le troisième côté.

Un *cercle* est un ensemble de points tous situés à la même distance (appelée le *rayon* du cercle) d'un même point, appelé *centre* du cercle. Un *diamètre* est un segment dont les extrémités appartiennent au cercle et passant par le centre.

Un triangle est dit *inscrit* dans un cercle si celui-ci passe par les trois sommets du triangle.

Si un triangle est non aplati (c'est-à-dire que ses trois sommets ne sont pas alignés), il existe un unique cercle passant par les trois sommets du triangle, appelé le *cercle circonscrit* au triangle. Autrement dit, tout triangle non aplati est inscrit dans son cercle circonscrit, et seulement dans celui-ci.

Notations. Dans ce jeu, les points sont notés avec des lettres majuscules : A, B, C, H, I, J, K . Par deux points distincts M et N , passe une unique droite notée (MN) . Le segment d'extrémités M et N est noté $[MN]$. Le triangle de sommets A, B et C est noté ABC . Le symbole utilisé pour indiquer que deux droites sont parallèles est \parallel , celui pour indiquer qu'elles sont perpendiculaires est \perp (sauf sur les cartes « *figure* » où il est remplacé par le petit carré habituel \square).

Reformulations. Les joueurs utilisent librement les définitions pour reformuler les données apparaissant sur les cartes « *figure* » ou « *donnée/conclusion* ». Par exemple, il apparaît sur la Figure 1 que les longueurs des segments $[IA]$ et $[IB]$ sont égales; d'après la définition rappelée ci-dessus, cela signifie que I est le milieu du segment $[AB]$, il est donc légitime de poser la carte « *I milieu de [AB]* ».

De même, il est précisé sur la Figure 2 que « I est le centre du cercle de diamètre $[AB]$ passant par H », il en découle qu'on peut poser la carte « *[AB] est un diamètre du cercle circonscrit à ABH* » qui traduit une partie de l'information donnée (en oubliant le point I).

Noter qu'on peut aussi exprimer cette dernière propriété en disant que ABH est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés; la carte précédente peut donc servir d'hypothèse à la propriété « *si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés, alors le triangle est rectangle en le sommet qui n'appartient pas au côté* ». On peut alors conclure que ABH est rectangle en H (sur la carte $(AH) \perp (BC)$).

Enfin, le fait qu'un triangle soit inscrit dans un cercle ayant un de ses côtés pour diamètre peut aussi se reformuler en disant que la médiane issue d'un des sommets du triangle a une longueur égale à la moitié de celle du côté opposé : le milieu du diamètre est aussi le centre du cercle, donc sa distance au sommet qui n'appartient pas au diamètre (la longueur de la médiane) est égale au rayon du cercle, c'est-à-dire à la moitié de la longueur du diamètre. On retrouve donc le « *théorème de la médiane* », sous sa forme habituelle, à partir de la propriété (réciproque de celle énoncée plus haut) : « *si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit* », donc la médiane issue du sommet de l'angle droit a une longueur égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.