Faculté des sciences et techniques de Limoges
2014/2015
BE

Océane CHAPUZET
Jeanne GAYOT
Aurélie VERGNE

Les courbes paramétrées

Contexte :

Un bâton est adossé à un mur et touche le sol. Il peut être représenté par un segment vertical [AB].

NB : modélisation Maple séance 4.

Il glisse le long du mur. C'est-à-dire que, son extrémité au sol A ne décolle pas du sol et se déplace horizontalement et que son extrémité B se déplace verticalement vers le bas.

But : Déterminer les trajectoires des points situés sur le bâton et de les représenter graphiquement.

Séance 1 :

- Modélisation de la situation sur Geogebra. D'après la modélisation, on peut observer que la trajectoire décrit par les points situés sur le bâton est une ellipse soit qu'on a une trajectoire de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$.

Séance 2 :

- Calculs d'après modélisation de Géogebra :

variations des différents points

*le milieu G : y diminue, x augmente

*un point quelconque F : y diminue, x augmente

Donc on observe que pour n'importe quel point appartenant au baton, x augmente et y diminue. De plus, il semble qu'il y ait une symétrie centrale et une symétrie axiale par rapport à (Ox) et à (Oy).

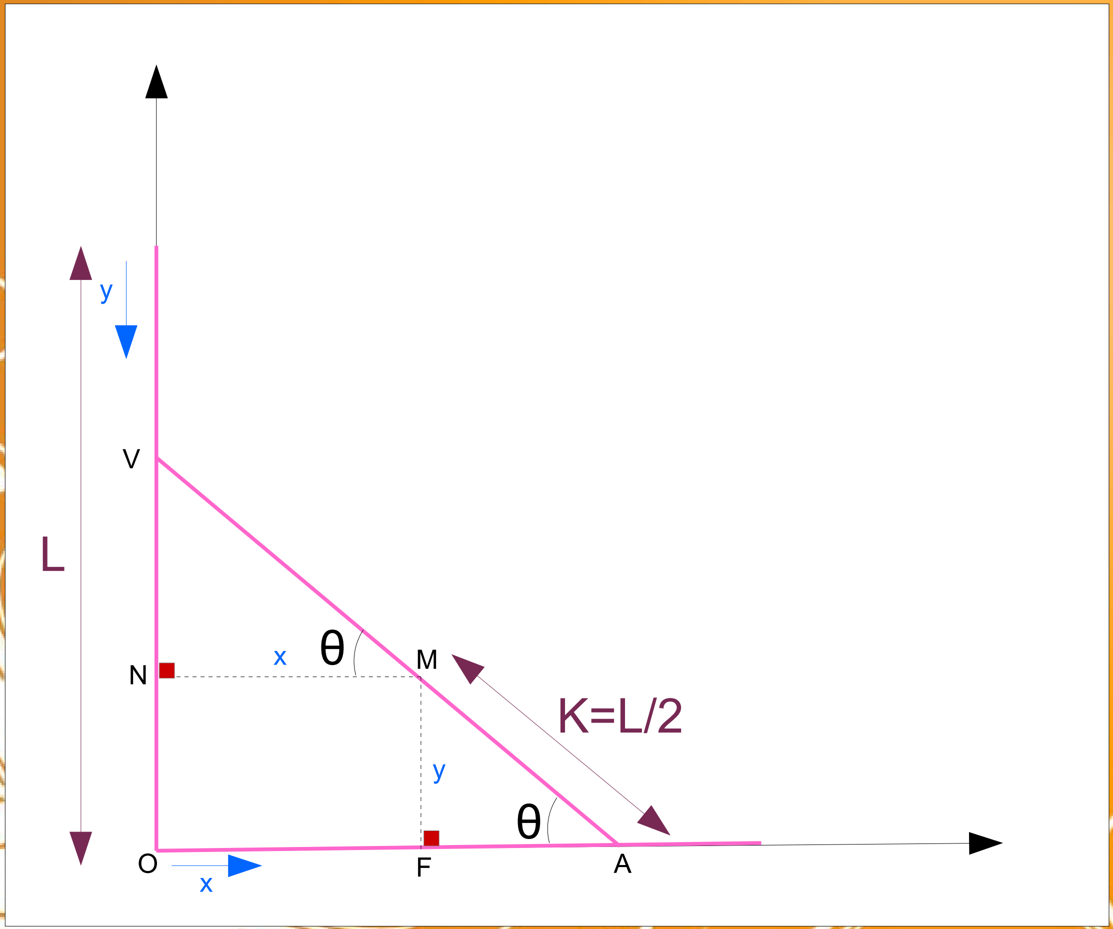
Plus le baton se rapproche de l'axe des Oy, plus l'angle qu'il forme avec l'axe des Ox se rapproche de $\frac{\pi}{2}$

- Le milieu de [VA] est M. Si on a , [IM], on observe que la mesure d'angle varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

Séance 3 :

- Calculs pour trouver les coordonnées du point M grâce au théorème de Thalès et des règles de trigonométries.

Schéma du problème



On se place dans le triangle AOV. Les droites (FM) et (OV) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AF}{AO} = \frac{AM}{AV} = \frac{MF}{VO} \longrightarrow y$$

Dans MVN on a :

$$\cos\Theta = \frac{NM}{K} \quad \text{donc} \quad \cos\Theta = \frac{x}{L/2}$$

D'où $x = \dfrac{\cos\Theta L}{2}$

De la même manière on a : $\sin\Theta = \dfrac{y}{L/2}$

D'où $y = \dfrac{\sin\Theta L}{2}$

Ainsi on obtient le système d'équations paramétriques décrivant la position du milieu du bâton :

$$\begin{cases} x = \dfrac{L}{2}\cos\Theta \\ y = \dfrac{L}{2}\sin\Theta \end{cases}$$

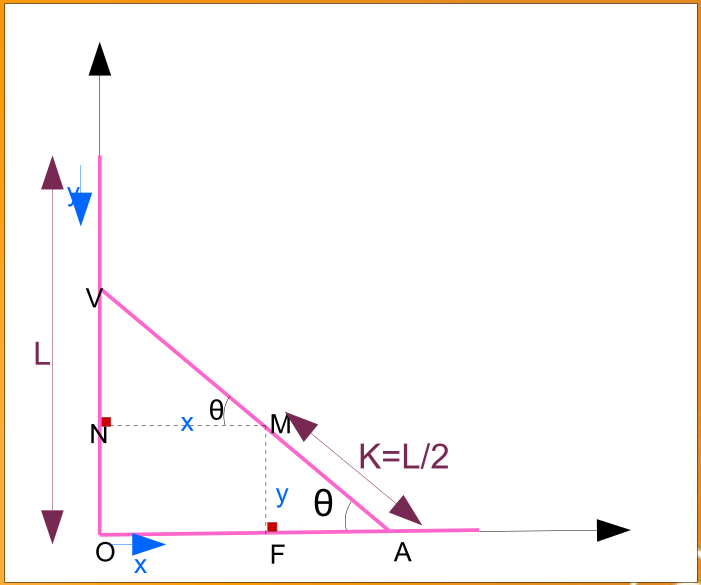
Θ paramètre décrit IR

On remarque que ce système d'équations paramétriques décrit un cercle car il est de la forme

$$\begin{cases} x = a + rcost \\ y = b + rcost \end{cases}$$

Donc le milieu du bâton décrit un cercle de centre (0;0) et de rayon L/2.

<u>Séance 4 :</u> détermination de l'équation du bâton ainsi que le système d'équations paramétriques d'un point quelconque .



On a $AM^2 = y^2 + AF^2$

$= y^2 + (AO - x)^2$

$= y^2 + AO^2 - 2AOx$

Or, on a $\frac{AM}{L} = \frac{AO - x}{AO} = \frac{y}{VO}$

Ainsi, on obtient $(L\cos\Theta - x) \times L\sin\Theta = y \times L\cos\Theta$

Et par suite on a : $L\cos\Theta - x = \frac{yL\cos\Theta}{L\sin\Theta}$

On isole donc x d'où : $x = \frac{-y\cos\Theta + L\cos\Theta\sin\Theta}{\sin\Theta}$

Comme on a isolé x, il sera plus simple par la suite d'isoler y et d'obtenir l'équation du bâton . Par conséquent, on isolant y dans l'équation précédente on obtient $y = L\sin\Theta - \tan\Theta x$

Coefficient :

$\vec{v}$ (1 ; $-\tan\Theta$)

AO – x = cos Θ X AM
y = sin Θ X AM

x = - cos Θ K + AO = - cos Θ K + L
cos Θ
y = sin Θ K