Travaux pratiques n°1 – *(Mathématiques Terminale S – Bréal 2002)*

P.F. Verhulst (1804-1849) a étudié l'évolution de populations animales. Dans certaines conditions (espace vital disponible en particulier), il a constaté que la population ne pouvait pas dépasser N individus et que le rapport u_n entre le nombre d'animaux à la n-ième année et N suivait la loi :

$$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) \text{ avec } u_0 \text{ donné entre 0 et 1.}$$

Un calcul sur tableur donne cet échantillon des termes de la suite affichés :

1er terme	0,145675	0,145676	0,145677	0,145678	0,145679	0,14568	0,145681
5e terme	0,00030547	0,00030468	0,00030389	0,0003031	0,00030231	0,00030152	0,00030073
10e terme	0,28154362	0,28089111	0,28023907	0,27958749	0,27893638	0,27828573	0,27763555
20e terme	0,68050091	0,05064547	0,24352358	0,90598791	0,82512645	0,14899191	0,11551439
30e terme	0,32583677	0,00163096	0,4013845	0,94299101	0,84813086	0,25665412	0,01115616
50e terme	0,93519138	0,07577607	0,7316414	0,90487213	0,75326693	0,00963676	0,36792856
75e terme	0,47529157	0,19089128	0,70293674	0,09868112	0,5081033	0,78464958	0,74238822
100e terme	0,08217130	0,99249075	0,83412469	0,81889649	0,57436847	0,00515782	0,66615766

1) Quelles remarques ce tableau de nombres vous suggère-t-il ?
2) Expliquer à l'aide d'une représentation graphique le phénomène observé.
3) Refaire la même expérience en partant de $u_0 = 0{,}1425624176$ avec un tableur et une calculatrice. Qu'observe-t-on ?
4) Peut-on faire des prévisions avec cette loi ? Pourquoi ? Donner une explication graphique.

Travaux pratiques n°2 *(Mathématiques Terminale S – Bréal 2002)*

Dans le cas de populations à évolution rapide, on modélise le phénomène en considérant que le nombre d'individus N(t) est une fonction dérivable sur les nombres positifs ou sur les réels.
De nombreuses modélisations sont faites selon le schéma d'hypothèses suivant :

- Soit N(t) l'effectif d'une population à l'instant t, on note $N_0 = N(0)$
- Si on suppose que pour une petite durée dt, la variation dN de N est directement proportionnelle à dt et à N alors on a : $dN = kNdt$ soit $N'(t) = kN(t)$.
  On résout cette équation différentielle par $N(t) = N_0\, e^{kt}$

1) Justifier dans ces conditions que la population croît si k>0 et décroît si k>0.

2) Calculer la durée T au bout de laquelle la population double (si k>0) ou diminue de moitié (si k<0) et démontrer qu'elle est indépendante de N_0.

3) Application : Dans l'étude des populations de poissons, le modèle fréquemment retenu pour rendre compte du nombre N de poissons vivants dans une cohorte à un instant t donné est :
   $N(t) = N_0\, e^{-zt}$ où z désigne le coefficient instantané de mortalité.

   Pour une population d'ombles de fontaine, on a les données suivantes :
   - début mai : émergence d'une population de 600 individus dans 100 m² de bassin ;
   - début septembre : la population estimée pour 100 m² de bassin est de 35 individus.

   Estimer la population début août en supposant que le modèle précédemment décrit rend compte du nombre d'individus de cette cohorte.

Travaux pratiques n°3 *(S. Damour - A la découverte de Maple – Ellipses -2005)*

On modélise l'évolution de la population $p(t)$ d'une espèce, en fonction du temps.

1) En l'absence de toute limitation et de toute prédation, la population croît de façon exponentielle, selon l'équation :

$$p'(t) = \alpha\, p(t).$$

Résoudre formellement l'équation différentielle avec la condition initiale : $p(0) = p_0$. Grâce à la commande `DEplot`, tracer la solution pour les paramètres $\alpha = 2$ et $p_0 = 1$, pour $t \in [0,5]$ et $p \in [0,100]$.

2) On rajoute un terme de limitation due au milieu, pour obtenir le modèle de croissance logistique suivant :

$$p'(t) = \alpha\, p(t)\left(1 - \frac{p(t)}{pmax}\right).$$

Résoudre formellement l'équation différentielle. Tracer la solution numérique pour les paramètres $\alpha = 2$, $p_0 = 1$ et $pmax = 100$, pour $t \in [0,5]$ et $p \in [0,100]$.

3) On rajoute maintenant un terme de prédation dû à une autre espèce, pour obtenir le modèle suivant :

$$p'(t) = \alpha\, p(t)\left(1 - \frac{p(t)}{pmax}\right) - \frac{\beta}{1 + m^2/p(t)^2}.$$

Essayer de résoudre formellement l'équation différentielle. Tracer la solution numérique pour les paramètres $\alpha = 2$, $p_0 = 1$, $pmax = 100$, $m = 1$ et $\beta = 3$, pour $t \in [0,5]$ et $p \in [0,100]$. Puis, tracer la solution pour $\beta = 3.7$. Finalement, tracer les solutions pour $\beta = 4$, $\beta = 5$ et $\beta = 10$, pour $p \in [0,1]$. Etudier qualitativement les tracés obtenus.