Introduction

Susciter l'intérêt des élèves, donner du sens à l'enseignement des mathématiques sont deux préoccupations essentielles de tout professeur. Varier les approches, les supports, les méthodes contribue certainement au maintien du goût pour la matière. Les pistes de réflexion sont nombreuses.

Quelques enseignants de collège, réunis en ERR, ont décidé d'orienter leur travail sur des exercices liés à l'épistémologie. En effet, il est assez intéressant, voire même surprenant, de constater la curiosité de nos élèves lorsque l'on aborde l'histoire des mathématiques.
Par ailleurs, le programme officiel recommande l'utilisation de ce genre de références : « *..Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques et ainsi enrichir les connaissances…* »

Notre souhait était de créer des situations suffisamment riches d'un point de vue mathématique autour de repères historiques. Ces documents, fruits du travail de ce groupe, présentent donc un ensemble d'exercices, liés à l'épistémologie. La quasi-totalité d'entre eux ont été expérimentés en activités ou sous la forme de devoirs en temps libre afin d'en faciliter l'appropriation par les élèves. La forme des questions diffère souvent de celles rencontrées dans la plupart des exercices d'entraînement habituels ; c'est pourquoi la difficulté est parfois plus importante.

Chaque fiche comporte une ou plusieurs parenthèses historiques (en italique) se mêlant à des questions plus ou moins guidées, voire même des remarques didactiques.

En plus du désir de surprendre, d'intéresser nos élèves, le principal objectif de ces problèmes est de donner quelques bribes de culture mathématique. En outre, il s'agit de faire comprendre aux élèves la construction des savoirs à travers le temps, leur donner un minimum de repères historiques.

Nous avons donc construit quelques exemples de situations sur les quatre niveaux du collège dans les domaines numérique et géométrique. La liste des thèmes abordés est, bien entendu, loin d'être exhaustive. Le tableau synoptique ci-dessous regroupe les mathématiciens cités dans les fiches ainsi que les problèmes évoqués.

REPÈRES CHRONOLOGIQUES POUR UNE HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE

(Seuls figurent les noms des personnages les plus connus ou rencontrés dans les thèmes)

Mathématiques babyloniennes et égyptiennes	1500 av. J-C.		Problèmes correspondant à - du 1er degré (fausse position) - du 2ème degré
Mathématiques grecques	600 av. J.-C. 500 ap. J.-C.	Thalès de Milet (- 624 ; -547) Pythagore de Samos (- 580 ; - 500) Hippocrate de Chio (- 400) Euclide d'Alexandrie (- 300) Archimède de Syracuse (- 287 ; -212) Érathostène (- 287 ; - 192) Hipparque de Nicée (- 170 ; - 125) Héron d'Alexandrie (75 ; 150) Diophante (200) Pappus d'Alexandrie (320)	- premiers théorèmes en géométrie plane - arithmétique - quadrature des lunules - méthode axiomatique - géométrie, leviers - astronomie, nombres premiers - astronomie, trigonométrie - métriques (aires, …) - arithmétique - synthèse des mathématiques grecques
Mathématiques indiennes	400 - 1200	Aryabhata (500) Brahmagupta (600) Bhaskara (1100)	arithmétique, trigonométrie, …
Mathématiques arabes	700 - 1500	Al-Khwarismi (700) Al-Kashi (1400)	invention de l'algèbre, arithmétique, …
Renaissance	1500 - 1600	Viète (1540 ; 1603) Stévin (1548 ; 1620) Marolois (1572 ; 1627)	- introduction du symbolisme algébrique - introduction des décimaux - géométrie, ouvrages de fortifications
17ème siècle	1630 - 1670	Pascal (1623 ; 1662) Descartes (1569 ; 1650)	- première machine à calculer - géométrie analytique
19ème siècle	1800 - 1850	Chasles (1793 ; 1880)	- géométrie

Niveau $6^{ème}$

Quelques techniques de multiplication
à travers l'histoire

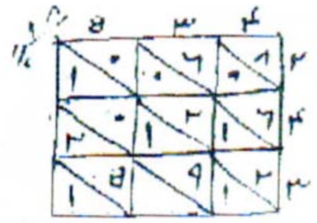
Lis ce document et réponds aux questions au fur et à mesure

A. Multiplication « actuelle »

1) En utilisant la technique actuelle, pose et effectue les deux multiplications suivantes :
314 _ 934 et 37 _ 24

B. Multiplication « per gelosia ».

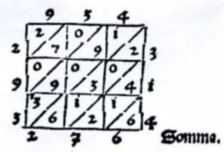
***« Un peu d'histoire »* : Les arabes ont mis au point au XVème siècle une méthode pour effectuer une multiplication « par écrit ». (Il existait aussi des procédés destinés au calcul mental « par effaçage », associés à la planche à poussière).**
Cette technique était certainement utilisée dès le XIIIème siècle (en Inde, en Chine, dans les pays d'Islam) mais c'est grâce au mathématicien arabe Al Kasi qu'elle a été connue (voir doc.1)
Elle a été ensuite transmise par les commerçants à l'Occident sous le nom de multiplication « per gelosia » ; ce qui signifie « par jalousie » (une jalousie est une fenêtre grillagée sur lesquelles le soleil marque une ombre diagonale, et à travers lesquelles les femmes et surtout les maris jaloux peuvent voir sans être vus !)
La légende dit que cette méthode était maîtrisée sans difficultés par les commerçants et qu' il fallait donc pour la noblesse un système plus difficile d'accès dont elle aurait le privilège. D'où la naissance de la disposition que tu pratiques aujourd'hui, dite « multiplication à l'italienne »



doc. 1 Produit arabe : 534 x 342
Histoire universelle des chiffres Ifrah
"Source internet"

Voici un exemple (doc. 2) publié à Trévise (Italie) en 1478. Tu retrouves la multiplication de 934 par 314.
2) Essaie de comprendre ce procédé en analysant le document 2 ci-contre (n'oublie pas le résultat trouvé à la question 1)
Calcule ensuite en utilisant cette technique les produits :
37 _ 24 et 1426 _ 354
(Tu es donc amené à construire 2 fenêtres…)

doc.2



"Source internet"

(Indication facultative selon le niveau de la classe : « Dans chaque petit carré, on note le produit des deux chiffres placés, l'un en haut de la colonne, l'autre à droite de la ligne du tableau. Le résultat s'obtient en ajoutant tous les chiffres en diagonales dans le grand carré, en commençant par la droite. Attention aux retenues ! »)

3) Cette « présentation en diagonale » était très astucieuse et très proche de la nôtre. Qu'évitait-elle de faire que la méthode actuelle t'oblige à effectuer ?

4) ***Une application amusante et précise avec la calculette :***
Cherchons par exemple le résultat de 5 315 827 _ 436 652

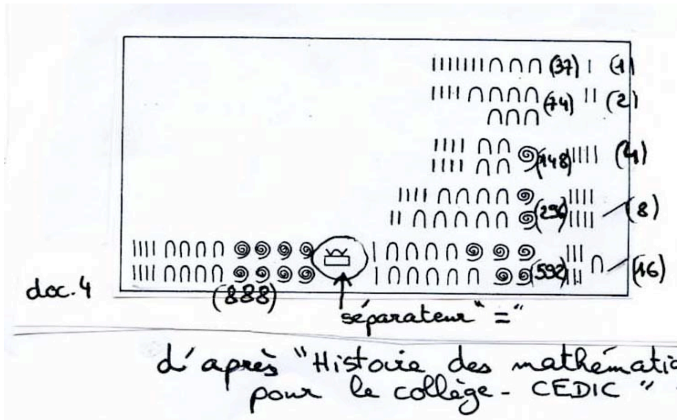
Si nous prenons une calculette nous obtenons un résultat écrit avec une notation que tu ne connais pas et qui manque de précision (Tu peux vérifier !). Ceci ne nous convient pas toujours. Cependant, il n'est pas agréable d'effectuer l'opération manuellement.
La multiplication « per gelosia » va venir à notre secours !! Il suffit de grouper les chiffres par 3 comme ci-dessous, chaque calcul intermédiaire peut être effectué à la machine. Il ne reste alors qu'à effectuer l'addition finale en diagonale. (voir doc. 3)

Calcule avec cette méthode en utilisant la calculatrice et en construisant une « fenêtre » :
10 328 277 _ 8 665 429

C. Multiplication égyptienne.

« Un peu d'histoire » : La technique présentée ci-dessous était employée par les commerçants du Nil quelques siècles avant J.C.
Voici comment les Egyptiens effectuaient la multiplication : 37 _ 24 (voir doc. 4).

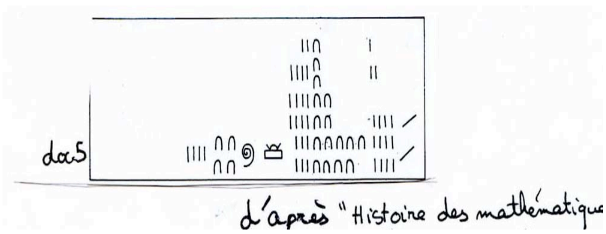
Pour plus de facilité de compréhension, la « traduction », dans notre système actuel, des différents nombres intervenants dans le calcul est donnée.



5) Essaie de comprendre cette technique. Pour cela, recopie et complète les égalités suivantes :
37 _ ………… = 296 et 37 _ …………. = 592
Or, 24 = ………. + …………
Donc : 37 _ 24 = 296 + 592 = …………….

6) Les Egyptiens avaient-ils besoin d'apprendre toutes les tables de multiplication ? Explique.

7) Si tu as étudié la numération égyptienne, peux-tu trouver quelle est l'opération qui est réalisée ci-contre (doc. 5)

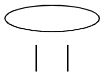


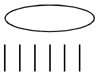
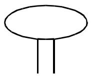
8) Effectue à la manière égyptienne (avec les hiéroglyphes si tu les as étudiés, accompagnés de la traduction comme au document 3) : 48 _ 57
Auparavant, répond à cette question : parmi les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, lesquels dois-tu additionner pour obtenir 57 ?

9) A ton avis, ce système permettait-il de faire toutes multiplications entre deux nombres entiers naturels ?

Niveau 5ème

Opérations sur les fractions égyptiennes

Les Egyptiens n'utilisaient que des fractions de numérateur 1, écrites  ***pour*** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$,

 ***pour*** $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$ ***…., à l'exception de la fraction*** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ ***notée***  .

1) Dans leurs calculs ils utilisaient des égalités du genre :

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\,;\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\,;\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$$

A toi de compléter :

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{....}\,;\qquad \frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}=\frac{1}{....}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{....}\,;\qquad \frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{1}{....}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{....}\qquad \frac{1}{104}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=\frac{1}{....}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{6}\qquad \frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}=\frac{1}{....}$$

2) ***Ils avaient aussi des tables donnant le double des fractions 1/n.***
On trouve dans le Papyrus Rhind une table pour les doubles des fractions de dénominateurs impairs jusqu'au dénominateur 101.
En voici un extrait : la première colonne donne le dénominateur de la fraction à doubler, la seconde les dénominateurs des quantièmes dont la somme est le résultat cherché. (tableau 1)
On trouve par exemple 21 dans la première colonne et en face 14, 42, cela signifie que : $\boldsymbol{\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}}$.

Voici comment ils exprimaient le double de $\boldsymbol{\frac{1}{7}}$ ***:***

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$$

Tableau 1

5	3	15		
7	4	28		
9	6	18		
11	6	66		
13	8	52	104	
15	10	30		
17	12	51	68	
19	12	76	114	
21	14	42		
23	12	276		
25	15	75		
…	…	…	…	…
81	54	162		
83	60	332	415	498
85	51	255		
87	58	174		
89	60	356	534	890
91	70	130		
93	62	186		
95	60	380	570	
97	56	679	776	
99	66	198		
101	101	202	303	606

d'après " Histoire des mathématiques pour le collège - CEDIC "

3) Les multiplications n'étaient pas faciles à réaliser !

Par exemple pour multiplier $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$ par $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, regarde ci-dessous (tableau 2) comment les égyptiens procédaient.

a) Analyse ce calcul, puis calcule comme tu en as l'habitude

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{2}+\frac{1}{14}).$$

La réduction au même dénominateur n'est-elle pas une bonne invention évitant d'avoir à connaître des identités comme : « $\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}=\frac{1}{8}$

b) Multiplie à la manière égyptienne $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ par $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

Tableau 2

1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{56}$
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\underbrace{\frac{1}{28}+\frac{1}{56}}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=1$$

d'après " Histoire des mathématiques pour le collège - CEDIC "

Quelques techniques de multiplication
à travers l'histoire

Lis ce document et réponds aux questions au fur et à mesure

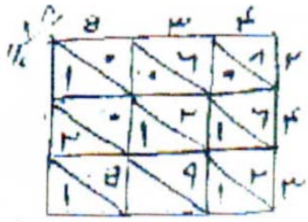
A. Multiplication « actuelle »

1) En utilisant la technique actuelle, pose et effectue les trois multiplications suivantes :

314 _ 934 ; 37 _ 24 et 35 _ 101

B. Multiplication « per gelosia ».

« Un peu d'histoire » : Les arabes ont mis au point au XVème siècle une méthode pour effectuer une multiplication « par écrit ». (Il existait aussi des procédés destinés au calcul mental « par effaçage », associés à la planche à poussière).
Cette technique était certainement utilisée dès le XIIIème siècle (en Inde, en Chine, dans les pays d'Islam) mais c'est grâce au mathématicien arabe Al Kasi qu'elle a été connue (voir doc.1)
Elle a été ensuite transmise par les commerçants à l'Occident sous le nom de multiplication « per gelosia » ; ce qui signifie « par jalousie » (une jalousie est une fenêtre grillagée sur lesquelles le soleil marque une ombre diagonale, et à travers lesquelles les femmes et surtout les maris jaloux peuvent voir sans être vus !)
La légende dit que cette méthode était maîtrisée sans difficultés par les commerçants et qu' il fallait donc pour la noblesse un système plus difficile d'accès dont elle aurait le privilège. D'où la naissance de la disposition que tu pratiques aujourd'hui, dite « multiplication à l'italienne »
Voici un exemple (doc. 2) publié à Trévise (Italie) en 1478. Tu retrouves la multiplication de 934 par 314.

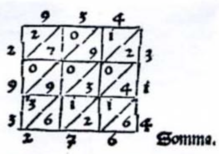


doc. 1 Produit arabe : 534 x 342
Histoire universelle des chiffres Ifrah
"Source internet"

2) Essaie de comprendre ce procédé en analysant le document 2 ci-contre (n'oublie pas le résultat trouvé à la question 1)
Calcule ensuite en utilisant cette technique les produits :

37 _ 24 et 1426 _ 354

(Tu es donc amené à construire 2 fenêtres…)

doc.2


"Source internet"

3) Cette « présentation en diagonale » était très astucieuse et très proche de la nôtre.
Qu'évitait-elle de faire que la méthode actuelle t'oblige à effectuer ?

C. Multiplication égyptienne.

« Un peu d'histoire » : La technique présentée ci-dessous était employée par les commerçants du Nil quelques siècles avant J.C.
Voici comment les Egyptiens effectuaient la multiplication : 37 _ 24 (voir doc. 3).

Voici la traduction de ce procédé avec la « traduction » de nombres dans notre système d'écriture.
Il s'agit de la même opération : 37 _ 24 (doc. 4)

		37	1	
		74	2	doc. 4
		148	4	
		296	8	
888	=	592	16	

Voici comment ils auraient pu calculer 12 _ 12 (doc.5)

		12	1	
		24	2	doc. 5
		48	4	
144	=	96	8	

4) Essaie de comprendre ces deux exemples. Explique en utilisant la <u>distributivité</u> comment ils obtenaient le produit de 37 par 24.

5) Les Egyptiens avaient-ils besoin d'apprendre toutes les tables de multiplication ? Explique.

6) Effectue « *à la manière égyptienne* » 48 _ 57 (Tu présenteras comme eux mais en utilisant les nombres écrits dans notre système actuel).

Conseil : commence par te demander comment obtenir 57 avec certains des nombres : 1, 2, 4, 8, 16, 24, 32…

7) A ton avis, ce système permettait-il de faire toutes les multiplications entre deux nombres entiers naturels ?

D. Multiplication russe.

Voici comment les russes effectuaient 19 _ 37 ***19 _ 37*** ***9 _ 74*** ***4 _ 148*** ***2 _ 296*** ***1 _ 592*** ***703***	***Principe*** - ***On multiplie l'un (le plus petit) par 2 et l'autre est divisé par 2. On garde le quotient entier ;*** - ***On ne retient que les valeurs associées à un impair. On barre les autres ;*** - ***On calcule la somme de ces valeurs***

Explication actuelle (avec la distributivité)

19 _ 37 = ((9 _ 2) + 1) _ 37   ***car 19 = 9 _ 2 + 1***

= 37 _ 9 _ 2 + 37 _ 1   ***(en « distribuant »)***

= 9 _ 74 + 37

= ((2 _ 4) + 1) _ 74 + 37   ***car 9 = 2 _ 4 + 1***

= 74 _ 2 _ 4 + 74 _ 1 + 37   ***(en « distribuant »)***

= 4 _ 148 + 74 + 37

= 2 _ 2 _ 148 + 74 + 37   ***car 4 = 2 _ 2***

= 2 _ 296 + 74 + 37

= 703

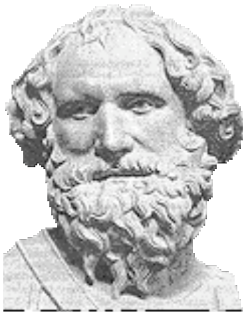
8) Essaie de comprendre cette méthode. Puis, « *à la manière russe* », calcule 35 _ 101.
Donne ensuite les explications comme ci-dessus en utilisant la distributivité.

Niveau 4ème

Le problème d'Archimède

source : Mathématiques 4ème

Collection Durrande-Such Bordas



Archimède de Syracuse (du grec Arkhimêdês)

Cette statue du Musée National à Naples (Italie) est connue pour représenter Archimède. En réalité, c'est un buste d'Archimados III, roi de Sparte au 3ème siècle avant J-C.

Archimède (source internet + dictionnaire mathématiques)

Savant grec (Syracuse, 287 av. J.-C. - id., 212 av. J.-C.), fondateur de l'hydrostatique

Fils de l'astronome Phidias, Archimède est très rapidement influencé par l'école d'Alexandrie. Après des voyages en Egypte et en Espagne, il s'installe définitivement à Syracuse. Protégé par le souverain et mis à l'abri des soucis matériels, il peut alors se consacrer à ses recherches scientifiques. Formidable mathématicien, Archimède est aussi un brillant physicien

Exercice :

Un orfèvre devait fabriquer une couronne destinée au roi Héron de Syracuse et il reçut pour ce faire 8 livres d'or et 2 livres d'argent. La couronne terminée pesait 10 livres. Le roi méfiant craignait que l'orfèvre eût substitué à une partie de l'or qui lui avait été remis un même poids d'argent de moindre valeur. Il chargea alors le mathématicien Archimède de vérifier si son soupçon était fondé, sans cependant démonter la couronne. Archimède pesa la couronne immergée; pour ce faire il l'attacha à un fil suspendu à l'un des plateaux d'une balance et la plongea dans de l'eau. Elle ne pesait plus que 9 (3/8) livres. Il constata en outre que 10,5 livres d'argent pesaient dans l'eau une livre de moins et que 10 livres d'or pesaient, dans l'eau, 0,5 livre de moins. A l'aide de ces renseignements et du tableau ci-dessous, calculer la masse x d'or dans la couronne.

Masse totale (dans le texte:<<poids>>)	***Masse volumique***	***volume***
x livres d'or	$10 : 0,5 = 20$	$x : 20$
$(10- x)$ livres d'argent	$10,5 : 1 = 10,5$	
10 livres d'alliage	$10 : (5/8)$	

Calcul du rayon de la terre par Eratosthène

ÉRATOSTHÈNE DE CYRÈNE 284 - 192 av. J.-C

Conservateur à la bibliothèque d'Alexandrie, ÉRATOSTHÈNE s'est distingué par ses travaux sur le calcul de la longueur du méridien terrestre avec une précision stupéfiante ainsi que par son célèbre crible de recherche des nombres premiers (nombres n'admettant pour diviseurs que 1 et eux- mêmes).

Exercice:

Il part d'un simple constat : << Un jour de l'année il remarque que le soleil éclaire le fond des puits dans la ville de Syène (on pense que cette ville est l'actuelle ville d'Assouan en Egypte). Cette idée signifie qu'à cet endroit les rayons du soleil sont verticaux.
Il remarqua que ce même jour à Alexandrie, située à 800 km de Syène, une tour de 25 m de haut fait une ombre de 3,1 m.

1)Faire un schéma traduisant ces constats.(On appellera OA la hauteur de la tour O étant le sommet, BA l'ombre de celle-ci, O' le centre de la terre et O'S la distance entre le centre de la terre et le fond du puits.

2)Calculer l'angle BÔA

*3)*Démontrer que BÔA=AÔ'S. *(Pour cela assimiler l'arc BA au segment [BA] et le triangle OAB en un triangle rectangle en A.*

4)Calculer le périmètre de la terre puis son rayon.

5)Contrôler votre résultat. Expliquer comment vous avez procédé.

La Numération

Compter et dénombrer ont fait partie des premières nécessités de l'Homme (hommes ou femmes !). Aussi l'homme a-t-il vite attribué une valeur à une main, un pouce, des cycles de lune, des saisons de pluie, etc …
Tous ces référents ont permis de construire les premiers systèmes de chiffres. Dès lors, un problème de taille s'est posé : la précision.
<<Avoir un troupeau qui comporte une main, ou bien une main et un, ou bien un peu plus d'une main de moutons devenait source évidente de conflits lors des échanges>>.
C'est à cette époque que sont apparus des systèmes de comptage avec le choix :

- d'un nombre de base (pour le système décimal le nombre de base est 10)

- d'échelle, des mots, des symboles représentant les chiffres (ce sont des nombres inférieurs à la base choisie)

- d'un système de représentation des nombres à partir de ce nombre de base et des chiffres. On a remarqué l'utilisation de la notion de bases chez des peuples primitifs (le mot primitif n'a rien de péjoratif ici en tout cas). Les bases les plus couramment utilisées sont la base deux, la base trois, la base quatre, la base soixante.

Dans les Iles du Pacifique on compte de la façon suivante:
Un, deux, deux et un, deux et deux, beaucoup. La base cinq aurait été la première base utilisée. On retrouve sa trace en Europe jusque vers 1800 par exemple dans les calendriers germaniques. En Afrique du Sud, on compterait de la façon suivante : un, deux, trois, quatre, main, main et un, main et deux, etc…
<u>Base deux :</u>
Dans cette base tous les chiffres et nombres sont écrits en utilisant uniquement des 0 et des 1.
L'écriture en base deux est utilisée en électronique, dans les ordinateurs et surtout dans l'algèbre de Boole (on parle de problèmes de logique).
Exemple : le << 1 0 >> (lire <<un zéro>>) représente le nombre deux dans le système décimal, et, Inversement, le nombre 7 sera représenté par 111 (lire <<un un un >>).

<u>Base douze:</u>
L'utilisation de cette base trouve son explication dans le fait qu'une année lunaire a 12 cycles.

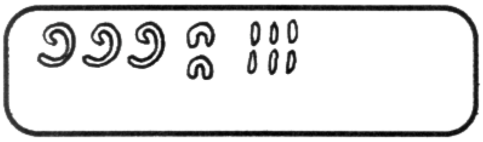
<u>Base vingt</u> (numération vicésimale) :
Les indiens d'Amérique, les Mayas et les peuples Celtes (Europe du Nord) ont utilisé cette base.
En France, on dit quatre-vingts au lieu de OCTANTE, terme utilisé en Belgique et en Suisse : c'est un reste du système à base vingt.

<u>Base soixante</u> (système sexagésimal) :
Les babyloniens sont les premiers à avoir partagé un angle en degrés.
Le <<0>>, lire zéro, a été utilisé très tardivement.

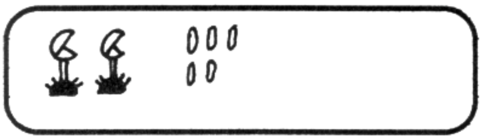
La numération la plus « importante » qui nous est parvenue est la numération égyptienne.
Voir les documents suivants (source internet google : numération égyptienne).

Découvrir le système de numération égyptien.

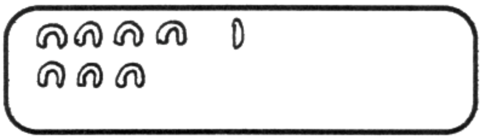
Observer



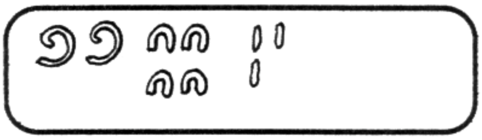
Cette inscription égyptienne représente le nombre **326.**



Cette inscription égyptienne représente le nombre **2005.**



Cette inscription égyptienne représente le nombre **71.**



Cette inscription égyptienne représente le nombre **243.**

Comprendre

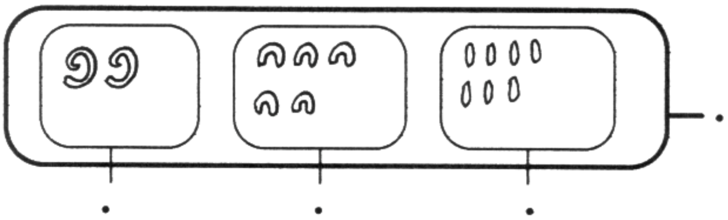
1. Traduis les inscriptions égyptiennes suivantes

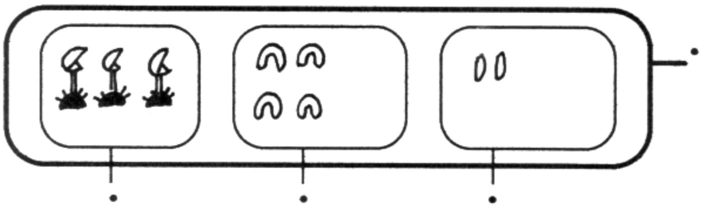
2.Quels dessins, les Egyptiens utilisent-ils pour représenter...

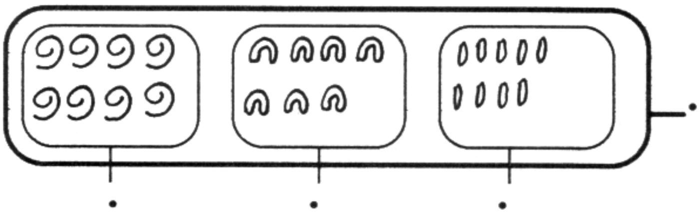
1 unité	1 dizaine	1 centaine	1 millier
1	10	100	1 000

Découvrir le système de numération égyptien. (2)

3.Indique la valeur de chaque groupe de dessins.







4. Ecris les nombres suivants en utilisant le système égyptien.

75 **641** **302** **1 420**

5. Ecris le nombre 999 en utilisant le système égyptien.

999

Combien de « dessins égyptiens » a-t-il fallu écrire ?

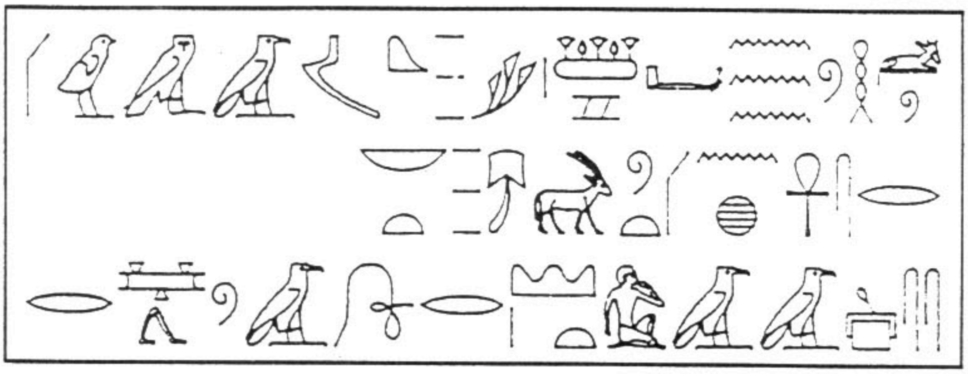
6. Ecris un nombre égyptien sur une feuille de papier et demande à un camarade de déchiffrer ce nombre.

7. Ecris ta date de naissance en utilisant le système égyptien.

jour **mois** **année**

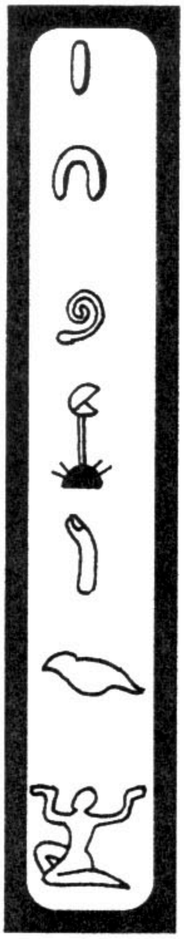
Chez les Egyptiens

Les Egyptiens écrivaient leurs textes à l'aide de dessins que l'on appelle « hiéroglyphes ».



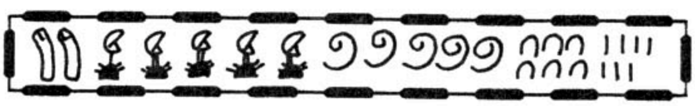
1. L'écriture des nombres

Les Egyptiens comptaient, comme nous, en base 10.
Ils avaient donc un hiéroglyphe (dessin) différent pour chaque puissance de 10.



- *L'unité* était représentée par un bâton.
- *La dizaine* était représentée par une sorte de « **U** » retourné, comme une anse d'un panier.
- *La centaine* était représentée par un rouleau de papyrus.
- *Le millier* était représenté par une fleur de lotus.
- *La dizaine de mille* était représentée par un doigt qui montrait les étoiles dans le ciel.
- *La centaine de mille* était représentée par un têtard, car il y avait beaucoup de grenouilles sur les bords du Nil.
- *Le million* était représenté par un dieu agenouillé soutenant le ciel tout entier. Ce dessin signifie aussi « millions d'années ou éternité ».

Les Egyptiens ne savent pas compter plus loin. Ils ne connaissent pas l'abaque pour ranger leurs chiffres. Ils ajoutent les dessins les uns à la suite des autres. Les nombres sont parfois très longs à écrire.



Chez les Egyptiens

On trouve de nombreuses représentations de nombres sur les murs des temples et des palais égyptiens.

Complète

Après une bataille, le pharaon (roi) a ramené .... prisonniers en Egypte.

Complète

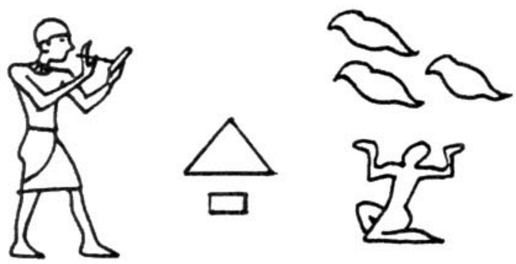
Des habitants du désert ont apporté des cadeaux au pharaon :
...............gazelles et ....ânes chargés de provisions.

Complète

Le potier compte ses amphores.
Il y a ....petites amphores et ....grandes amphores.

Complète

Les « scribes » enregistrent le nombre de sacs de blé que l'on gardera en réserve.
Ils comptent .... sacs de blé.



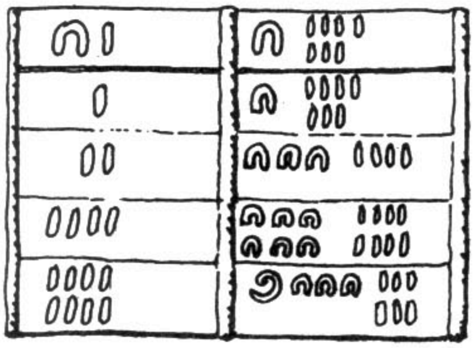
Complète

L'architecte compte le nombre de blocs de pierre qu'il faudra pour construire la pyramide du pharaon.

Chez les Egyptiens

3. La multiplication

Pour effectuer l'opération **11 X 17** *par exemple, les Egyptiens dessinaient deux colonnes. Ils écrivaient le plus petit nombre dans celle de gauche et, le plus grand dans celle de droite.*



Dans chaque colonne, on double le nombre (à gauche: 1,2,4,8) (à droite: 17,34,68,136)

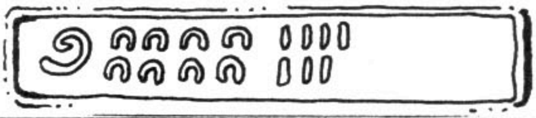
11	X → 17
1	17
2	34
4	68
8	136

Ensuite on combine les opérations :

11 X 17 = (1 X 17)+(2 X 17) + (8 X 17)

11 X 17= 17 + 34 + 136

11 X 17= ....



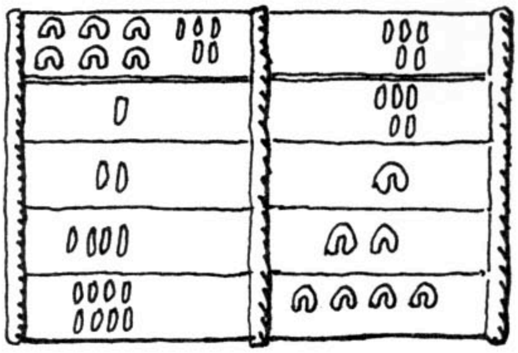
4. La division

65	: 5
1	5
2	10
4	20
8	40

13

65

Pour la division, on travaille de la même façon, mais les colonnes sont inversées. Le diviseur est placé dans la colonne de droite.



On obtient la valeur du nombre à diviser en combinant les nombres de la colonne de droite.
(65= 5+20+40)

Pour obtenir la réponse de l'opération **65:5** *il suffit d'additionner les nombres correspondants dans la colonne de gauche.*
(1+4+8) = 13

Notes pour les enseignants

CHEZ LES ÉGYPTIENS

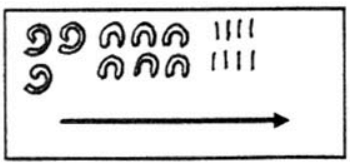
Il est important de constater que le système de numération égyptien est construit comme le nôtre, **en base 10**. Par contre, comme ils ne connaissent pas l'abaque (la numération de position) il faut parfois beaucoup de symboles pour représenter une quantité.

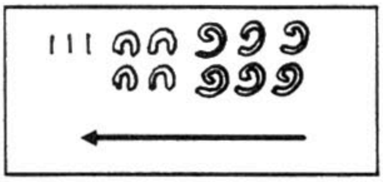
> **Exemple:**
>
> **Le nombre 25 567 s'écrit à l'aide de cinq chiffres dans notre système de numération, alors que les Egyptiens devaient utiliser 25 symboles pour l'écrire.**
> (voir page 7)

Il est à remarquer que l'Egyptien pouvait, d'un simple coup d'oeil, dénombrer assez rapidement le nombre d'unités, le nombre de dizaines, le nombre de centaines, etc...
Ce qui n'était pas le cas dans d'autres systèmes de numération (ex: chez les Grecs).

Ecriture des symboles

Les symboles égyptiens peuvent s'écrire dans des sens différents.



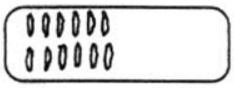


LES OPERATIONS

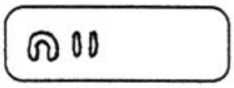
Pour l'addition:

Il s'agit de regrouper les symboles des unités ( ), puis ceux des dizaines ( ), puis ceux des centaines ( ), etc...
Pour les additions avec report, il est nécessaire d'effectuer certaines transformations d'écriture :

Si en regroupant les unités, on obtient :

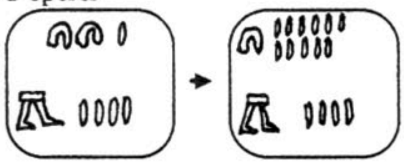


Après transformation, on écrira :

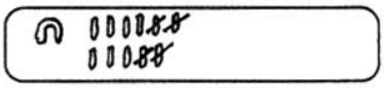


Pour la soustraction:

On opère inversement de l'addition, en décomptant le nombre de symboles des unités ( ), des dizaines ( ), etc...
Pour les soustractions avec emprunt, il est nécessaire d'effectuer certaines transformations d'écriture avant d'opérer



On peut imaginer que la réponse était obtenue en barrant les symboles à décompter.



> **Le lecteur « fouineur » aura remarqué que le symbole représentant la centaine de mille était un oiseau dans la version du TABLEAU NOIR N°1, alors qu'il apparaît sous la forme d'un têtard dans le N°7. En réalité, les égyptologues ne sont pas tous d'accord sur l'image représentée. Le têtard est peut-être une hypothèse plus plausible, mais n'est certainement pas une certitude. Tout le monde est par contre d'accord pour affirmer que derrière ce symbole se cache un grand nombre.**

Les fractions égyptiennes

Les Egyptiens utilisaient surtout les inverses des nombres entiers ; ils se servaient pour représenter des fractions de nombres de l'hiéroglyphe de la bouche

en plaçant celui-ci au-dessus du nombre faisant fonction de dénominateur :

Lorsque le dénominateur ne pouvait pas tenir tout entier sous le signe de la « bouche », ils inscrivaient l'excédent à la suite ; ainsi $\frac{1}{349}$ *:*

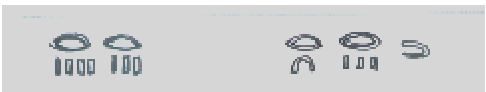
La fraction $\frac{1}{2}$ *était représentée ainsi :*

Pour représenter une fraction de numérateur autre que 1, en général, ils la décomposaient en une somme d'inverses de nombres entiers différents;

par exemple $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$

<u>*(d'après l'histoire universelle des chiffres de Georges Ifrah)*</u>

1. Quelles fractions sont représentées ci-dessous ?



2. Calculer $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; $b = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$; $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ et représenter a, b et c sous forme de hiéroglyphes.
3. Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$; la décomposition d'une fraction en une somme d'inverses d'entiers différents est-elle unique ?

Une « bonne » décomposition devait respecter certaines règles :

- *Elle ne devait pas utiliser plus de quatre inverses,*
- *Elle ne devait pas utiliser deux fois la même fraction,*
- *Les dénominateurs devaient être inférieurs à 1000, et si possible pairs*

<u>*(d'après « le calcul et la géométrie aux temps des pharaons » M Rousselet Ed Archimède)*</u>

4. Proposer une « bonne » décomposition pour chacune des fractions suivantes : $\frac{9}{10}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{43}{70}$

Activités autour d'un texte problème de Bhaskara…

Bhaskara (1114-1185)
Mathématicien et astronome indien qui a marqué l'histoire des Mathématiques, il a entre autres, rédigé un traité de calcul élémentaire dédié à sa fille et portant le nom de celle-ci : La Lilavati, ce qui signifie « la gracieuse ».
Il y présente la numération de position, les huit opérations, les fractions, les calculs d'aires et de volumes, la résolution de problèmes de partage, d'intérêts, d'alliages.
Cet ouvrage a la particularité d'être écrit sous forme de poèmes, il contient environ 270 strophes, celles qui décrivent les opérations alternent avec celles donnant des exemples à traiter.

Voici un problème issu de la Lilavati de Bhaskara écrit au XIIème siècle ap JC :

D'un essaim d'abeilles, **un cinquième** des abeilles sont venues vers une fleur de bananier et **un tiers** vers une fleur de lotus, un nombre égal à **trois fois la différence entre ces deux nombres**, ô belle aux yeux de gazelle a volé vers un arbre à l'écorce amère, succédané de quinquina.
Une autre enfin, se balançant, erre ça et là dans les airs attirée par le délicieux parfum du jasmin.
Dis-moi, ô ma charmante, quel est le **nombre de ces abeilles** ?

- La résolution de ce problème ancien va constituer une première étape :

Le travail peut-être mené niveau 4° en travaillant la mise en équation et les opérations sur les nombres en écriture fractionnaire …mais également niveau 5° sans utiliser la mise en équation mais en travaillant par comparaison et en rédigeant les différentes étapes du raisonnement, on arrive alors à la conclusion suivante :

$\frac{14}{15}$ des abeilles plus une représentent le nombre total d'abeilles donc une abeille correspond à $\frac{1}{15}$ de ce nombre, d'où la réponse : 15 abeilles.

- Dans un second temps, d'autres textes de problèmes anciens de partage vont être distribués aux élèves ainsi qu'une grille de lecture et ils vont se rendre compte qu'ils comportent tous des similitudes :

Les fractions utilisées dans les énoncés sont de la forme $\frac{1}{b}$ avec b entier ou $\frac{2}{3}$ (fractions égyptiennes).

L'équation à résoudre se ramène toujours à une égalité du type : $\frac{n}{n+1}x + a = x$ (n et a étant des entiers).

- La troisième étape va consister à faire écrire aux élèves eux-mêmes des textes problèmes « à la manière de »…c'est à dire en tenant compte des conditions précédemment étudiées, les productions seront échangées entre les élèves pour résolution.

  Le collègue de français peut intervenir pour travailler la forme et le contexte.

Elaboration de textes problèmes à la manière de…

Après avoir travaillé sur les textes de problèmes anciens, il est possible de demander aux élèves d'en produire en respectant certaines consignes imposées.
Comme ils ont pu le remarquer à partir de quelques énoncés, ils devront utiliser des fractions « égyptiennes » et faire en sorte que l'équation se ramène au type $\frac{n}{n+1}x + a = x$ avec n et a entiers.
Les élèves travaillent par groupe de deux et se rendent vite compte qu'il est bon de choisir les données numériques qui conviennent avant de rédiger un texte, ainsi ils vont par essais successifs trouver des fractions qui répondent aux conditions.
Voici deux exemples de textes produits par des élèves de $4^{\text{ème}}$; le vocabulaire et le contexte ont été travaillés avec leur professeur de français.

Problème 1 :

Ahmed Namir était un vieil homme habitant la campagne aux environs de Bagdad. Sentant sa fin proche, il décida de partager sa fortune entre ses trois fils : Karim, Omar et Malba.
Ahmed donna la moitié de ses pièces d'or à Karim car c'était l'aîné, le tiers à Omar et les cinquante pièces restantes à Malba.

Combien de pièces d'or Ahmed possédait-il ?

Problème 2 :

Un matin, le calife Al Ma'mun, très intéressé par les sciences et lui-même très instruit, ordonne à ses vizirs de compter tous les livres de sa bibliothèque personnelle. Le calife exige la réponse le soir même car il désire impressionner son invité : le calife prétentieux d'une ville voisine.
Les vizirs, affolés devant la tâche à accomplir, vont demander conseil à un savant de la maison de la sagesse qui leur donne les informations suivantes : « le quart des livres sont des ouvrages d'astronomie, les deux tiers sont des livres de mathématiques et les cent autres livres restants sont des ouvrages de philosophie ».

Les vizirs peuvent-ils, sans les compter un par un, trouver le nombre de livres de la bibliothèque d'Al Ma'mun ?

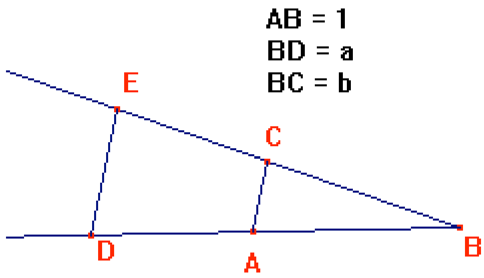
Les quatre opérations à la règle et au compas

<u>Première partie : multiplier avec la règle</u>

Voici ce qu'écrivait René Descartes, philosophe, mathématicien et physicien français (1596 – 1650) en 1637 dans son livre La Géométrie :

« Soit, par exemple, AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA et BE est le produit de cette multiplication. »
(figure 1 ci-dessous)

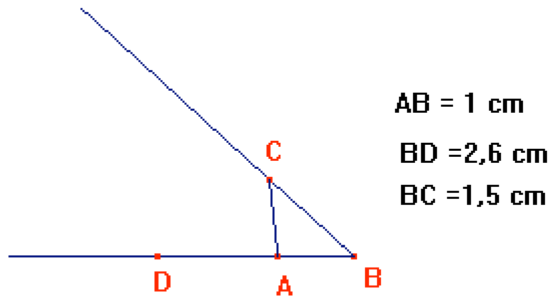
(d'après TRANSMATH 4 Editions Nathan)



1. On sait que AB = 1, BD = a, BC = b et que (AC) est parallèle à (ED).

Justifier que BE est égal au produit a×b.

2. Compléter la figure 2 ci-dessous en construisant le point E tel que : BE = 2,6 × 1,5



Deuxième partie : les quatre opérations :

Dans le même livre, on trouve :

Pour la division, « ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division. » (notations de la figure 1).

On donne un segment de longueur 1, un segment de longueur a et un segment de longueur b (a>b).

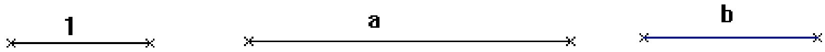
Construire à la règle et au compas :

1. Un segment de longueur a + b

2. Un segment de longueur a - b

3. Un segment de longueur ab

4. En s'inspirant de la question précédente, un segment de longueur $\frac{a}{b}$



1°) construire un segment de longueur a + b

2°) construire un segment de longueur a - b

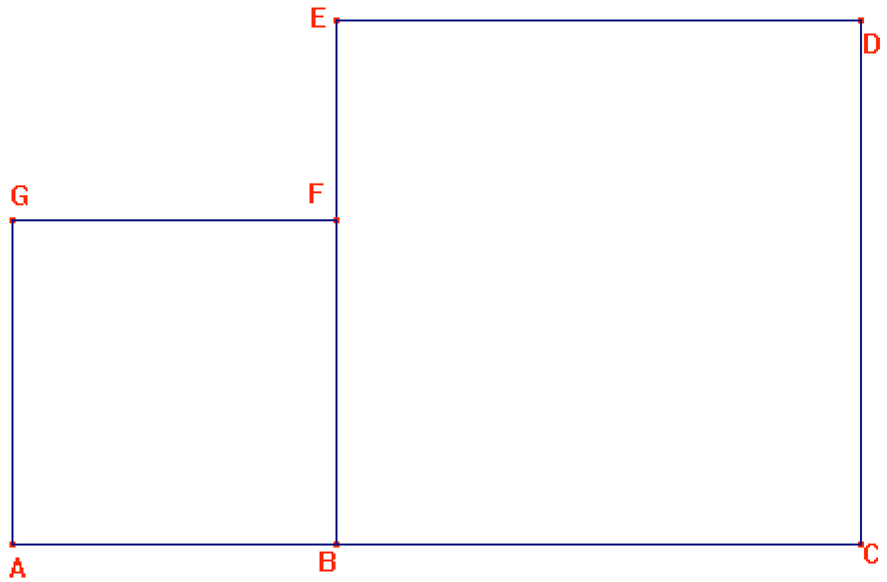
3°) construire un segment de longueur a b

4°) en s'inspirant de la question précédente, construire un segment de longueur a:b

Théorème de Pythagore et translations

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore par les aires.
En Inde, ARYABHATA(6e siècle) ou BRAHMAGUPTA (7e siècle) auraient procédé selon la méthode qui suit :

Soit deux carrés ABFG et BCDE tels que B soit un point du segment [AC] et F un point du segment [EB].
On trace le segment [FC], puis le segment perpendiculaire à [FC] passant par F qui coupe [AB] en M et [ED] en N.



1. Construire :
    a) L'image ① du triangle FMC par la translation qui transforme M en N
    b) L'image ② du triangle FNE par la translation qui transforme Fen C
    c) L'image ③ du trapèze AMFG par la translation qui transforme G en D.

2. On numérote le quadrilatère FNDC numéro ④. Quelle figure semble former les polygones ①, ②, ③ et ④ ?

3. Quelques justifications :

a) Pourquoi les angles $\widehat{FMC}$ et $\widehat{MCF}$ sont-ils complémentaires ?
b) Démontrer que : $\widehat{FMC} = \widehat{MFG} = \widehat{ENF}$.
c) Coder sur la figure tous les angles égaux à $\widehat{FMC}$, tous les angles égaux à $\widehat{MCF}$, tous les angles supplémentaires de $\widehat{FMC}$.

4. **(Niveau troisième)**
Soit a la longueur du côté du carré ABFG et b celle du côté du carré BCDE.
Démontrer que : $MB = \frac{a^2}{b}$ et $EN = a - \frac{a^2}{b}$ (on pourra utiliser les triangles rectangles FBC, MBF et NEF et exprimer de différents façons la tangente du même angle).
En déduire que AM = EN.

Sachant qu'une translation conserve les longueurs, les aires, on pourra en déduire que les quatre polygones ①, ②, ③ et ④ se complètent parfaitement (sans « trous », ni « chevauchements ») pour former un carré de côté FC.

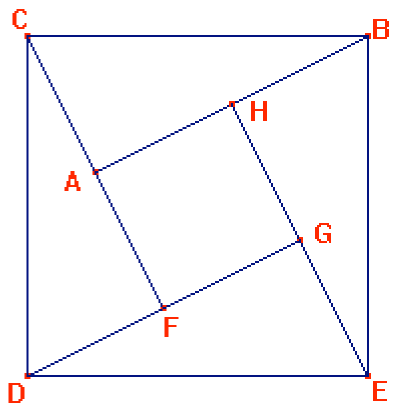
Le puzzle ainsi obtenu montre que la somme des aires des deux carrés de départ est égale à l'aire du carré de côté FC, soit :

FB_ + BC_ = FC_

Une démonstration du théorème de Pythagore

Le problème suivant, donné en devoir-maison, a pour objet de démontrer le théorème de Pythagore. Cette preuve apparaît dans le plus ancien livre de textes mathématiques chinois, le « Chou Pei Suan Ching » dont l'essentiel du contenu semble dater de l'époque de Confusius (VIe sicle avant JC).

Dans la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en A.
On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et on suppose $c > b$.
Les quatre triangles ABC, FCD, GDE et HEB sont superposables.



1) Justifier que le quadrilatère BCDE est un carré. En déduire son aire, notée $\mathcal{A}$.
2) Exprimer AH en fonction de b et c.
3) Justifier que AFGH est un carré. En déduire son aire, notée $\mathcal{A}'$.
4) Exprimer, en fonction de b et c, l'aire $\mathcal{A}''$ du triangle ABC.
5) A l'aide des questions 3) et 4), exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$, puis en fonction de b et c.
6) En déduire une relation entre a, b et c.

Niveau 3ème

Triplets pythagoriciens

On appelle triplet pythagoricien, un triplet de nombres entiers (x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 = z^2$.

D'après la réciproque du théorème de ***Pythagore***, le triangle dont les côtés ont pour mesures x, y, z est un triangle rectangle d'hypoténuse z.

L'un des plus connus parmi ces triplets pythagoriciens est (3, 4, 5) ou (4, 3, 5). On s'en servait déjà depuis longtemps pour tracer une perpendiculaire à une droite.

- Vérifier que (6, 8, 10), (15, 20, 25) sont aussi des triplets pythagoriciens.
- Démontrer que :
  Si (x, y, z) est un triplet pythagoricien, alors (kx, ky, kz) en est un aussi, k étant un entier.

Remarque :
Les triangles rectangles ainsi obtenus sont des agrandissements ou réductions les uns des autres.

Comment trouver des triplets pythagoriciens ?

Diophante (3e siècle après J.C.) utilisa une méthode déjà connue d'Euclide :

- On prend 2 entiers m et n, avec m > n.
  Si on pose : $x = m^2 - n^2$
  $y = 2\,mn$
  $z = m^2 + n^2$
  alors (x, y, z) est un triplet pythagoricien.

Vérifier cette propriété en prenant pour m et n des valeurs particulières, puis la démontrer de façon générale.

Remarque :
On obtient ainsi une infinité de triplets pythagoriciens, mais pas tous !

- Voici un problème posé et résolu par ***Diophante*** :

  Trouver 4 triangles rectangles différents ayant des hypoténuses égales.

  On prend 2 triplets pythagoriciens non "proportionnels", par exemple (3, 4, 5) et (8, 15, 17).
  On multiplie chacun par l'hypoténuse de l'autre : (51, 68, 85) et (40, 75, 85).

  En utilisant les identités suivantes que l'on vérifiera :
  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$
  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$
  on écrit : $5 \times 17 = 9^2 + 2^2$ et $5 \times 17 = 7^2 + 6^2$.

  On cherche alors 2 autres triplets pythagoriciens comme Diophante, en prenant :
  m = 9 et n = 2, d'où le triplet (77, 36, 85)
  m = 7 et n = 6, d'où le triplet (13, 84, 85).

  On obtient donc ainsi 4 triangles rectangles ayant pour hypoténuse 85.

  Refaire la même chose en prenant 2 autres triplets pythagoriciens non proportionnels.

Autres manières de trouver des triplets pythagoriciens :

-
$$\underset{\textit{petit côté}}{\text{Nombre impair}} \xrightarrow{\text{carré}} \quad \xrightarrow{-1} \quad \xrightarrow{:2} \underset{\textit{grand côté}}{} \quad \xrightarrow{+1} \underset{\textit{hypoténuse}}{}$$

Vérifier cet "algorithme" en faisant des essais avec 2 ou 3 nombres impairs.

Essayer de le démontrer, en prenant (2n + 1) comme nombre de départ (n étant un entier positif).

-
$$\underset{\textit{un côté}}{\text{Nombre pair}} \xrightarrow{:2} \quad \xrightarrow{\text{carré}} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{+1} \underset{\textit{hypoténuse}}{} \\ \xrightarrow{-1} \underset{\textit{autre côté}}{} \end{array}$$

Vérifier avec 2 ou 3 nombres pairs.

Essayer de le démontrer de façon générale en prenant (2n) comme nombre de départ (n entier supérieur à 1).

- La somme et le produit de 2 nombres entiers pairs (ou impairs) consécutifs sont les deux premiers termes d'un triplet pythagoricien, c'est-à-dire les mesures des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. Reste à calculer l'hypoténuse.

Faire quelques essais.
De façon générale, pour n entier positif, les nombres pairs consécutifs peuvent s'écrire (2n) et (2n + 2). On peut montrer alors que l'hypoténuse est 2 [n_ + (n + 1)_].

APPROXIMATION DE PI
PAR LA METHODE D'ARCHIMEDE (1ère partie)

Le but de ce devoir est de déterminer différents encadrements de π par la méthode d'Archimède

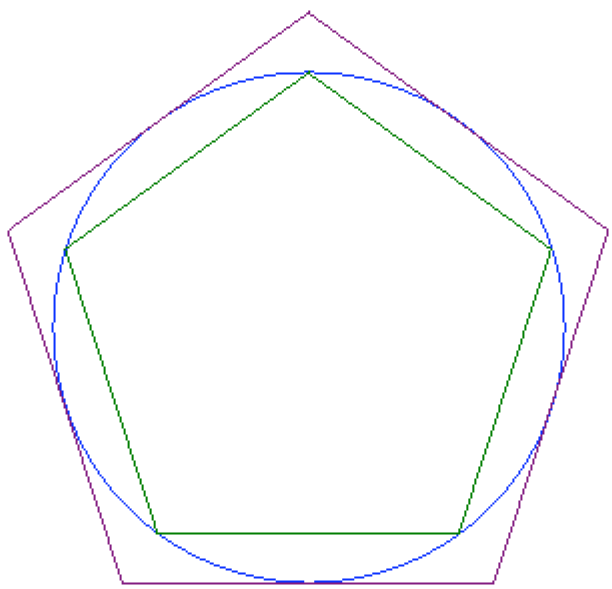
NB : Les questions à traiter sont écrites en italique

Point de vue historique : Archimède, 250 avant JC, après avoir tracé un cercle de rayon 1, calcula les périmètres des polygones inscrits et exinscrits à 6 , 12, 24 puis 96 côtés et donna des encadrements de π tel que $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$; $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$; $3{,}14108<\pi<3{,}14129$.

Explication de la méthode : Il s'agit de calculer le périmètre des polygones inscrits (polygones tangents au cercle et situés à l'intérieur du cercle) et exinscrits (polygones tangents au cercle et situés à l'extérieur du cercle) ayant 6 côtés, 12 côtés, 24 côtés et enfin 96 côtés. Ainsi, le cercle de rayon 1 étant « coincé » entre les deux polygones, on obtient l'encadrement :
(On note P_I le périmètre du polygone inscrit, P_E le périmètre du polygone exinscrit et P_C le périmètre du cercle de rayon 1)

$$\boxed{P_I < P_C < P_E}$$

Exemple :
Figure explicative dans le cas où le cercle est coincé entre deux polygones inscrits et exinscrits à 5 côtés (pour comprendre ce que signifie polygone inscrit et exinscrit) :



Questions :

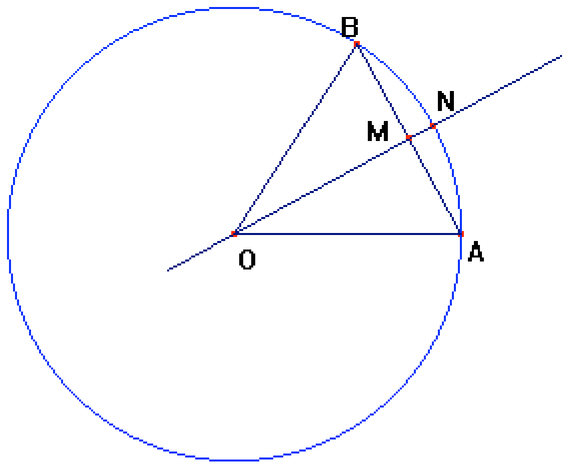
1. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 1, calculer le périmètre, noté P_C de ce cercle.
2. On note P_I le périmètre du polygone inscrit et P_E le périmètre du polygone exinscrit. Déduire de la question précédente que $\frac{P_I}{2} < \pi < \frac{P_E}{2}$.

Calcul des premières approximations de π :

Exemple résolu : 1er cas : cas du polygone à 6 côtés (hexagone)

Question :

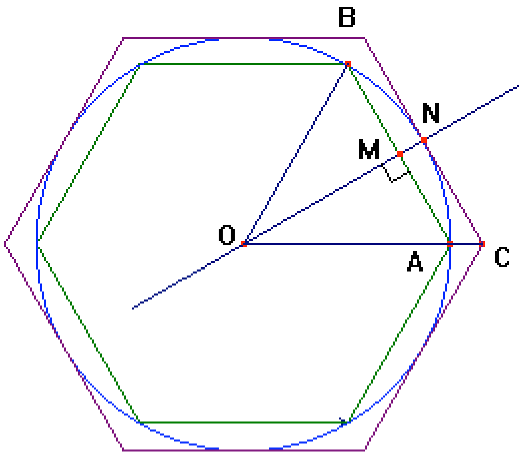
1. Sur le cercle ci-dessous, tracer un hexagone inscrit ayant pour côté [AB] et l'hexagone exinscrit correspondant. (On note [CD] le côté du polygone exinscrit parallèle au côté [AB] et passant par N).



2. a. Déterminer la mesure de l'angle AOB.
b. Soit M le milieu de [AB] Déterminer la mesure de l'angle AOM. Justifier.
c. En déduire la longueur AM et la longueur d'un côté du polygone inscrit (c'est-à-dire AB)
d. Soit N le milieu de [CD]. Quelle est la mesure de l'angle AON. Justifier.
En déduire NC et la longueur d'un côté du polygone exinscrit (c'est-à-dire CD).

3. Etablir alors un encadrement de π.

Résolution dans le cas du polygone à 6 côtés :



Résolution :

1\. a. AOB $= \dfrac{360^\circ}{6} = 60°$ car le polygone a 6 côtés donc chaque angle au centre mesure $\dfrac{360^\circ}{6}$.

b. Le triangle AOB est isocèle en O donc la droite (OM) qui est la médiane issue de O dans AOB est aussi bissectrice de l'angle AOB par suite AOM $= \dfrac{AOB}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$ soit AOM = 30°

c. Comme AOB est isocèle en O on en déduit aussi que (OM) est la médiatrice de [AB] donc le triangle AOM est rectangle en M .
De plus, OA = 1 donc dans le triangle AOM rectangle en M, on a :

$$\sin AOM = \frac{AM}{OA} \text{ soit } \sin 30° = \frac{AM}{1} \text{ soit } \underline{AM = \sin 30°}$$

Par suite comme M est le milieu de [AB], AB = 2 AM = 2 sin 30°

d. Par construction des tangentes, on en déduit que (ON) est perpendiculaire à (CD) donc le triangle ONC est rectangle en N.
De plus AON = 30° = NOC et ON = 1 donc dans le triangle ONC rectangle en N, on a :

$$\tan NOC = \frac{NC}{ON} \text{ soit } \tan 30° = \frac{NC}{1} \text{ soit } \underline{NC = \tan 30°}$$

Par suite comme N est le milieu de [CD], CD = 2 NC = 2 tan 30°

3\. D'après les calculs ci-dessus, PI = 6 AB car le polygone a 6 côtés de même longueur, donc P_I= 6 _2 sin 30° et de même, PE = 6 _ 2 tan 30°
Par suite, d'après l'encadrement obtenu au paragraphe II, on a :

$$\frac{6\square 2\sin 30°}{2} < \pi < \frac{6\square 2\tan 30°}{2}$$

$$\boxed{6 \sin 30° < \pi < 6 \tan 30°}$$

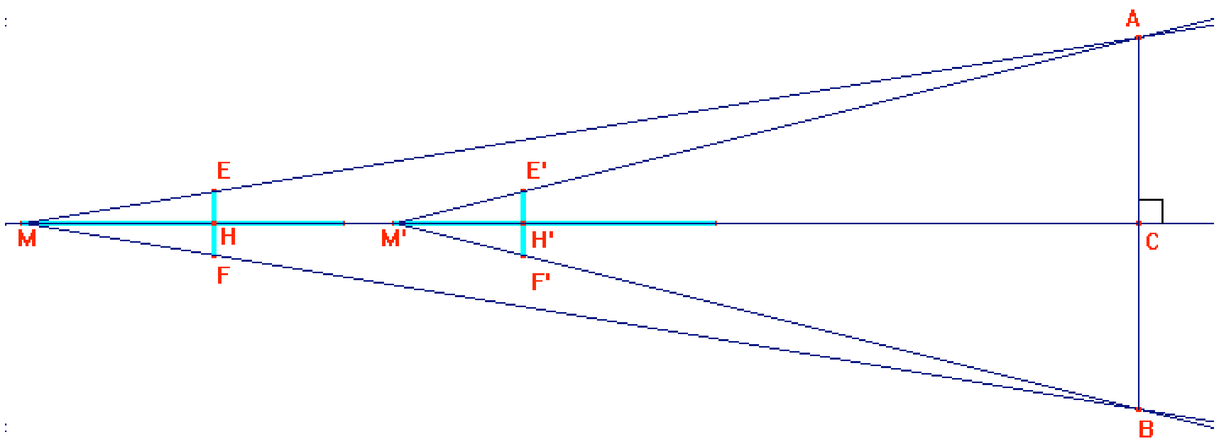
Autres cas : polygones à 12 côtés, 24 côtés, 48 côtés et 96 côtés

Questions :

Avec une démarche analogue à celle adoptée pour les polygones à 6 côtés, calculer la longueur d'un côté du polygone inscrit et celle d'un côté du polygone exinscrit et en déduire un nouvel encadrement de π dans chacun des cas des polygones à 12 côtés, 24 côtés, 48 côtés et 96 côtés. Il est inutile de faire une figure dans ces cas là car elle serait trop compliquée à faire si vous le souhaitez vous pouvez cependant faire une figure à main levée au brouillon.

Une utilisation astucieuse du bâton de Jacob…

Comme on peut l'observer sur les gravures, pour certaines mesures, deux instruments sont utilisés l'un dans l'alignement de l'autre et chacun ayant une position de traverse particulière, nous allons étudier cette situation à l'aide du dessin ci-dessous :



Sachant que chaque bâton est gradué en cinq parties égales d'un pied chacune et que la traverse qui coulisse mesure un pied :

- Démontrer que $\frac{M'H'}{M'C} = \frac{MH}{MC}$ et en déduire la valeur de $\frac{MC}{M'C}$.
- Montrer que $\frac{MM'}{M'C} = \frac{MH}{M'H'} - 1$ en utilisant le résultat précédent et en exprimant MM'en fonction de MC et M'C.
- Quel nombre de graduations faut-il choisir sur chaque bâton pour MH d'une part et M'H' d'autre part si l'on veut obtenir $\frac{MM'}{M'C} = \frac{1}{2}$, exprimer alors M'C en fonction de MM'.
- Sachant que EF et E'F' correspondent à une graduation, exprimer $\frac{M'H'}{M'C}$ en fonction de E'F' et de AB et démontrer qu'alors AB=MM'

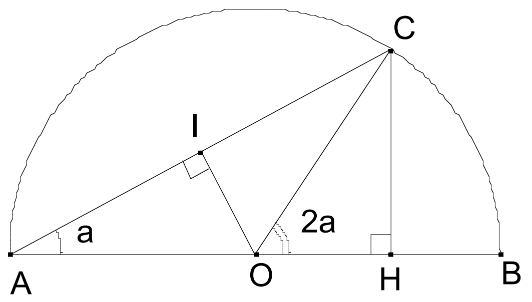
TRIGONOMÉTRIE.

Le mathématicien grec ***Hipparque de Nicée*** *au 2e siècle avant J.- C. a travaillé sur des tables de sinus et cosinus d'angles. Voici comment :*

A On considère un demi-cercle de diamètre [AB]. On appelle O son centre.
On prend un point C de ce demi-cercle. On trace [AC],[OC] et [BC].

Montrer que : **BOC = 2 BAC** .

B



Sur la figure codée ci-contre, le demi-cercle est de rayon 1, et C est plus près de B que de A (donc a < 45°).

En travaillant dans des triangles rectangles que l'on nommera, indiquer à quoi est égal :

- cos 2a
- cos a (de 2 façons différentes).

Pourquoi a-t-on : AC = 2 AI ?

En déduire alors que : $\boxed{\mathbf{\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}}}$

On admettra que cette formule est encore vraie si a > 45°.

C a) Dans quel genre de triangle trouve-t-on des angles de 60° ?
Calculer alors les valeurs exactes de cos 60° et de sin 60°.

b) Dans quel genre de triangle trouve-t-on des angles de 45° ?
Calculer alors les valeurs exactes de cos 45° et de sin 45°.

D Connaissant les valeurs exactes de cos 60° et cos 45°, en déduire comme Hipparque celles des cosinus des angles de 30°, 15°, ... et de 22,5°, ...

Regarder les valeurs approchées données par une calculatrice.

On peut aussi, à partir des cosinus, calculer les sinus de ces angles grâce à la relation :

$\boxed{\mathbf{\sin^2 a + \cos^2 a = 1.}}$

D'après « Histoire des mathématiques pour le collège », CEDIC

CALCULS DE L'AIRE D'UN TRIANGLE

A Méthode graphique :

1. Tracer avec soin et de la façon la plus précise possible un triangle ABC tel que :
   AB = 7 cm ; BC = 14,7 cm et AC = 11,9 cm.

2. À partir de ce dessin, après avoir fait les constructions et mesures nécessaires, calculer une valeur de l'aire de ABC. Est-ce la valeur exacte de l'aire de ABC ?

B *Au 1er siècle, le mathématicien grec* ***Héron d'Alexandrie*** *trouva une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle connaissant les mesures de ses côtés :*

Si l'on note p le demi-périmètre du triangle ABC et si l'on pose BC = a, AC = b et AB = c, cette formule s'écrit :

$$\textbf{Aire ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1. Utiliser cette formule pour calculer l'aire de ABC.

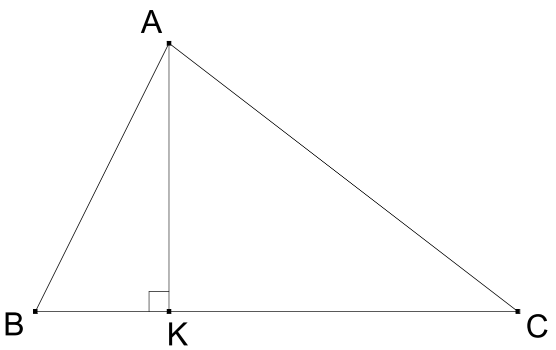
2. Comparer avec le résultat trouvé en A .

C Autre manière :
Héron d'Alexandrie (toujours lui) savait que l'aire d'un triangle se calcule :

$$\mathbf{\frac{1}{2} \times (\text{longueur d'une base}) \times (\text{hauteur correspondante})}$$

Le problème était alors de calculer cette hauteur. Il envisageait deux cas selon que le pied de la hauteur était ou non élément du "segment de base".
Pour simplifier, comme dans un triangle il ne peut y avoir qu'au plus un angle obtus, on fera en sorte que les angles "à la base" soient aigus et on calculera la mesure de la hauteur relative à cette base.

On prend par exemple un triangle ABC tel que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ soient aigus.
Le point K, pied de la hauteur issue de A, est alors élément de [BC], et donc BC = BK + KC.



Héron a utilisé pour calculer AK un théorème des ***Éléments d'Euclide*** (300 ans avant J.C.) qui permet d'écrire que :

$$\mathbf{AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times BK \times BC}.$$

1. Démontrer cette relation

2. Appliquer cette relation au triangle ABC du A pour calculer BK.

3. Calculer alors AK. En déduire l'aire du triangle ABC.

   Retrouve-t-on le résultat du B ?

ACTIVITÉS DE DÉMONSTRATION

❖ ***Proposition 3 du livre VI des Éléments d'Euclide :***

La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle quelconque, partage le côté opposé dans le même rapport que les côtés de l'angle.

<u>Par exemple</u> :
Soit un triangle ABC.

On trace la bissectrice de l'angle BAC .
Elle coupe [BC] en I.
Quelle égalité veut-on démontrer ?

<u>Aide à la démonstration :</u>
On trace la parallèle à (AC) passant par B.
Elle coupe (AI) en E.
Que penser du triangle ABE ?
A-t-on une configuration connue ?
Finir la démonstration.

❖ ***Théorème de Pappus (4ème siècle) :***

Soit ABC un triangle quelconque.
À l'extérieur du triangle ABC, on construit les parallélogrammes ACIH et ABFG.
Les droites (IH) et (FG) se coupent en L.
La droite (LA) coupe (BC) en J.
Sur la demi-droite [AJ), au-delà du côté [BC], on place le point K tel que JK = LA.
On construit le parallélogramme BCDE ayant pour côtés en direction et en grandeur [BC] et [JK].
Démontrer que :

Aire BCDE = aire ACIH + aire ABFG.

<u>Aide à la démonstration :</u>
(BE) coupe (GF) en E', et (DC) coupe (IH) en D'.
Pourquoi a-t-on : aire ABFG = aire ABE'L et aire ACIH = aire ACD'L ?
Finir la démonstration.

<u>Remarque :</u>
Ce théorème est une généralisation d'une démonstration du théorème de Pythagore.

Du rectangle au carré…

Cette construction est due à un savant français Samuel Marolois (1572-1627) ,il vécut aux Pays-Bas et écrivit des œuvres mathématiques en géométrie et un ouvrage sur les fortifications.

ABCD est un rectangle tel que $AB = a$ et $AD = b$, avec $a \geq b$.
Soit M le point de la demi-droite [DC), à l'extérieur du segment [DC], tel que $CM = CB$.
Le cercle de diamètre [DM] et de centre O coupe la demi-droite [CB) en N.
F est le point de [DC] tel que $CF = NC$, construire le point E tel que CNEF soit un carré.

Quelle conjecture peut-on faire sur les aires de ABCD et de CNEF ?

Démontrons la, pour cela :

- Exprimer en fonction de a et de b, les distances DM , OM, ON et OC.
- Dans le triangle ONC, exprimer CN_ en fonction de a et de b.
- Développer et réduire $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2$ et conclure.

On peut faire conjecturer les élèves à l'aide du logiciel « Cabri »…
La construction en elle-même est intéressante ainsi que la réflexion concernant les valeurs approchées (en général) des deux aires affichées à l'écran .

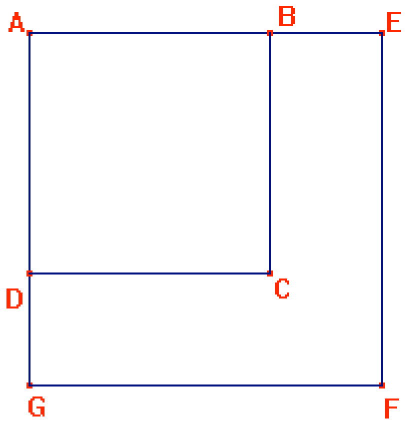
D

Prolongements…

L'égalité $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ est vraie quels que soient les nombres a et b, nous allons l'utiliser :

1°- En écrivant le nombre 15 sous la forme du produit de 5 par 3, trouver deux nombres entiers x et y tels que $x^2 - y^2 = 15$

2°-



La mesure des côtés du carré ABCD est x, et celle des côtés du carré AEFG est y.
Sachant que la différence des aires de ces carrés est 231, trouver x et y.
Il y a 4 réponses possibles.