Commentaires sur l’activité « Kaprekar »

Suite aux tests avec des élèves de 6e des fiches d'activités réalisées par des enseignants du groupe autour des nombres de Kaprekar, la discussion a été assez nourrie autour de ces premiers essais, plutôt bien reçus par les élèves, ce qui est déjà une bonne chose ! Voici les principaux points abordés :

-- il existe apparemment deux versions de Kaprekar, celle où on complète les nombres qui n'ont pas autant de chiffres qu'au départ avec des zéros et l'autre ("Kaprekar court") où on ne le fait pas. Par exemple avec deux chiffres, on peut parfois tomber sur 9 en appliquant l'algorithme, il faut alors décider si la soustraction suivante est "9 - 9 = 0" ou "90 - 09 = 81". La première version a l'avantage de terminer plus vite (en arrivant sur 0 qui est un point fixe de l'algorithme) tandis que la seconde fait apparaître un cycle invariant (09 - 81 - 63 - 27 - 45 - 09...), résultat plus complexe. Cependant la consigne pour décrire la première version semble moins facile à exprimer sans ambiguïté, à moins de traiter à part le cas où le résultat est un nombre à 1 chiffre, ce qui pourrait rendre le problème moins attractif et moins naturel. À réfléchir en fonction de l'objectif de l'activité.

-- à l'étape 2 (créer deux nombres avec les x chiffres choisis, l'un le plus grand possible, l'autre le plus petit possible), la consigne n'est pas si claire pour les élèves, du moins dans la version : « avec ces 4 chiffres, - écrire le plus grand nombre entier possible - écrire le plus petit nombre entier possible », certains élèves prennent le plus grand des 4 chiffres et le répètent 3 ou 4 fois, puis idem avec le plus petit. À voir si la formulation légèrement plus précise « à l'aide de ces 4 chiffres, écrire le plus grand nombre entier possible - à l'aide de ces 4 chiffres, écrire le plus petit nombre entier possible » permettra d'éviter cette erreur. La formulation plus détaillée « en rangeant les chiffres du plus petit au plus grand - en rangeant les chiffres du plus grand au plus petit » a permis de l'éviter.

-- toujours à cette étape, on se rend compte en observant les productions des élèves que, même avec une calculatrice, les erreurs sont possibles, notamment pour la mise en ordre des 4 chiffres ; certains tombent assez vite sur le point fixe 6174 mais rangent mal les chiffres à l'étape suivante et ne se rendent donc pas compte qu'il est fixe... Il serait peut-être opportun de faire travailler les élèves à deux, par exemple l'un qui utilise la calculatrice, l'autre qui pose l'opération (puis ils échangent) afin qu'ils puissent repérer et corriger leurs erreurs éventuelles.

-- on s'est demandés à quel moment dans la séance il était opportun de parler de conjecture. En 6e c'est bien sûr une notion nouvelle, dont cette activité peut contribuer à donner une idée. Si tel est l'objectif (faire sentir ce qu'est une conjecture et quand on la formule), on peut penser que le mieux serait que le mot n'apparaisse pas dans la fiche élève (du moins pas avant à la fin) et qu'on ne la formule qu'une fois que les résultats de tous les élèves (ou de tous les binômes) auront été mis en commun. Par exemple avec 3 chiffres, si un élève trouve 495 à son premier essai, cela n'a rien de remarquable (hormis le fait qu'il prouve que c'est un point fixe en constatant que 954-459=495 !) ; s'il retrouve le même résultat sur un deuxième exemple, cela paraît un peu léger pour faire une « conjecture », ce serait plutôt l'occasion de poser une question du genre : « trouve-t-on toujours 495 ? » ; une fois que les résultats de tous les élèves sont mis en commun, on est plus enclins à faire une conjecture, qui pourra être « on trouve toujours 495 » si tous les résultats l'indiquent (il s'agit alors d'une conjecture fausse) ou « on trouve presque toujours 495 », conjecture un peu imprécise malheureusement (mais juste) si dans certains calculs un autre résultat est apparu. C'est peut-être à ce moment qu'on peut introduire le mot "conjecture", après en avoir trouvé un exemple avec les élèves (une propriété mathématique dont on n'est pas sûr mais qui est souvent vérifié, ou plus généralement dont on a de bonnes raisons de penser qu'il pourrait être vrai).

-- un point intéressant dans l'activité est qu'elle fait apparaître à la fois une conjecture et une propriété (immédiatement prouvée) : 495 est fixe. La preuve est tellement immédiate (et incluse dans l'algorithme) qu'on pourrait oublier que c'en est une... ce qui peut mener à une question du genre « qu'est-ce qu'une preuve, comment peut-on être sûr que quelque chose est vrai en mathématiques ? ».

-- dans le registre des preuves, on peut dès la 6e prouver qu'avec deux chiffres il y a un cycle (dans la version « longue ») formé par les multiples de 9, juste en vérifiant que l'algorithme renvoie successivement les valeurs 09 - 81 - 63 - 27 - 45 - 09 et ainsi de suite ; en 4e on peut commencer par prouver que le résultat d'une étape est un multiple de 9, grâce au calcul littéral :

$$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$$

puis en déduire un résultat complet grâce au raisonnement précédent. Avec 3 chiffres on peut toujours prouver que 495 est fixe, on doit pouvoir faire plus en 4e mais cela reste à préciser. Enfin il pourrait être intéressant de proposer cette même activité à la fois en 6e et en 4e, ainsi les élèves de 4e y verraient une application efficace et utile du calcul littéral.

-- on peut parler aussi de preuve par ordinateur, en écrivant et en lançant un programme exhaustif sur tous les nombres à 2 ou 3 chiffres (mais avec la difficulté technique de séparer et ranger les chiffres d'un résultat, peut-être accessible avec deux chiffres en prenant la partie entière de la division par 10 ?), voire de fournir un programme pour les enseignants qui souhaitent vérifier ou trouver une erreur dans la production d'un élève.

-- au vu de ce premier exemple testé en classe (encore merci aux testeurs !), on a tenté de dégager certaines des notions qu'on voudrait faire travailler aux élèves à travers ce genre d'activités, autour du raisonnement et de la recherche mathématique :

- notions de question / conjecture / propriété / preuve / exemple / contre-exemple ...
- prise d'initiative (commencer par choisir un nombre à trois chiffres...)
- rédaction, explication
- capacité à travailler sur un problème ouvert (comme ici, on ne sait pas où on va) / sur un objectif donné (montrer que telle ou telle propriété est vraie)

- capacité à tirer des informations intéressantes de l'activité en cours (en lien avec la prise d'initiative ?)

Cette liste n'est sûrement pas complète ni très précise pour l'instant, à voir comment on peut l'améliorer, peut-être à l'aide d'autres exemples d'activités ? Parmi les compétences à développer, travailler, évaluer, fixer comme objectif, on peut ajouter la capacité à organiser le raisonnement, les idées, qui doit permettre :

- l’accès au raisonnement scientifique : faire une hypothèse et en tirer des conclusions (tout en conservant le statut d’« hypothèse » aux prémices), par exemple pour prouver une équivalence par double implication
- l’accès à des raisonnements sophistiqués, par exemple prouver qu’une assertion est équivalente à une autre qui contient une implication (caractérisation de l’ordre d’un élément dans un groupe comme plus petit entier au sens de la divisibilité)

l’accès à un raisonnement « modulaire », analogue à celui qui est utilisé pour structurer un algorithme ou un programme, une recette de cuisine, un planning, … : séparer les tâches qui peuvent être traitées ou utilisées de façon indépendante les unes des autres (programmation par blocs, sous-programmes), les organiser en fonction des dépendances qui subsistent, pouvoir passer à une tâche même si la précédente n’est pas réussie…

À voir aussi, une fois les compétences visées bien établies, quelles activités permettent de les introduire, de les entraîner, voire de les évaluer… Un objectif futur du groupe pourrait être de créer des fiches d'activités centrées sur ces notions (quitte à proposer des liens vers d'autres points intéressants, historiques par exemple), à charge pour les utilisateurs de les enrichir comme ils le souhaitent vers ces autres points.