Activité n° 2 : persistance multiplicative

0) On prend le nombre 4861.

- On identifie ses chiffres : 4, 8, 6 et 1. On fait le produit des chiffres :

  4 x 8 x 6 x 1 = 192.

- On recommence avec 192 : les chiffres sont 1, 9 et 2, leur produit vaut

  1 x 9 x 2 = 18.

- On recommence : les chiffres de 18 sont 1 et 8, leur produit est 1 x 8 = 8.
- On s'arrête quand on arrive à un nombre à un chiffre. Ici cela s'est produit après 3 étapes.

On écrit le résultat ainsi :

4861 – 192 – 18 – 8 (3 étapes)

1) Choisir un nombre entier et lui appliquer la procédure :

- effectuer le produit de ses chiffres
- recommencer avec le résultat
- et ainsi de suite…

… En combien d'étapes arrive-t-on à un nombre à 1 chiffre ?

2) Appliquer la procédure aux nombres suivants en comptant à chaque fois le nombre d'étapes pour arriver à un nombre à 1 chiffre :

a) 331

b) 679

c) 6 788

d) 7 777 777 788

3) Avec quels nombres arrive-t-on au chiffre 3 en une étape ?

4) Quelle(s) remarque(s) peut-on dégager de ces calculs ? Classez-les dans le tableau suivant :

Ce qui est vrai, j'en suis sûr(e) !	
Ce qui est peut-être vrai, j'y crois !	
Je ne me prononce pas…	

Pour bien remplir le tableau :

- si j'en suis sûr(e), c'est que je suis capable de le prouver
- si c'est peut-être vrai, et que j'ai de bonnes raisons d'y croire, ça s'appelle une conjecture
- parfois je ne sais pas si c'est vrai ou faux, je me pose la question…

5) Pour aller plus loin :

a) Quels nombres arrivent sur le chiffre 1 en fin de procédure ?

b) Prouver que tous les nombres obtenus après la première étape de la procédure sont des entiers « 10-friables », c'est-à-dire que leurs facteurs premiers sont tous inférieurs à 10.

****

Version prof

L'activité peut se faire en deux fois : une première (demi)-séance pour se familiariser avec la procédure, mutualiser les résultats obtenus par les élèves sur les exemples qu'ils ont choisi, commencer à faire émerger des règles… ; la deuxième séance peut alors être consacrée à classer ces règles (et les nouvelles qui auront émergé entre-temps) dans le tableau, réfléchir à ce qu'est une preuve… On peut laisser la question sur les nombres qui tombent sur 3 en une étape en exercice à la maison entre les deux séances.

La persistance d'un nombre est le nombre d'étapes qu'on effectue quand on lui applique la procédure, jusqu'à ce qu'elle s'arrête.

La persistance d'un nombre est finie car le nombre obtenu diminue strictement à chaque étape (une des conjectures à faire découvrir aux élèves, qu'on peut prouver au moins sur les nombres à trois chiffres) donc on arrive à un nombre à un chiffre au bout d'un moment.

On conjecture que la persistance est bornée et toujours inférieure ou égale à 11.

Règles à faire découvrir aux élèves :

Les 1 ne comptent pas : la persistance de 1143 est la même que celle de 43 (1 est élément neutre pour la multiplication)

L'ordre des chiffres n'a pas d'importance (1143 et 3411 ont la même persistance – et les mêmes étapes de calcul) (commutativité de la multiplication)

Quand il y a un 0 c'est fini (élément absorbant…) ; quand il y 5 et un chiffre pair, on est proche de la fin.

Les « règles » fausses qu'on peut s'attendre à voir apparaître :

La persistance croît avec la taille du nombre.

Le nombre de chiffres diminue strictement à chaque étape (il diminue seulement au sens large) – contre-exemple 768 - 336 – 54 – 20 – 0

****

Encore plus loin

On conjecture que la liste des entiers 10-friables qui n'ont aucun de leur chiffre égal à 0 est finie (et qu'elle compte environ 12 000 nombres) ; que celle des entiers 10-friables qui n'ont ni 0 parmi leurs chiffres, ni couple composé d'un 5 et d'un entier pair, compte environ 3 000 nombres. Cette conjecture entraîne que la persistance maximale est 11 pour les nombres entiers et, plus précisément, elle permet de déterminer la persistance maximale en fonction du nombre sur lequel la procédure termine.

Des recherches actuelles ont permis de prouver que la persistance est 1 quand la procédure termine sur 1, 3, 7 ou 9 ; elles permettent aussi de déterminer la persistance des entiers pour lesquels la procédure termine sur 5 (elle est au plus 5).