Contexte : déterminer l'aire d'un triangle de côtés (7 ; 8 ; 9) sans le calcul de la hauteur.

Héron d'Alexandrie dans les *Metrica* (proposition VIII, Livre 1) est amené à calculer la $\sqrt{720}$.

Pour trouver la racine carrée d'un nombre :

> Les 720 n'ont pas le côté exprimable [1], nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi.
>
> **[A]** *Puisque le carré le plus voisin de 720 est 729 et il a 27 comme côté,*
>
> **[B]** *divise les 720 par 27 : il en résulte 26 et deux tiers.*
>
> **[C]** *Ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers.*
>
> **[D]** *De ceux-ci [prends] la moitié : il en résulte 26 et un demi et un tiers.*
>
> **[E]** *Le côté approché de 720 sera donc 26 et un demi et un tiers.*
>
> En effet, 26 et un demi et un tiers par eux-mêmes ; il en résulte 720 et un trente-sixième ; de sorte que la différence est une trente-sixième part d'unité.
>
> Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que le trente-sixième, au lieu de 729, nous placerons les 720 et un trente-sixième maintenant trouvés et, en faisant les mêmes choses, nous trouverons la différence qui en résulte inférieure, de beaucoup, au trente-sixième.

Analyse :
[A] Prendre le carré parfait le plus proche de 720 : $729 = 27^2$;
[B] $720 : 27 = 26 + \frac{2}{3}$;
[C] $26 + \frac{2}{3} + 27 = 53 + \frac{2}{3}$;
[D] $\frac{1}{2}(53 + \frac{2}{3}) = 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$;
[E] $\sqrt{720} \approx 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
Synthèse :
$(26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \times (26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 720 + \frac{1}{36}$
Itération pour une meilleure approximation :
On recommence en prenant $(26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ à la place de 27 [car $720 + \frac{1}{36}$ est plus proche de 720 que 729.]

Plus généralement,
[A] Prendre le carré parfait le plus proche de A : $N = n^2$;
[B] $A : n$;
[C] $\frac{A}{n} + n$;
[D] $\frac{1}{2}(\frac{A}{n} + n)$;

1. C'est comme si on avait un carré d'aire A=720 et on cherche la longueur de son côté, c'est-à-dire $\sqrt{A}$, à savoir $\sqrt{720}$. Ici, le côté est synonyme de racine carrée.

[E] $\sqrt{A} \approx \frac{1}{2}(\frac{A}{n} + n)$

L'itération entraîne des calculs fractionnaires, vite compliqués.
Exemple du $\sqrt{2}$:
$\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$
$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$
$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$
$\sqrt{2} \approx \frac{665\ 857}{470\ 832}$

Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec du Iᵉʳ siècle après J.C. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages dont un, en 3 livres, de géométrie de la mesure intitulé *Metrica*. Voici un extrait de la proposition VIII du premier Livre.

> *Les 720 n'ont pas le côté exprimable, nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi :*
>
> *Puisque le carré le plus voisin de 720 est 729 et il a 27 comme côté, divise les 720 par 27 : il en résulte 26 et deux tiers.*
>
> *Ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers.*
>
> *De ceux-ci [prends] la moitié : il en résulte 26 et un demi et un tiers.*
>
> *Le côté approché de 720 sera donc 26 et un demi et un tiers.*
>
> *En effet, 26 et un demi et un tiers par eux-mêmes ; il en résulte 720 et un trente-sixième ; de sorte que la différence est une trente-sixième part d'unité.*
>
> *Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que le trente-sixième, au lieu de 729, nous placerons les 720 et un trente-sixième maintenant trouvés et, en faisant les mêmes choses, nous trouverons la différence qui en résulte inférieure, de beaucoup, au trente-sixième.*

1. D'après vous, que calcule Héron d'Alexandrie ?
2. Traduire en langage mathématique le texte ci-dessus. Combien de parties différentes repérez-vous ? Quels sont leur objectif ?
3. Appliquer le programme de calcul à 2 en essayant de vous rapprocher le plus possible du résultat de votre calculatrice, à savoir $\boxed{1,414213562}$.
4. Plus généralement, appliquer le programme de calcul à A, un nombre dont on cherche le côté et n le nombre dont le carré (n^2) est le plus proche de A.