À propos de Fibonacci: la suite, les nombres et des problèmes de mathématiques financières[1]

Marc Moyon, IREM de Limoges

Stage "histoire des mathématiques et algorithmique"

Nous reprenons ci-après l'extrait du *Liber abaci* [Livre de calcul] de Fibonacci (ou Léonard de Pise) (XIII^e siècle) qui donnera le nom de "suite de Fibonacci" à la suite[2] définie par la relation de récurrence d'ordre 2:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$
$$\text{avec } F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1$$

Les nombres obtenus définissent les "nombres de Fibonacci".

0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610; 987...

On peut généraliser la suite de Fibonacci en modifiant les premiers termes (par exemple, avec $F_0 = 2$ et $F_1 = 1$, on obtient les "nombres de Lucas"), les coefficients de la relation de récurrence ($F_{n+2} = \alpha F_{n+1} + \beta F_n$), ou bien en modifiant l'ordre de la relation de récurrence (par exemple, $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} + F_n$ est une suite dite de Tribonacci ou 3-bonacci).

[1] À partir de la traduction française réalisée par Marc Moyon, 2016, pp. 29–32.

[2] La première attribution claire de cette suite de nombres à Fibonacci est réalisée par Édouard Lucas: "Nous signalerons plus particulièrement dans ce travail, une question fort curieuse du LIBER ABBACI, qui renferme le premier exemple des séries récurrentes"; Lucas, 1877, p. 7.

Quelqu'un plaça une paire de lapins dans un endroit clos de tous côtés afin de savoir combien de descendants cette seule paire engendrerait en une année. Or, il est dans leur nature de mettre au monde une nouvelle paire chaque mois, et les lapins ont des descendants deux mois après leur naissance.

Combien de paires de lapins sont engendrées en une année par une seule paire ?

Comme la paire susmentionnée a des descendants le premier mois, tu la doubleras, et il y aura deux paires le premier mois. De celles-ci l'une, la première, aura des descendants le deuxième mois, de sorte qu'il y aura 3 paires le deuxième mois.

De celles-ci, deux seront rendues fécondes ce même mois, de sorte que 2 paires de lapins sont mises au monde le troisième mois et qu'il y aura ainsi 5 paires ce mois-là. De celles-ci, 3 seront rendues fécondes, et il y aura 8 paires le quatrième mois. De ces dernières, 5 engendreront cinq paires, qui, ajoutées aux 8 paires, donneront 13 paires pour le cinquième mois. De ces paires, 5, mises au monde durant le même mois, ne concevront pas au cours dudit mois, mais les 8 autres paires procréeront. Par suite, il y aura 21 paires le sixième mois. Y ajoutant les 13 paires se reproduisant au septième mois, il y aura durant celui-ci 34 paires. Y ajoutant les 21 paires se reproduisant au huitième mois, il y aura durant celui-ci 55 paires. Y ajoutant les 34 paires se reproduisant au neuvième mois, il y aura durant celui-ci 89 paires. Y ajoutant de même les 55 paires se reproduisant au dixième mois, il y aura durant celui-ci 144 paires. Y ajoutant de même les 89 paires se reproduisant au onzième mois, il y aura durant celui-ci 233 paires. Y ajoutant encore les 144 paires se reproduisant au dernier mois, il y aura 377 paires[3]. C'est le nombre de paires qu'engendra la paire susmentionnée placée dans ledit endroit au terme d'une année. Tu peux voir dans cette marge notre manière d'opérer. Nous avons ajouté le premier nombre au second, soit 1 à 2, le second au troisième, le troisième au quatrième, le quatrième au cinquième, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous additionnions le dixième au onzième, à savoir 144 à 233, et nous avons obtenu la somme desdits lapins, soit 377 [paires]. Tu pourrais poursuivre ainsi pour un nombre illimité de mois.

[3]

Paire
1
Premier
2
Second
3
Troisième
5
Quatrième
8
Cinquième
13
Sixième
21
Septième
34
Huitième
55
Neuvième
89
Dixième
144
Onzième
233
Douzième
377

Problèmes de voyage[4]: Commerce à Lucques, Florence et Pise.

Un homme partit commercer à Lucques, il y fit le double et y dépensa 12 deniers. Puis il quitta cette ville pour se rendre à Florence. Il y fit le double et y dépensa 12 deniers. Lorsqu'il revint à Pise, il y fit le double et y dépensa 12 deniers. Et il est proposé que rien ne lui resta. On demande combien il possédait au départ de son voyage.

Problèmes d'intérêt[5].

Quelqu'un place, dans une banque quelconque, 100 livres à un intérêt de 4 deniers par livres par mois[6]. Il reprend chaque année une pension de 30 livres. Et, on doit évaluer, au début de chaque année, ces 30 livres prises du capital et le bénéfice desdites 100 livres. On veut aussi [savoir] combien d'années, de mois, de jours et d'heures il aura [encore de l'argent] à la banque.

[4] À partir de la traduction française réalisée par Marc Moyon, 2016, pp. 54–56.

[5] Traduction française réalisée par Marc Moyon à partir de Fibonacci, 1857, pp. 267.

[6] L'intérêt est ici exprimé en "deniers par livre par mois". Un denier par livre par mois est équivalent à 12 deniers par livre par an (12 mois en une année), et puisque 12 deniers font un sous, c'est-à-dire un vingtième d'une livre, il correspond à un taux d'intérêt de 5%. Ici, 4 deniers par livre par mois donnent un taux d'intérêt annuel de 20%.

Éléments de bibliographie

Fibonacci, Leonardo. *Il liber abbaci*. (éd. Baldassarre Boncompagni). Rome : Tipografia delle scienze matematche e fisiche, 1857. `https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/10607990`

Goetzmann, William N. "Fibonacci and the Financial Revolution". Dans Goetzmann & Rouwenhorst, *he Origins of Value: The financial innovations that created modern capital markets*. Oxford : Oxford University Press, 2005. `http://www.nber.org/papers/w10352.pdf`

Lucas, Édouard. *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure*. Rome : Imprimerie des sciences mathématiques et physiques, 1877. `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99634z.image`

Moyon, Marc. *Fibonacci. Extraits du Liber Abaci*. Paris : ACL/Les Éditions du Kangourou, 2016.