Références à la suite dite "de Fibonacci" dans les manuels scolaires

Marc Moyon, IREM de Limoges

Stage "histoire des mathématiques et algorithmique"

EXEMPLE 2 ***La « suite de Fibonacci »***

La suite de Fibonacci est une suite de nombres, dont les deux premiers sont égaux à 1 et chaque terme suivant est égal à la somme des deux termes qui le précèdent.
Les premiers termes de cette suite sont : 1, 1, 2 (=1+1), 3 (=1+2), 5 (=2+3), 8 (=3+5), 13 (=5+8),...

Le programme ci-dessous réalise cette suite.

```
a,b,c=1,1,0
while c<20:
    a,b,c=b,a+b,c+1
    print b,
```

On pourra l'exécuter pas à pas afin de comprendre le rôle de chaque variable.

Dans cet exemple, les variables *a* et *b* contiennent à chaque itération deux termes consécutifs de la suite. La variable *c* est un compteur de boucles.

REMARQUE

La virgule après l'instruction *print* permet d'afficher les résultats sur une même ligne.

Figure 1: *Odyssée*, 2nde S, Hatier, 2010, p. 14.

EXEMPLE 2 ***La suite de Fibonacci***

La suite de Fibonacci est une suite de nombres, dont les deux premiers sont égaux à 1 et chaque terme suivant est égal à la somme des deux termes qui le précèdent.
Les premiers termes de cette suite sont : 1 ; 1 ; 2 (=1+1) ; 3 (=1+2) ; 5 (=2+3) ; 8 (=3+5) ; 13 (=5+8) ; ...

Écrivons un programme qui prend un entier *n* en entrée et affiche les *n* premiers termes de cette suite.

Python*

```
n=input("n=")
a,b,c=1,0,0
while c<=n:
    a,b,c=b,a+b,c+1
    print b,
```

Scilab

```
n=input("n=")
a=1
b=0
c=0
while c<n
    u=a+b
    a=b
    b=u
    afficher(u)
    c=c+1
end
```

TI

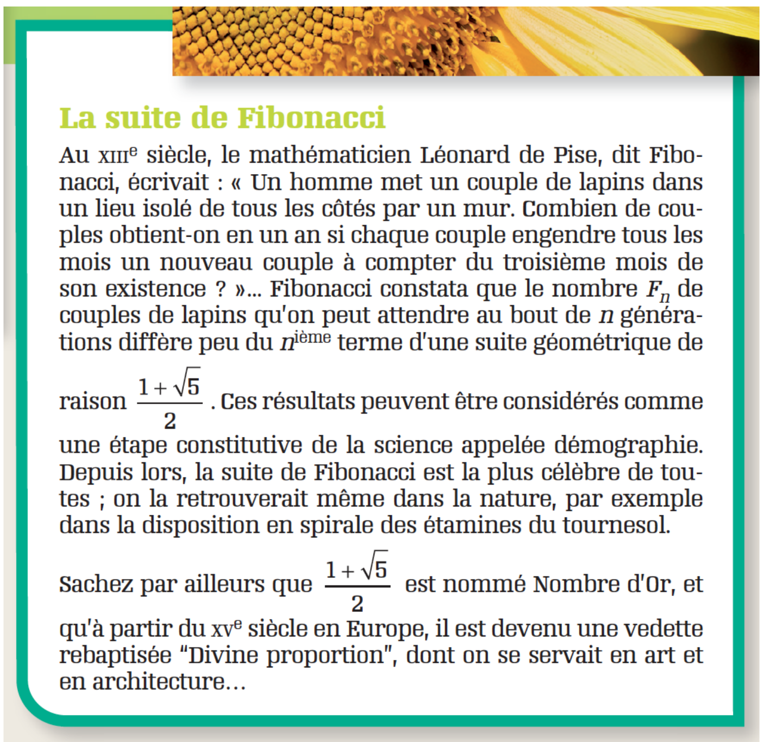
```
PROGRAM:FIBO
:Input N
:1→U
:0→V
:0→I
:While I<N
:U+V→W
:V→U
:W→V
:I+1→I
:Disp W
:End
```

CASIO

```
======FIBO    ======
?→N↵
1→U↵
0→V↵
0→I↵
While I<N↵
U+V→W↵
V→U↵
W→V↵
I+1→I↵
W◢
WhileEnd
TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR
```

* En Python, la virgule après l'instruction *print* permet d'afficher les résultats sur une même ligne.

Figure 2: *Odyssée*, 1^{e} S, Hatier, 2011, p. 14; 1^{e} ES/L, Hatier, 2011, p. 16.



La suite de Fibonacci

Au XIII^e siècle, le mathématicien Léonard de Pise, dit Fibonacci, écrivait : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »... Fibonacci constata que le nombre F_n de couples de lapins qu'on peut attendre au bout de n générations diffère peu du $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite géométrique de raison $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ces résultats peuvent être considérés comme une étape constitutive de la science appelée démographie. Depuis lors, la suite de Fibonacci est la plus célèbre de toutes ; on la retrouverait même dans la nature, par exemple dans la disposition en spirale des étamines du tournesol.

Sachez par ailleurs que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est nommé Nombre d'Or, et qu'à partir du XV^e siècle en Europe, il est devenu une vedette rebaptisée "Divine proportion", dont on se servait en art et en architecture…

Figure 3: *Odyssée*, 1^e S, Hatier, 2011, p. 155.

Figure 4: *Odyssée*, 1^e ES/L, Hatier, 2011, p. 182-183.

96 Suite de Fibonacci **Algorithmique**

Un couple de lapins adultes donne naissance tous les débuts de mois à un autre couple de lapins. Un couple de jeunes lapins doit attendre deux mois avant de pouvoir donner naissance à un nouveau couple de lapins.

Supposons que l'on dispose d'un couple de bébés lapins, on note u_n le nombre de couple de lapins n mois plus tard, u_0 étant le nombre initial de couple de lapins (on a donc $u_0 = u_1 = 1$).

a. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

b. La suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?

c. Trouver une formule qui relie les termes consécutifs de la suite u.

d. Écrire un programme permettant de connaître le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite u.

e. Écrire un programme qui permet de savoir à partir de quel mois le nombre de couples de lapins dépasse 100, puis 1 000.

Histoire des maths

Leonardo Fibonacci (v. 1175 - v. 1250) est un mathématicien italien. Né à Pise, il passa la première partie de sa vie en Afrique du Nord, où il étudia les mathématiques. Dans son principal ouvrage *Liber abaci* (le livre du calcul), Fibonacci montre la supériorité du système de numérotation des nombres à l'aide des chiffres arabes. Il y développe en particulier des méthodes de calcul algébrique : extraction de racines carrées, résolution d'équations et, en particulier, le célèbre problème de la suite qui porte son nom.

Figure 5: *Transmath*, 1e S, Nathan, 2011, p. 156.

TP **28** **Une approche du nombre d'or**

1. On considère la suite (u_n), dite de Fibonacci, définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = u_1 + u_0 = 2$, $u_3 = u_2 + u_1 = 3$, et pour tout entier naturel n, par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

a) Calculez $u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$.

b) Conjecturez le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement pour les grandes valeurs de n.

2. On considère maintenant la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Calculez $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ et placez sur une droite graduée (unité 5 cm) les points ayant pour abscisses les premières valeurs v_0, v_1, etc.

b) Conjecturez le comportement de la suite (v_n).

Histoire des Maths **Fibonacci**

Léonard de Pise (env. 1180-env. 1250), dit Fibonacci.

Né à Pise, fils d'un commerçant toscan, ce mathématicien italien émigre en Algérie, voyage en Égypte, Sicile, Grèce et Syrie.
Deux ans après son retour en Italie vers 1200, il introduit une suite, qui gardera son nom, pour résoudre un problème de reproduction de lapins.

3. Utiliser un tableur

a) • Renseignez les cellules A2 à A4. Recopiez la formule de la cellule A4=A2+A3 vers le bas pour obtenir les premiers termes de la suite (u_n).
• Dans la cellule B2, entrez : =A3/A2, et étirez cette formule vers le bas pour obtenir les premiers termes de la suite (v_n).

	A	B
1	Un	Vn
2	1	=A3/A2
3	1	=A4/A3
4	=A2+A3	=A5/A4
5	=A3+A4	=A6/A5

Note

Paramétrez le nombre maximal de décimales à l'affichage (menu Format ; menu Cellules… ; onglet Nombres).

b) Vos conjectures sont-elles confirmées ?

4. Utiliser sa calculatrice

L'algorithme suivant a pour objectif de déterminer les valeurs des n premiers termes de la suite (v_n).

a) Complétez le tableau suivant indiquant les valeurs des variables a, b, c et v suivant les premières valeurs de i.

i	a	b	c	v
	1	1		1
1				
2				
3				

b) Quel est l'objectif des quatre lignes encadrées ?

c) Utilisez cet algorithme pour programmer votre calculatrice.

```
Variable
i, n, a, b, c, v
Algorithme
Saisir n
a reçoit 1
b reçoit 1
v reçoit 1
Pour i de 1 jusqu'à n
    c reçoit a+b
    a reçoit b
    b reçoit c
    v reçoit b/a
  AFFICHER «v» i «=» v
  Fin Pour
```

Note

On peut démontrer que la suite (v_n) tend vers le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, appelé nombre d'or, lorsque n tend vers $+\infty$. Le nombre d'or est une grandeur à laquelle on a attribué, au cours des siècles, des propriétés esthétiques voire mystiques. On l'a ainsi « cherché » dans des domaines aussi variés que l'architecture, la peinture, la musique, mais aussi dans des éléments naturels comme la fleur de tournesol ou le nautile.

110 La suite de Fibonacci — Algorithmique

Le mathématicien Léonardo Fibonacci (1175 - 1250) propose un modèle amusant pour évaluer la croissance d'une population de lapins : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »
On peut modéliser le phénomène en notant (u_n) la suite décrivant le nombre de couples de lapins au $n^{\text{ième}}$ mois. On a donc $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$ car les couples n'engendrent qu'à partir du troisième mois.

a. Déterminer les valeurs de u_3 et u_4.
b. Expliquer pourquoi les mois suivants, la suite vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
c. Le(s)quel(s) des algorithmes ci-dessous programmés en Xcas a (ont) permis d'obtenir les premiers termes de la suite donnés dans la première fenêtre ?

```
u:1
v:1
v:2
v:3
v:5
v:8
v:13
```

```
1 saisir(n);
u:=1;v:=1;
afficher(u);afficher(v);
pour j de 2 jusque n
faire v:=u+v; u:=v-u;
afficher(v);
fpour;
```

```
2 saisir(n);
u:=1;v:=1;
afficher(u);afficher(v);
pour j de 1 jusque n
faire w:=u+v; u:=v; v:=w;
afficher(v);
fpour;
```

```
3 saisir(n);
u:=1;v:=1;
afficher(u);afficher(v);
pour j de 2 jusque n
faire v:=u+v; u:=v;
afficher(v);
fpour;
```

Figure 6: *Odyssée*, 1^e S, Hatier, 2011, p. 167.

Figure 7: *Sigma*, 1^e STI2D/STL, Foucher 2011, p. 158.

ACTIVITÉ 2

Placement d'argent avec intérêts composés

Le 1er janvier 2011 vous avez reçu 1 000 € ; votre capital, noté C_0, est alors placé à 3 % avec intérêts composés pendant plusieurs années.

1° Le 1er janvier 2012, quel est le montant des intérêts obtenus pour ce capital ? De quel nouveau capital C_1 disposez-vous alors ?

2° Le 1er janvier 2013, quel est le montant des intérêts produits par le capital C_1 pour l'année 2012 ? Quel est votre nouveau capital C_2 ?

3° Le 1er janvier 2014, quel est le montant des intérêts produits par le capital C_2 pour l'année 2013 ?

4° Calculer de même C_3, C_4… pour déterminer à partir de quelle année votre capital initial C_0 a augmenté de plus de la moitié de sa valeur.

▶ **Attention ! :** *avec des intérêts composés, les intérêts d'une année deviennent du capital pour les années suivantes et rapportent eux aussi des intérêts.*

5° **a)** Les augmentations successives de capital $C_1 - C_0$, $C_2 - C_1$, $C_3 - C_2$ sont-elles constantes ?

b) Calculer $\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_2}, \frac{C_4}{C_3}$. Que constatez-vous ?

c) Écrire sans justification une relation générale permettant de passer du capital C_n obtenu la n-ième année à C_{n+1}.

d) Justifier l'égalité proposée à la question précédente.

Méthode : *à partir des cas particuliers C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 et de la question* **b)**, *imaginez une égalité donnant dans le cas général Cn_{+1} en fonction de C_n.*

Dans ce chapitre nous allons établir des résultats permettant de répondre en particulier à la question suivante et qui pourront être utilisés dans de nombreuses situations analogues (évolution d'une population ou d'un prix augmentant ou diminuant d'un taux fixe chaque année ou chaque mois…) :

Peut-on calculer C_n en fonction de C_0 et de n, sans passer par les intermédiaires C_1, C_2…, C_{n-1} ?

Leonardo Fibonacci 1175 - 1240

Quelques mots d'histoire

Dans l'Antiquité, on utilisait des méthodes de calcul (on dirait aujourd'hui des algorithmes) permettant d'obtenir une succession de valeurs approchées d'un même nombre qui, par exemple, était une longueur, un angle, une aire ou un volume.

On définissait ainsi ce qui, bien plus tard, s'appellera une « suite numérique » et on en étudiait certaines propriétés.

Certains problèmes faisant intervenir des suites sont devenus célèbres : ainsi, en 1202, dans le *Liber abaci* (le Livre de l'abaque), le plus grand mathématicien du Moyen Âge, Fibonacci, s'intéresse au nombre de descendants que deux lapins peuvent avoir en une année.

Ce n'est qu'à la fin du XVIIe siècle que sa notation indicielle u_n a été introduite par Lagrange (1736-1813), qui est l'auteur de travaux très importants et l'un des premiers professeurs de l'École polytechnique.