Histoire des mathématiques et algorithmique
Al-Khwārizmī et la résolution des équations de degré 2

1 Cadre

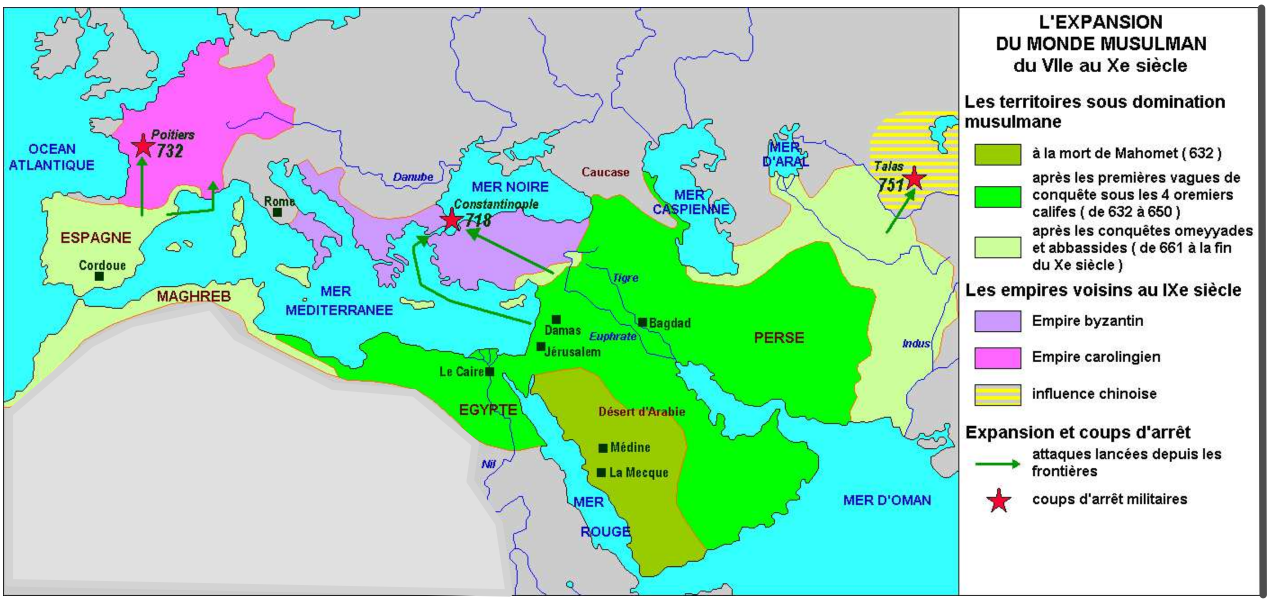
1.1 Cadre historique

Al-Khwārizmī

Muhammad ibn Mūsā Al-Khwārizmī est né dans les années 780 et mort vers 850 à Bagdad.
C'était un mathématicien et astronome qui fut actif entre 813 et 833 à la Maison de la sagesse de Bagdad sous le règne du calife al-Mamūn.
Ses écrits, rédigés en langue arabe, puis traduits en latin à partir du XIIe siècle, ont permis l'introduction de la numération décimale positionnelle (dit *calcul indien* et aujourd'hui numération indo-arabe)de l'algèbre en Europe.
Son nom est à l'origine du mot algorithme et le titre de l'un de ses ouvrages (*Livre sur le calcul par la restauration (al-jabr) et la comparaison (al-muqābala)*) à l'origine du mot algèbre.

(Voir vidéo d'Ahmed Djebbar (voyage en mathématiques) : voyage-mathematique.com/exposition/al-khwârismî/)

Carte du bassin méditerranéen



Carte d'Alain Houot

1.2 Cadre mathématique

Equations du second degré

Nous allons étudier des extraits du *Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison* qui proposent la résolution des équations du second degré.
Une équation du second degré est une équation du type :

$$x^2 + px + q = 0$$

où p et q sont des nombres rationnels (sous forme de fraction) positifs ou négatifs.
A l'époque d'Al-Khwārizmī, il n'est pas encore question de nombres négatifs ni du nombre zéro, c'est pourquoi il classe ces équations du second degré en plusieurs catégories ou types.

Types simples :
- Type 1 : $x^2 = px$
- Type 2 : $x^2 = q$
- Type 3 : $q = px$

Types composés :
- Type 4 : $x^2 + px = q$
- Type 5 : $x^2 + q = px$
- Type 6 : $px + q = x^2$

où, cette fois-ci, p et q sont des nombres rationnels non nuls (différents de zéro) et POSITIFS.
Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux équations de type 4, 5 et 6 que nous ne savons pas résoudre au collège.

Vocabulaire

Voici un extrait du Mukhtasasar fī hisāb al-jabr wa-l-muqābala [Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison] d'al-Khwārizmī (IXe siècle) qui propose la résolution des équations composées du second degré (A partir de la traduction française réalisée par Roshdi Rashed, 2007, p. 96 – 106) :

> *J'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'al-jabr wa-l-muqābala, selon trois modes qui sont : les racines, les carrés, et le nombre simple, qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un carré. La racine, parmi ces modes, est toute chose multipliée par elle-même, à partir de l'unité, les nombres qui sont au-dessus d'elle, et les fractions qui sont au-dessous d'elle. Le carré est ce qu'on obtient lorsqu'on multiplie la racine par elle-même. Le nombre simple est un nombre qu'on exprime sans qu'il soit rapporté ni à une racine, ni à un carré.*

Voici la discussion des trois modes du nombre dans le Liber restauracionis (Livre de la restauration), adaptation latine du 13e siècle de l'algèbre d'al-Khwārizmī. (d'après M. Moyon 2017) :

> *Quant au nombre qui est nécessaire pour notre calcul, il est divisé en trois [modes] : la racine du nombre, le carré ou le bien de la racine et le nombre simple associé ni avec le carré ni avec la racine. Quant à la racine, c'est le nombre qui, multiplié par lui-même, produit l'autre. Quant au bien ou le carré de la racine, c'est le nombre qui est produit à partir de ladite racine multipliée par elle-même. Le nombre simple est ce qui n'est produit par le moyen d'aucun bien ou d' aucune racine.*

En clair, à quoi correspondent, une racine, une chose, un carré, un nombre simple ?

Une racine se dit ≪ shay ≫ en arabe et sera représentée par un shin (première lettre du mot) qui donnera ≪ x ≫(dû à la transcription phonétique de ≪ sh ≫ en langue romane de l'époque, encore aujourd'hui en portugais).
Donc, aujourd'hui :

- une **racine** (ou une chose) se traduit par l'inconnue ....
- un **carré** (ou un bien) par ....
- un **nombre simple** correspond au terme constant. Il apparaît souvent sous forme de dirham ou de drachme (monnaie) dans les textes d'al-Khwārizmī ou ses traductions latines.

2 Procédés (algorithmes)de résolution des équations du second degré par Al-Khwārizmī

2.1 Equations de type 4 les racines plus les carrés égaux à des nombres ($x^2 + px = q$)

Problème proposant une résolution d'équation de type 4

> Les carrés plus les racines égaux à un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : un carré plus dix racines sont égaux à trente-neuf dirhams, c'est-à-dire que si on ajoute à un carré quelconque [une quantité] égale à dix racines, le tout sera trente-neuf. Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; il vient, dans ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même ; on a vingt-cinq ; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura soixante-quatre ; tu prends la racine qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du carré que tu veux, et le carré est neuf.

1. Si on note x^2 ≪ les carrés ≫ et x ≪ les racines ≫ , écrire l'expression littérale qui correspond à l'exemple proposé :

   ....

   ....

2. Ecrire les calculs correspondants aux 5 étapes données dans le procédé pour résoudre l'équation obtenue :

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Vérifier la solution trouvée.

   ....

   On a ainsi obtenu un algorithme de résolution pour cette équation.

3. **Vers la généralisation ...**
   Et s'il avait dit ≪ un carré plus sept racines sont égaux à deux-cent-vingt-huit dirhams ≫ ?

   (a) Ecrire l'expression littérale qui correspond à cette situation :

   ....

   (b) Quelles seraient les 5 étapes données dans le procédé précédent pour résoudre l'équation obtenue ?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Vérifier la solution trouvée.

   ....

4. On veut écrire un algorithme permettant de résoudre les équations du type 4 ($x^2 + px = q$) où p désigne le nombre de racines et q le nombre de dirhams.

   Reprendre les 5 étapes du procédé précédent en remplaçant le nombre de racines (10) par p et le nombre de dirhams (39) par q.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2.2 Equations de type 5 : Les carrés et le nombre égaux à des racines ($x^2 + q = px$)

Problème proposant une résolution d'équation de type 5

> Les carrés et le nombre égaux à des racines, c'est par exemple lorsque tu dis : un carré et vingt et un dirhams sont égaux à dix racines, c'est-à-dire que, si tu ajoutes à un carré quelconque vingt et un dirhams, ce que tu obtiens sera égal à dix racines de ce carré.
>
> Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; on aura cinq ; multiplie-le par lui-même, on aura vingt-cinq, dont tu retranches vingt et un, ce qu'on a dit être avec le carré ; il reste quatre ; prends sa racine, qui est deux ; retranche-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du carré que tu veux. Et le carré est neuf. Si tu veux, ajoute la racine à la moitié du nombre des racines ; on aura sept, qui est la racine du carré cherché, et le carré est quarante-neuf. Si tu rencontres un problème qui te mène à cette sorte, vérifie son exactitude, soit en ajoutant, sinon en retranchant nécessairement. Ce procédé se fait à la fois en ajoutant et en retranchant, ce qui ne se fait dans aucune des trois sortes, dans lesquelles on a besoin de partager en deux moitiés le nombre des racines. Sache que, si tu partages le nombre des racines dans cette sorte en deux moitiés, et que tu multiplies [une moitié] par elle-même de sorte que le produit soit moins que les dirhams qui sont avec les carrés, le problème devient alors impossible ; et si le résultat est égal aux dirhams eux-mêmes, la racine du carré est alors égale à la moitié du nombre des racines exactement, sans excédent ni diminution.

1. Si on note x^2 « les carrés » et x « les racines » , écrire l'expression littérale qui correspond à l'exemple proposé :

   ....

   ....

2. Ecrire les calculs correspondants aux étapes données dans le procédé pour résoudre l'équation obtenue :

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Vérifier la (les) solution(s) trouvée(s).

....

....

On a ainsi obtenu un algorithme de résolution pour cette équation.

3. **Vers la généralisation ...**
   Et s'il avait dit « un carré plus vingt dirhams sont égaux à huit racines » ?
   (a) Ecrire l'expression littérale qui correspond à cette situation :

   ....

   (b) Quelles seraient les étapes données dans le procédé précédent pour résoudre l'équation obtenue ?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Vérifier la (les) solution(s) trouvée(s).

   ....

   ....

4. On veut écrire un algorithme permettant de résoudre les équations du type 5 ($x^2 + q = px$) où p désigne le nombre de racines et q le nombre de dirhams.

   Reprendre les étapes du procédé précédent en remplaçant le nombre de racines (10) par p et le nombre de dirhams (21) par q.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2.3 Equations de type 6 : les racines plus le nombre égaux aux carrés ($px + q = x^2$)

Problème proposant une résolution d'équation de type 6

> Les racines plus le nombre égaux aux carrés, c'est par exemple lorsque tu dis : trois racines et quatre en nombre sont égaux à un carré.
>
> Procédé : partage le nombre des racines en deux moitiés, on a un plus un demi ; multiplie-le par lui-même, on a deux plus un quart ; ajoute-le à quatre, on a six plus un quart ; prends sa racine qui est deux plus un demi, ajoute-la à la moitié du nombre des racines, qui est un plus un demi, on a quatre, qui est la racine du carré, et le carré est seize.

1. Si on note x^2 ≪ les carrés ≫ et x ≪ les racines ≫ , écrire l'expression littérale qui correspond à l'exemple proposé :

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Ecrire les calculs correspondants aux étapes données dans le procédé pour résoudre l'équation obtenue :

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Vérifier la solution trouvée.

   ....

   ....

   On a ainsi obtenu un algorithme de résolution pour cette équation.

3. **Vers la généralisation ...**
   Et s'il avait dit « 4 racines plus 2 dirhams sont égaux à un carré » ?
   (a) Ecrire l'expression littérale qui correspond à cette situation :

   ....

   (b) Quelles seraient les étapes données dans le procédé précédent pour résoudre l'équation obtenue ?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Vérifier la solution trouvée.

   ....

   ....

4. On veut écrire un algorithme permettant de résoudre les équations du type 6 ($+px + q = x^2$) où p désigne le nombre de racines et q le nombre de dirhams.

   Reprendre les étapes du procédé précédent en remplaçant le nombre de racines (3) par p et le nombre de dirhams (4) par q.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

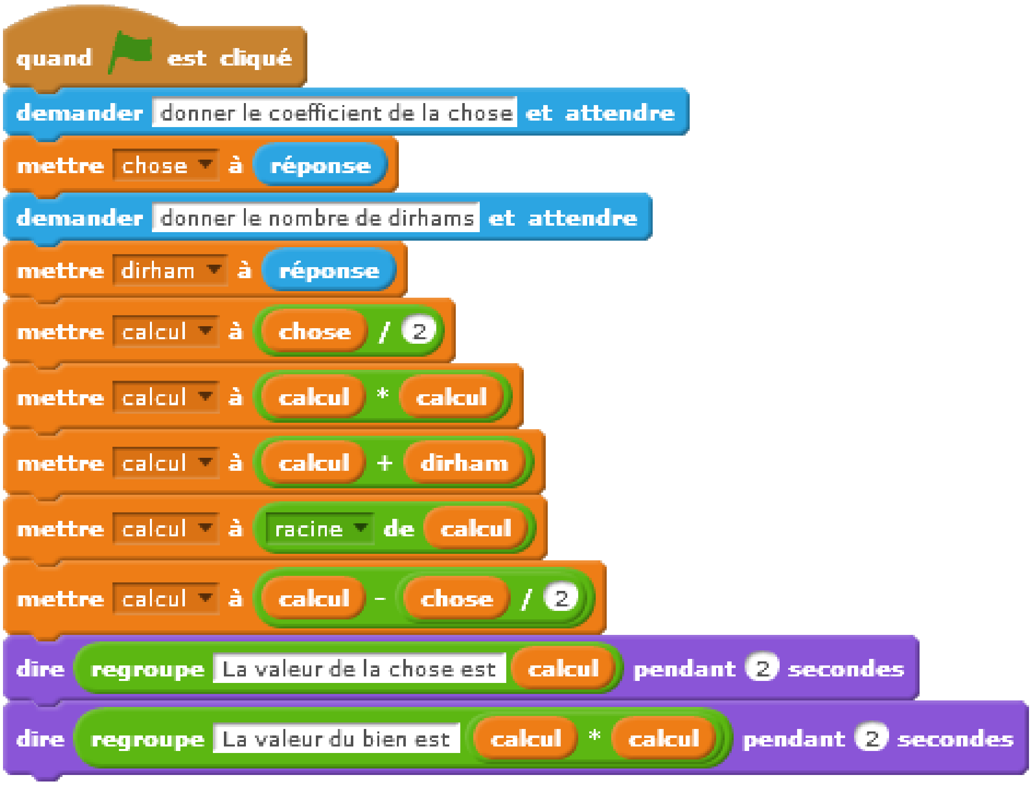
   ....

3 Application sur SCRATCH

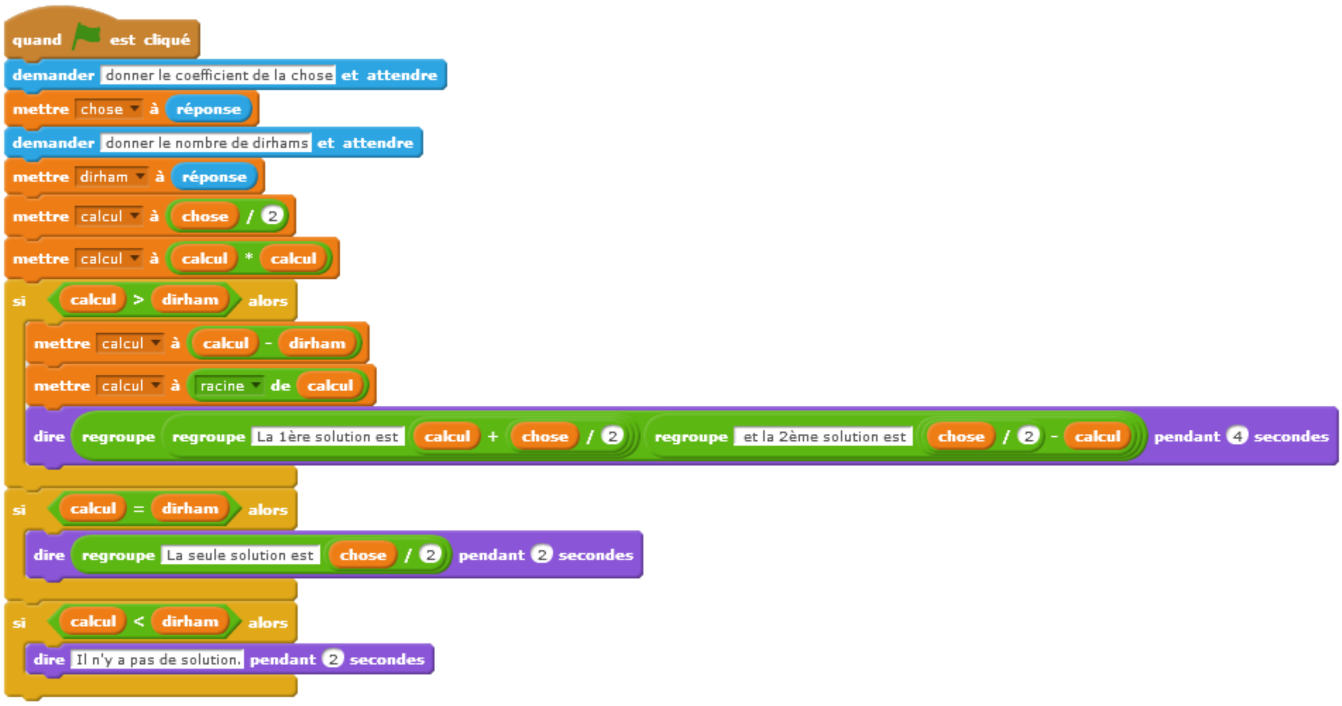
3.1 Travailler à partir d'algorithmes existants

Voici deux algorithmes programmés sur SCRATCH qui reprennent les procédés d'al-Khwārizmī pour les équations de type 4 et 5.

Programme 1 :



Programme 2 :



1. Retrouver lequel de ces algorithmes correspond à la résolution d'une équation de type 4 et lequel correspond à celle de type 5.

2. **Travaux pratiques :**
   (a) Taper ces deux programmes sur SCRATCH.
   (b) Les tester avec les valeurs des problèmes d'Al-Khwārizmī et vérifier la solution.
   (c) Les tester avec d'autres valeurs.
   (d) Améliorer ces programmes pour tenir compte des impératifs d'Al-Khwārizmī, en particulier que chaque valeur p et q doit être positive. *(On pourra utiliser une instruction conditionnelle du type « si telle valeur est .... alors on poursuit l'algorithme, sinon on renvoie un message qui indique que la valeur ne convient pas »)*

3.2 Créer un algorithme

1. En vous aidant des deux algorithmes donnés dans le paragraphe précédent, programmer sur SCRATCH un algorithme reprenant le procédé d'al-Khwārizmī pour les équations de type 6.
2. Le tester avec les valeurs du problème d'Al-Khwārizmī étudié.
3. Améliorer ce programme (si besoin) pour tenir compte des impératifs d'Al-Khwārizmī.

Résolution de problèmes

Parmi la sélection de problèmes suivante, retrouver dans chaque cas de quel type d'équation il s'agit et la résoudre en utilisant le programme sur SCRATCH fourni par le professeur.

- $x^2 + 36 = 9x$

  C'est une équation de type ....

  La (les) solution(s) donnée(s) par le programme est (sont) : ....

  Vérification :

  ....

  ....

- $x^2 + 4x = 20$

  C'est une équation de type ....

  La (les) solution(s) donnée(s) par le programme est (sont) : ....

  Vérification :

  ....

  ....

- $12x + 288 = x^2$

  C'est une équation de type ....

  La (les) solution(s) donnée(s) par le programme est (sont) : ....

  Vérification :

  ....

  ....

- $15x + 25 = 5x^2$

  Effectuer les modification nécessaires pour reconnaître le « type » de cette équation :

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  C'est une équation de type ....

  La (les) solution(s) donnée(s) par le programme est (sont) : ....

  Vérification :

  ....

  ....

- $2x^2 - 8x = -24$

  Effectuer les modification nécessaires pour reconnaître le « type » de cette équation :

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  C'est une équation de type ....

  La (les) solution(s) donnée(s) par le programme est (sont) : ....

  Vérification :

  ....

  ....

- $3(x^2-2)+12x=0$

  Effectuer les modification nécessaires pour reconnaître le « type » de cette équation :

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  C'est une équation de type ....

  La (les) solution(s) donnée(s) par le programme est (sont) : ....

  Vérification :

  ....

  ....

- $(7x^2-2x)-(3x^2-8)=0$

  Effectuer les modification nécessaires pour reconnaître le « type » de cette équation :

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  C'est une équation de type ....

  La (les) solution(s) donnée(s) par le programme est (sont) : ....

  Vérification :

  ....

  ....

Projet réalisé en collaboration avec les animateurs(trices) du groupe IREM sur l'Histoire des mathématiques sous la direction de Marc Moyon, Maître de Conférence.