Résoudre des équations du second degré avec al-Khwārizmī : Sélection de problèmes

Marc Moyon, IREM de Limoges

Stage "histoire des mathématiques et algorithmique"

Nous reprenons ci-après un extrait du *Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* [Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison] d'al-Khwārizmī (IX^e siècle) qui propose la résolution des équations composées du second degré.

Problème 1 – Type 4 : $x^2 + px = q$ *avec* $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Tu as multiplié le tiers d'un bien plus un dirham par son quart plus un dirham. On a vingt[1].

Sa procédure[2]: tu multiplies le tiers d'une chose par le quart d'une chose; on a la moitié d'un sixième d'un carré. Tu multiplies un dirham par le tiers d'une chose, on a le tiers d'une chose; et un dirham par le quart d'une chose vaut le quart d'une chose; et un dirham par un dirham vaut un dirham. Tout cela est la moitié d'un sixième d'un carré, plus le tiers d'une chose, plus le quart d'une chose, plus un dirham, et est égal à vingt dirhams. ôte de vingt un dirham valant [l'autre] dirham, il reste dix-neuf dirhams égaux à la moitié du sixième d'un carré, plus un tiers d'une chose plus un quart d'une chose[3]. Complète ton carré; pour le compléter, tu multiplies tout ce que tu as par douze ; ce que tu as sera un carré plus sept racines, qui sont égaux à deux cent vingt-huit dirhams. Partage en deux moitiés le nombre des racines; multiplie la moitié par elle-même; le produit sera douze plus un quart, que tu ajoutes au nombre qui est deux cent vingt-huit; on a deux cent quarante plus un quart. Prends sa racine, quinze plus un demi ; soustrais-en la moitié du nombre des racines, qui est trois plus un demi ; il reste douze, qui est le bien. Ce problème t'a mené à l'un des six procédés, qui est **des carrés plus des racines sont égaux à un nombre**[4].

[1] $(\frac{1}{3}x + 1)(\frac{1}{4}x + 1) = 20$

[2] Rashed traduit *qiyāsuhu* par "on l'infère ainsi". Il me semble que ce choix est trop fort. Je préfère "sa procédure" ou "sa règle". Ce terme comporte néanmoins une notion l'idée de théorisation de la pratique, sans doute pour la généralité de la procédure. C'est toujours la même procédure à mettre en place lorsqu'on est devant un problème de ce type.

[3] $19 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$, autrement dit : $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$

[4] Rashed, 2007, p. 150.

Problème 2 – Type 5 : $x^2 + q = px$ *avec* $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Tu divises dix en deux parties[5], tu multiplies chaque partie par elle-même et tu additionnes les produits. On a cinquante-huit dirhams[6].

Sa procédure : tu poses l'une des deux parties une chose, et l'autre dix moins une chose. Tu multiplies dix moins une chose par lui-même; on a cent plus un carré moins vingt choses. Tu multiplies ensuite une chose par une chose; on a un carré. Tu les additionnes ensuite; cela sera cent plus deux carrés moins vingt choses, égaux à cinquante-huit dirhams. Restaure le cent et les deux carrés par les vingt choses soustraites, et ajoute-les aux cinquante-huit. On a cent plus deux carrés égaux à cinquante-huit dirhams plus vingt choses. Ramène cela à un seul carré en prenant la moitié de ce que tu as. On

[5] Il s'agit ici d'un problème classique de l'algèbre arabe, à savoir celui du partage de 10 en deux parties x et y ($x + y = 10$) vérifiant certaines conditions énoncées dans le problème. x et y sont soit des entiers, soit une somme d'un entier et d'une fraction (évidemment inférieure à 1 – c'est le sens même du mot *fractio* comme nombre rompu).

[6] Partage de 10 en deux parties x et y ($x + y = 10$) telles que $x \times x + y \times y = 58$.

a cinquante dirhams plus un carré égaux à vingt-neuf dirhams plus dix choses. Réduis, et ceci en ôtant vingt-neuf des cinquante ; il reste vingt et un plus un carré égaux à dix choses[7]. Partage en deux moitiés le nombre des racines, qui est cinq, et multiplie-le par lui-même. On a vingt-cinq, desquels tu ôtes les vingt et un qui sont avec le carré; il reste quatre. Prends sa racine, qui est deux, et soustrais-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq; il reste trois, qui est l'une des deux parties; et l'autre est sept. Ce problème t'a mené à l'un des six procédés, qui est **des carrés plus un nombre sont égaux à des racines**[8].

[7] $21 + x^2 = 10x$

[8] Rashed, 2007, p. 152–154.

Problème 3 – Type 6 : $px + q = x^2$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Tu multiplies le tiers d'un bien par son quart pour retrouver le bien plus vingt-quatre dirhams[9].

[9] $\frac{1}{3}x \times \frac{1}{4}x = x + 24$

Sa procédure : tu poses ton bien, une chose. Tu multiplies ensuite le tiers d'une chose par le quart d'une chose; on a un demi-sixième d'un carré égal à une chose plus vingt-quatre dirhams. Tu multiplies ensuite un demi-sixième du carré par douze pour compléter ton carré; tu multiplies une chose par douze; on a douze choses; et tu multiplies vingt-quatre par douze; tu obtiendras deux cent quatre-vingt-huit dirhams plus douze racines égaux à un carré[10]. Partage en deux moitiés le nombre des racines; on a six, que tu multiplies par lui-même; ajoute [le produit] à deux cent quatre-vingt-huit, la somme de tout cela est trois cent vingt- quatre. Prends ensuite sa racine, qui est dix-huit, que tu ajoutes à la moitié du nombre des racines, qui est six. On a vingt-quatre, qui est le bien. Ce problème t'a mené à l'un des six procédés, qui est **des racines plus un nombre sont égaux à des carrés**[11].

[10] $288 + 12x = x^2$

[11] Rashed, 2007, p. 154–156.

Problème 4 – Type 5 : $x^2 + q = px$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Si quelqu'un interroge en disant: tu divises dix en deux parties et tu multiplies ensuite l'une par l'autre; on a vingt et un dirhams[12].

[12] Partage de 10 en deux parties x et y ($x + y = 10$) telles que $x \times y = 21$

Tu sais que l'une des deux parties de dix est une chose et l'autre dix moins une chose. Multiplie une chose par dix moins une chose; on a dix choses moins un carré égaux à vingt et un. Restaure les dix choses par le carré et ajoute-le à vingt et un ; on a dix choses égales à vingt et un dirhams plus un carré. Ôte la moitié du nombre des racines, il reste cinq; multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq. Ôte de celui-ci le vingt et un qui est avec le carré, il reste quatre. Prends sa racine, qui est deux, et soustrais-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq ; il reste trois, ce qui est l'une des deux parties.

Si tu veux, tu ajoutes la racine de quatre à la moitié du nombre des racines; on a sept, qui est l'une des parties.

Ce problème est de ceux qui se font par l'addition et la soustraction[13].

[13] Rashed, 2007, p. 156–158.

Problème 4 – Type 3 : $q = px$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Si on dit: tu divises dix en deux parties; tu multiplies chaque partie par elle-même et tu ôtes le plus petit [produit] du plus grand; il reste quarante[14].

[14] Partage de 10 en deux parties x et y ($x + y = 10$ avec $x < y$) telles que $y^2 - x^2 = 40$

Sa procédure: tu multiplies dix moins une chose par lui-même, on a cent plus un carré moins vingt choses ; tu multiplies une chose par une chose; on a un carré, que tu soustrais de cent plus un carré moins vingt choses ; il reste cent moins vingt choses égaux à quarante dirhams. Restaure le cent par les vingt choses et ajoute-les à quarante ; on a cent égal à vingt choses plus quarante dirhams. Ôte les quarante de cent; il reste soixante dirhams égaux à vingt choses[15]. Une seule chose est donc trois, ce qui est l'une des deux parties[16].

[15] 60=20x

[16] Rashed, 2007, p. 158.

Problème 5 – Type 5 : $x^2 + q = px$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu multiplies l'une des parties par elle-même pour qu'elle soit quatre-vingt-une fois l'autre[17].

Sa procédure: tu dis: dix moins une chose par lui-même est cent plus un carré moins vingt choses, ce qui est égal à quatre-vingt-une choses. Restaure le cent et le carré par les vingt choses et ajoute-les aux quatre-vingt-une choses; on a cent plus un carré égaux à cent racines plus une racine[18]. Partage en deux moitiés le nombre des racines, on a cinquante plus un demi; multiplie-le par lui-même, on a deux mille cinq cent cinquante et un quart; soustrais-en le cent, il reste deux mille quatre cent cinquante et un quart ; prends sa racine, qui est quarante-neuf et un demi, soustrais-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinquante et un demi; il reste un, qui est l'une des deux parties[19].

[17] Partage de 10 en deux parties x et y ($x + y = 10$) telles que $x^2 = 81 \times y^2$

[18] $100 + x^2 = 100x + 1x$ ou bien $100 + x^2 = 101x$

[19] Rashed, 2007, p. 166.

Problème 6 – Type 3 : $q = px$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Si on dit: soit deux biens entre lesquels il y a deux dirhams; tu divises le petit par le grand; le quotient revient à un demi-dirham[20].

Pose l'un des deux biens une chose, et l'autre une chose plus deux dirhams. Puisque tu as divisé une chose par une chose plus deux dirhams, le quotient est un demi-dirham. Mais tu sais que quand tu multiplies le quotient par le diviseur, on retrouve le bien que tu as divisé, qui est une chose. Dis donc : une chose et deux dirhams par le demi qui est le quotient, cela donne une demi-chose et un dirham égal à une chose. Ôte une demi-chose pour une demi-chose, il reste un dirham égal à une demi-chose[21]; double-le, la chose sera égale à deux dirhams et l'autre à quatre[22].

[20] Soient deux nombres x et y ($y - x = 2$) tels que $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

[21] $1 = \frac{1}{2}x$

[22] Rashed, 2007, p. 170.

Problème 7 – Type 3 : $q = px$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Si on dit: soit un carré dont les trois quarts du cinquième sont égaux aux quatre cinquièmes de la racine[23].

Sa procédure : tu ajoutes aux trois quarts de son cinquième leur quart pour que la racine soit complète; ceci est trois plus trois quarts de vingt. Transforme-les tous en quarts, on a quinze de quatre-vingts. Divise le quatre-vingts par quinze, on a cinq et un tiers; ceci est la racine du carré et le carré est vingt-huit et quatre neuvièmes[24].

[23] $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} x^2 = \frac{4}{5} x$

[24] Rashed, 2007, p. 174.

Problème 8 – Type 1 : $x^2 = px$ avec $p \in \mathbb{Q}_+^*$

Si on dit: tu multiplies le tiers d'un bien par son quart; on retrouve le bien[25].

Sa procédure: tu multiplies le tiers d'une chose par le quart d'une chose; on a la moitié d'un sixième de carré égale à une chose. Le carré est égal à douze choses[26], et la chose est la racine de cent quarante-quatre[27].

[25] $\frac{1}{3}x \times \frac{1}{4}x = x$

[26] $x^2 = 12x$

[27] Rashed, 2007, p. 182.

Problème 9 – Type 6 : $px + q = x^2$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

Si on dit : d'un bien, tu multiplies le tiers plus un dirham par le quart plus deux dirhams; on retrouve le bien plus treize dirhams[28].

Sa procédure: tu multiplies le tiers d'une chose par le quart d'une chose, on a un demi-sixième de carré; tu multiplies deux dirhams par le tiers d'une chose, on a deux tiers de racine; et un dirham par le quart d'une chose, on a le quart d'une chose; et deux dirhams par un dirham est deux dirhams; cela est un demi-sixième de carré plus deux dirhams plus onze parties de douze parties de racine, égaux à une racine plus treize dirhams. Élimine deux dirhams de treize dirhams par deux dirhams, il reste onze dirhams. Ôte onze parties de racine, il reste un demi-sixième de racine plus onze dirhams égaux à un demi-sixième de carré; complète celui-ci en le multipliant par douze, et multiplie tout ce que tu as par douze; on a un carré égal à cent trente-deux dirhams plus une racine[29]. Réduis par cela, tu parviens à la vérité, si Dieu le Très-Haut le veut, comme je te l'avais décrit[30].

[28] $(\frac{1}{3}x + 1)(\frac{1}{4}x + 2) = x + 13$

[29] $x^2 = 132 + x$

[30] Rashed, 2007, p. 182–184.

Rashed, Roshdi. *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris : Blanchard, 2007.