

Références à l'histoire de l'algèbre dans les manuels scolaires : Al-Khwārizmī

Marc Moyon, IREM de Limoges

Stage "histoire des mathématiques et algorithmique"

Babyloniens : premières traces

Une tablette babylonienne en écriture cunéiforme, datée de 1800 av. J.-C., décrit une méthode de résolution d'une équation du 2^e degré. On peut traduire le problème ainsi : « J'ai additionné sept fois le côté de mon carré et onze fois la surface, [et cela donne] 61/4. » La question implicite posée est : quelle est la longueur de mon carré ? Cela correspond à l'équation $11x^2 + 7x = 6,25$ (soit $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 11$; $b = 7$ et $c = -6,25$). Voici la résolution proposée :

- « Tu multiplieras 11 par 6 1/4. » (soit $-ac = 68 1/4$)
- « Tu multiplieras 3 1/2 par 3 1/2. » (soit $b^2/4 = 12 1/4$)
- « Tu ajouteras à 68 1/4. » (soit $b^2/4 - ac = 81$)
- « C'est le carré de 9. » (soit $\sqrt{b^2/4 - ac} = 9$)
- « Tu soustrairas 3 1/2. » (soit $-b/2 + \sqrt{b^2/4 - ac} = 5 1/2$)
- « Que poser qui, multiplié par 11 donne 5 1/2 ? » (soit $\frac{-b/2 + \sqrt{b^2/4 - ac}}{a} = 1/2$)
- « Le côté du carré est 1/2. »

Tablette babylonienne (British Museum n°13 901).

Représentation d'Al-Khwarizmi sur un timbre commémoratif russe (1983).

Al-Khwarizmi

Voici comment Al-Khwarizmi décrit le calcul de la solution positive de l'équation $x^2 + 10x = 39$: « Quant aux carrés et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme tu dis : un carré et dix de ses racines égalent 39 dirhams. Sa résolution consiste à diviser les racines par 2, on trouve donc 5 dans ce problème ; au carré on trouvera 25 qu'on ajoute à 39 pour obtenir 64. Tu en prends alors la racine qui est 8. Tu en retranches la moitié du nombre des racines qui était 5, tu trouves 3. C'est la racine du carré que tu cherches. »

Ce que l'on écrit aujourd'hui :

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 39 &= (x + 5)^2 - 25 - 39 \\ &= (x + 5)^2 - 64 \\ &= (x + 5)^2 - 8^2 \\ &= (x + 5 - 8)(x + 5 + 8) \\ &= (x - 3)(x + 13) \end{aligned}$$

De la géométrie grecque à l'algèbre arabe

De l'étude de ces équations, les Grecs tirent une conclusion forte, toujours valable : elles n'ont de solution que si la valeur de $b^2 - 4ac$, le "discriminant", est positive – et dans l'esthétique des Grecs, elle doit être le carré d'un entier ou d'un rationnel (► Pour aller plus loin). Ainsi, le mathématicien Diophante, vers -250, fait l'étude des cas où le discriminant est un carré d'entier... ce qui inspirera un savant perse de Bagdad, Al-Khwarizmi, vers 820, époque de l'apogée des sciences arabes (du ix^e au xv^e siècle). Dans son livre *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, Al-Khwarizmi – dont le nom latinisé, Algorithmi, donnera le terme "algorithme" – introduit de grandes innovations : la notation décimale et le zéro, inspirés des Indiens, et l'idée de dissocier les équations de leur référence géométrique (► encadré). Par là, Al-Khwarizmi inaugure l'algèbre c'est-à-dire l'étude des équations pour elles-mêmes.

Nombres négatifs et imaginaires

Le Perse donne ainsi des procédures de calcul générales de six types d'équations : $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$. Une telle

multiplicité s'explique par le problème des nombres négatifs : on n'en est pas encore à admettre leur existence isolée dans une équation (par exemple, $x^2 - 2x = -1$). Ce n'est qu'en 1629 que le Français Albert Girard les fera entrer de plain-pied dans la discipline. Et ce n'est pas la seule innovation ! Le troisième degré, qui a cédé dès 1545 au génie du médecin italien Jérôme Cardan grâce à une réduction à deux

équations du second degré, a fait apparaître des carrés négatifs, par exemple $a^2 = -9$! Cela oblige les mathématiciens à inventer de nouveaux nombres, dits "imaginaires", ayant une telle propriété : ce seront les Nombres complexes, que vous rencontrerez en Terminale. Dans la foulée, les équations de degré quatre sont résolues par Ludovico Ferrari, élève de Cardan.

Bref, les progrès s'accumulent au xvii^e siècle. Et au xviii^e siècle on découvre qu'une équation de degré n a n racines (parfois imaginaires). Se pose alors une question : peut-on résoudre toute équation de degré n par une méthode générale, comme avec le 2^e degré ? Évariste Galois y répondra en 1832, juste avant de mourir à l'âge de 21 ans dans un duel amoureux : non, il ne peut y avoir de méthode générale de résolution d'équations de degré 5 et au-delà. Pour aboutir à cette conclusion, Galois a esquissé une théorie des équations polynomiales. Ses écrits sont encore une source d'inspiration aujourd'hui.

Al-Khwarizmi dissocie les équations de leur référence géométrique. Par là, il inaugure l'Algèbre.



Première page de l'*Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* d'Al-Khwarizmi. Le terme arabe pour "restauration" est "al-jabr" qui donnera "algèbre".

Al Khwarizmi

Ce mathématicien perse est né en 789 dans la région du Khwarezm (située dans l'actuel Ouzbékistan) et mort en 850 à Bagdad. Dans un traité, « *Kitāb al-jabr wa al-muqābala* », il donne des méthodes de résolution d'équations du premier et du deuxième degré. Al-jabr donnera le mot **algèbre**, et le nom de ce mathématicien sera à l'origine du mot algorithme.

Figure 1: *Odyssee*, 1^e S, Hatier, 2011, p. 45.

Figure 2: *Sésamath*, 2^e^{nde}, 2014, p. 114.

Point histoire

Le nom « algorithme » vient de Al-Khwarizmi, mathématicien perse du IX^e siècle qui a introduit ce concept dans son traité « Al-Jabr wa-al-Muqabalah » où il décrit des procédures pas à pas de résolution d'équations. « Al-Jabr » est lui-même à l'origine du mot « algèbre ».

Figure 3: *Maths x*, 2^{nde}, Didier, 2010, p. 8.

6 Résoudre une équation
 Examinez la résolution ci-contre. Sauriez-vous, comme al-Khwarizmi, donner un algorithme de calcul permettant de résoudre l'équation $ax + b = 0$, où a est non nul ?

$2x - 3 = 0$ $2x = 3$ $x = 1,5$

Figure 4: *Transmath*, 2^{nde}, Nathan, 2010, p. 11.

Activité 1 L'algèbre comme au IX^e siècle

Au neuvième siècle, le mathématicien arabe Al Khwarizmi a regroupé dans un même ouvrage les différentes techniques de calculs héritées des Grecs et des Babyloniens. Dans ce traité, intitulé *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, il énonce trois règles qui permettent de passer d'une équation à une autre équation plus simple :

- la règle *al jabr* (R1) permet de changer de membre un nombre à soustraire ;
- la règle *al muqqabala* (R2) consiste à supprimer les termes égaux dans chaque membre ;
- la règle *al hatt* (R3) consiste à diviser les deux membres par un même nombre.

1. Voici la résolution d'une équation. Citer les règles utilisées pour passer d'une équation à la suivante :

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x - 5 &= x^2 \\
 x^2 + 4x &= x^2 + 5 \\
 4x &= 5 \\
 x &= 1,25.
 \end{aligned}$$

2. En précisant les règles utilisées, écrire les équations suivantes sous l'une des formes : $ax^2 = c$; $ax^2 = bx$ ou $ax^2 + bx = c$.

- A. $x^2 + 10x - 5 = 10x$;
- B. $x^2 + 2x - 7 = 32 - 8x$;
- C. $2x^2 - 5x = 2x$.

3. Résoudre l'équation suivante en citant toutes les règles utilisées :

$$3x - 5 = 4 - x.$$

Figure 5: *Indice*, 2^{nde} S, Bordas, 2009, p. 106.

Un peu d'histoire. Le mot algorithme vient du nom du mathématicien persan al-Khwarizmi (début du IX^e siècle). Dans un livre, il exposa en effet le premier les méthodes de base de la résolution pas à pas des équations. Cependant, les algorithmes sont plus anciens. Déjà en 1800 avant J.-C., les Mésopotamiens calculaient des valeurs approchées des racines carrées à l'aide d'algorithmes.




Figure 6: *Transmath*, 2^{nde}, Nathan, 2010, p. 10; *Transmath*, 1^{er} S, Nathan, 2011, p. 10.

104 ALGORITHMIQUE

A. Géométriquement

1. Supposons $x > 0$

a. Écrire de deux façons différentes l'aire du grand carré ci-contre.

b. Recopier et compléter :

$$x^2 + 10x = (x+5)^2 - \dots$$

2. a. Vérifier que cette égalité est vraie pour tout x réel.

b. Résoudre $x^2 + 10x = 39$.

B. À la manière d'Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi (IX^e siècle) propose l'équation

« Que le carré et dix racines égalent trente neuf unités » et décrit l'algorithme suivant :

« La règle est que tu divises [le nombre de] racines en deux moitiés, ici on obtient cinq, que tu multiplies par lui-même, on a 25, que tu ajoutes à 39 et on obtient 64. Tu prends la racine qui est 8, tu en retranches la moitié du nombre des racines qui est 5, il en vient 3 qui est la racine du carré que tu cherches, le carré est 9. »

D'après *Éléments d'histoire des mathématiques*, M. Serres

1. Écrire en termes modernes l'équation proposée (aide : les racines désignent le côté du carré).

2. Quelle solution Al-Khwarizmi trouve-t-il ? Comparer avec les solutions trouvées en A.2.b. Comment expliquer la différence ?

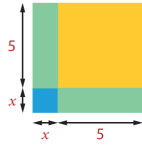


Figure 7: *Maths x*, 1^e S, Didier, 2011, p. 126.

99 La méthode d'al-Khuwārizmī

ALGORITHMIQUE

Pour déterminer une solution positive de l'équation :

$$x^2 + 10x = 96,$$

voici comment procédait al-Khuwārizmī (mathématicien arabe du IX^e siècle) :

Diviser 10 par 2.
Élever ce quotient au carré.
Additionner ce carré à 96.
Prendre la racine carrée de cette somme.
Retrancher à ce résultat le quotient du début.

1. a) Prouvez que l'équation $x^2 + 10x = 96$ équivaut à :
 $(x + 5)^2 = 121.$

b) Déduisez-en que cet algorithme donne bien une solution positive de cette équation.

2. Trouvez en utilisant la même méthode une solution positive de l'équation :
 $x^2 + 8x = 2\,009.$

3. En admettant que ce procédé donne la seule solution positive pour les équations du type $x^2 + bx = c$, où b et c sont deux nombres positifs, complétez cet algorithme qui met en œuvre cette méthode.

Variables
 b, c, s
Algorithme
Saisir b
Saisir c
 s reçoit
Afficher s

83 La méthode d'al-Khuwārizmī

ALGORITHMIQUE

Pour déterminer la solution positive de l'équation :

$$x^2 + 12x = 108,$$

voici comment procédait Al-Khuwārizmī, mathématicien arabe du IX^e siècle (voir page 10).

Diviser 12 par 2.
Élever ce quotient au carré.
Ajouter ce carré à 108.
Prendre la racine carrée de cette somme.
Retrancher à cette racine carrée le quotient du début.

1. a) Vérifiez que l'équation $x^2 + 12x = 108$ admet deux solutions de signes contraires et que l'algorithme proposé donne la solution positive.

b) Utilisez la même méthode pour déterminer la solution positive de l'équation $x^2 + 16x = 80$.

2. a) Prouvez que toute équation du type $x^2 + bx = c$ où $c > 0$ admet deux racines de signes contraires.

Pour cela, étudiez le signe du produit des racines en utilisant le théorème démontré dans l'exercice 87, page 42.

b) Complétez cet algorithme qui donne la racine positive d'une telle équation.

```

1  VARIABLES
2  b EST_DU_TYPE NOMBRE
3  c EST_DU_TYPE NOMBRE
4  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6  LIRE b
7  LIRE c
8  x1 PREND_LA_VALEUR .....
9  AFFICHER x1
10 FIN_ALGORITHME
    
```

Figure 8: *Transmath*, 2^{nde}, Nathan, 2010, p. 86; *Transmath*, 1^{er} S, Nathan, 2011, p. 41.

3 Un ancien algorithme ALGORITHMIQUE HISTOIRE

OBJECTIF Étudier un ancien algorithme de résolution d'une équation de degré 2.

Au début du IX^e siècle, le mathématicien Al-Khwārizmī propose dans son traité *Kitab al-jabr wa-l-muqabalah* différents algorithmes de résolution d'équations de degré 1 ou 2.

1. Pour résoudre l'équation

« Que le carré et dix racines égalent trente neuf unités »

c'est-à-dire, avec notre notation symbolique actuelle,
 $x^2 + 10x = 39$

Al-Khwārizmī donne la règle ci-contre.

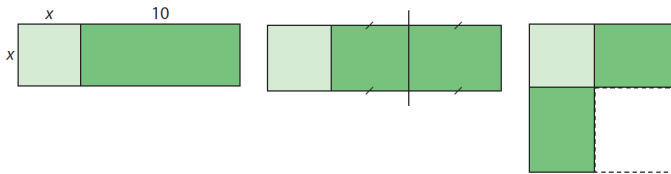
Quelle solution donne cet algorithme ? Vérifier qu'elle est bien solution de l'équation proposée.

2. Une interprétation géométrique

Reproduire à main levée les figures ci-dessous et indiquer les aires des différentes parties afin d'expliquer pourquoi l'algorithme permet bien de trouver une solution de l'équation.

Règle

La règle est que tu divises les racines en deux moitiés, ici on obtient cinq, que tu multiplies par lui-même, on a 25, que tu ajoutes à 39 et on obtient 64. Tu prends la racine qui est 8, tu en retranches la moitié du nombre des racines qui est 5, il en vient 3 qui est la racine du carré que tu cherches, le carré est 9.



3. Appliquer cet algorithme pour résoudre l'équation $x^2 + 8x = 84$.

4. a. Appliquer cet algorithme pour résoudre l'équation $x^2 + ax = b$, où a et b sont deux nombres positifs.

b. Résoudre cette équation avec les outils actuels.

c. Commenter ces résultats.

Point histoire

Au début du IX^e siècle, Al-Khwārizmī, astronome et mathématicien de langue arabe, installé à Bagdad, écrit ce qui est considéré comme le premier traité d'algèbre. Il répond ainsi à une demande du Calife de fournir un ensemble d'outils pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne, par exemple des partages d'héritages. Mais Al-Khwārizmī va plus loin en donnant ces outils selon une construction théorique. Il présente les outils de l'algèbre que sont les nombres, l'inconnue et sa racine, et les équations ; il classifie les équations du 1^{er} et 2nd degré avant d'en donner des algorithmes de résolution qu'il justifie de façon géométrique ; il en donne ensuite des applications. Ces méthodes algébriques se répandront peu à peu en Europe. Elles s'appuient sur deux opérations : « *al-jabr wa-l-muqabalah* ». *Al-jabr* donnera le terme « algèbre » et c'est du nom Al-Khwārizmī que vient celui d'« algorithme ».



Pour en savoir plus

Écouter M. Djebbar à l'adresse : www.math.ens.fr/culturemath/video/Djebbar/index.html

Figure 9: *Maths x*, 1^e S, Didier, 2011, p. 31.