Résoudre des équations du second degré avec al-Khwārizmī[1]

Marc Moyon, IREM de Limoges

Stage "histoire des mathématiques et algorithmique"

[1] À partir de la traduction française réalisée par Roshdi Rashed, 2007, pp. 96–106

Nous reprenons ci-après un extrait du *Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* [Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison] d'al-Khwārizmī (IX^e siècle) qui propose la résolution des équations composées du second degré.

J'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'al-jabr wa-l-muqābala, selon trois modes qui sont : les racines, les carrés, et le nombre simple, qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un carré. La **racine**, parmi ces modes, est toute chose multipliée par elle-même, à partir de l'unité, les nombres qui sont au-dessus d'elle, et les fractions qui sont au-dessous d'elle. Le **carré** est ce qu'on obtient lorsqu'on multiplie la racine par elle-même. Le **nombre simple** est un nombre qu'on exprime sans qu'il soit rapporté ni à une racine, ni à un carré.

[Les équations simples]

Parmi ces trois modes, certains sont égaux aux autres; par exemple lorsqu'on dit : des carrés sont égaux à des racines, des carrés sont égaux à un nombre et des racines sont égales à un nombre.

Les carrés égaux à des racines[2], c'est par exemple lorsque tu dis : un carré est égal à cinq racines[3], la racine du carré est donc cinq et le carré vingt-cinq, égal à cinq racines; et lorsque tu dis : un tiers du carré est égal à quatre racines, le carré tout entier est donc égal à douze racines; c'est cent quarante-quatre, et sa racine est douze; et par exemple lorsque tu dis : cinq carrés sont égaux à dix racines[4], un seul carré est donc égal à deux racines, la racine du carré est deux et le carré est quatre. De même pour les carrés, qu'ils soient nombreux ou moindres [qu'un carré] : on les ramène à un seul carré. On procède de même pour les racines qui leur sont égales : elles seront ramenées à ce à quoi a été ramené le carré.

[2] $x^2 = px$ avec $p \in \mathbb{Q}_+^*$

[3] $x^2 = 5x$

[4] $5x^2 = 10x$

Les carrés égaux à un nombre[5], c'est par exemple lorsque tu dis : un carré est égal à neuf[6]; c'est le carré, et sa racine est trois; et lorsque tu dis : cinq carrés sont égaux à quatre-vingts[7], un seul carré est donc le cinquième de quatre-vingts, c'est-à-dire seize; et lorsque tu dis : la moitié d'un carré est égale à dix-huit[8], le carré est donc égal à trente-six, et sa racine est six. De même pour tous les carrés, ceux qui excèdent [le carré] et ceux qui sont moindres [que lui] sont ramenés à un seul carré. S'ils sont moindres qu'un carré, on les augmente jusqu'à compléter un carré entier. On procède de même pour les nombres qui leur sont égaux

[5] $x^2 = q$ avec $q \in \mathbb{Q}_+^*$

[6] $x^2 = 9$

[7] $5x^2 = 80$

[8] $\frac{1}{2}x^2 = 18$

Les racines égales à un nombre[9], c'est par exemple lorsque tu dis : une racine est égale à trois[10], en nombre; la racine est donc trois, et le carré formé à partir d'elle est neuf; et lorsque tu dis : quatre racines sont égales à vingt[11]; une seule racine est donc égale à cinq, et le carré formé à partir d'elle est vingt-cinq; et lorsque tu dis : la moitié d'une racine est égale à dix[12], la racine est égale à vingt,

[9] $px = q$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

[10] $x = 3$

[11] $4x = 20$

[12] $\frac{1}{2}x = 10$

et le carré formé à partir d'elle est quatre cents.

[Les équations combinées]

J'ai trouvé que ces trois modes – les racines, les carrés et le nombre – se combinent, et on aura les trois genres combinés, qui sont : des carrés plus des racines sont égaux à un nombre, des carrés plus un nombre sont égaux à des racines et des racines plus un nombre sont égaux à des carrés.

Les carrés plus les racines égaux à un nombre[13], c'est par exemple lorsque tu dis : un carré plus dix racines sont égaux à trente-neuf dirhams[14], c'est-à-dire que si on ajoute à un carré quelconque [une quantité] égale à dix racines, le tout sera trente-neuf.

[13] $x^2 + px = q$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

[14] $x^2 + 10x = 39$

Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines; il vient, dans ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même; on a vingt-cinq; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura soixante-quatre; tu prends la racine qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du carré que tu veux, et le carré est neuf.

De même, si on considère deux carrés, ou trois, ou plus, ou moins, ramène-les à un seul carré, et ramène les racines et les nombres qui sont avec eux à ce à quoi tu as ramené le carré. Par exemple lorsque tu dis : deux carrés plus dix racines sont égaux à quarante-huit dirhams[15]; c'est-à-dire que, si on additionne deux carrés quelconques et si on leur ajoute dix fois la racine de l'un d'eux, on parvient à quarante-huit dirhams. Il faut donc ramener les deux carrés à un seul carré; or tu sais qu'un carré par rapport à deux carrés est leur moitié; ainsi ramène toute chose dans le problème à sa moitié. Comme si on avait dit : un carré plus cinq racines sont égaux à vingt-quatre dirhams, c'est-à-dire que, si on ajoute à un carré quelconque cinq de ses racines, on parvient à vingt-quatre.

[15] $2x^2 + 10x = 48$

Partage en deux moitiés le nombre des racines, on aura deux plus un demi; multiplie-le par lui-même, on aura six plus un quart; ajoute-le à vingt-quatre, on a trente dirhams plus un quart; prends sa racine qui est cinq plus un demi; retranches-en la moitié du nombre des racines, qui est deux plus un demi, il reste trois, qui est la racine du carré, et le carré est neuf.

Ou encore si on dit : la moitié d'un carré plus cinq racines sont égaux à vingt-huit dirhams[16], c'est-à-dire que, pour un carré quelconque, si on ajoute à sa moitié cinq fois sa racine, on parvient à vingt-huit dirhams. Tu veux donc compléter ton carré, pour qu'il devienne un carré entier, et ceci en le doublant. Double-le, et double tout ce que tu as de ce qui lui est égal; on aura un carré plus dix de ses racines égaux à cinquante-six dirhams. Partage en deux moitiés le nombre des racines; on a cinq; multiplie-le par lui-même; on a vingt-cinq, que tu ajoutes à cinquante-six; on a quatre-vingt-un. Prends sa racine, qui est neuf, de laquelle tu retranches la moitié du nombre des racines, qui est cinq; il reste quatre, qui est la racine du carré que tu veux. Le carré est seize, et sa moitié est huit.

[16] $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$

Procède de même en tout ce qui se présente, des carrés, des racines et du nombre qui leur est égal. Tu tomberas juste, si Dieu le veut.

Les carrés et le nombre égaux à des racines[17], c'est par exemple lorsque tu dis : un carré et vingt et un dirhams sont égaux à dix racines[18], c'est-à-dire que, si tu ajoutes à un carré quelconque vingt et un dirhams, ce que tu obtiens sera égal à dix racines de ce carré.

[17] $x^2 + q = px$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

[18] $x^2 + 21 = 10x$

Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines; on aura cinq; multiplie-le par lui-même, on aura vingt-cinq, dont tu retranches vingt et un, ce qu'on a dit être avec le carré; il reste quatre; prends sa racine, qui est deux; retranche-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du carré que tu veux. Et le carré est neuf. Si tu veux, ajoute la racine à la moitié du nombre des racines; on aura sept, qui est la racine du carré cherché, et le carré est quarante-neuf. Si tu rencontres un problème qui te mène à cette sorte, vérifie son exactitude, soit en ajoutant, sinon en retranchant nécessairement. Ce procédé se fait à la fois en ajoutant et en retranchant, ce qui ne se fait dans aucune des trois sortes, dans lesquelles on a besoin de partager en deux moitiés le nombre des racines.

Sache que, si tu partages le nombre des racines dans cette sorte en deux moitiés, et que tu multiplies [une moitié] par elle-même de sorte que le produit soit moins que les dirhams qui sont avec les carrés, le problème devient alors impossible; et si le résultat est égal aux dirhams eux-mêmes, la racine du carré est alors égale à la moitié du nombre des racines exactement, sans excédent ni diminution.

Tout ce qui te parvient de deux carrés, ou plus, ou moins, ramène-le à un seul carré, comme nous te l'avons montré dans la première sorte.

Les racines plus le nombre égaux aux carrés[19], c'est par exemple lorsque tu dis : trois racines et quatre en nombre sont égaux à un carré[20].

[19] $px + q = x^2$ avec $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$

[20] $3x + 4 = x^2$

Procédé : partage le nombre des racines en deux moitiés, on a un plus un demi; multiplie-le par lui-même, on a deux plus un quart; ajoute-le à quatre, on a six plus un quart; prends sa racine qui est deux plus un demi, ajoute-la à la moitié du nombre des racines, qui est un plus un demi, on a quatre, qui est la racine du carré, et le carré est seize. Tout ce qui est plus qu'un carré, ou moins, ramène-le à un seul carré.

Ce sont les six modes que j'ai mentionnés dans l'introduction de mon livre que voici; j'ai achevé leur explication, et j'ai affirmé que dans trois de ces modes on ne partage pas en deux moitiés le nombre des racines; j'ai montré leur mode d'inférence et leur nécessité.

Quant aux trois sortes qui restent, dans lesquelles on a besoin de partager en deux moitiés le nombre des racines, je les ai décrites au moyen de procédés véritables, et j'ai façonné pour chacun de ces procédés une figure par laquelle on décèle la cause de cette partition en deux moitiés.

Rashed, Roshdi. *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris : Blanchard, 2007.