Algorithmique et histoire des mathématiques

Introduction historique et géographique :

Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī est né dans les années 780 et mort vers 850 à Bagdad. Mathématicien et astronome, il est actif entre 813 et 833 à la Maison de la Sagesse (*Bayt al-hikma*) sous le règne du calife al-Mamūn.

Ses écrits, rédigés en langue arabe, puis traduits en latin à partir du XIIe siècle, ont permis l'introduction de la numération décimale positionnelle (dit *calcul indien* et aujourd'hui numération indo-arabe) et de l'algèbre en Europe. Mais, attention, il faudra attendre au moins le XIV^{e} siècle pour que la numération indo-arabe soit définitivement adoptée par les mathématiciens (notamment grâce au *Liber abaci* de Léonard de Pise, dit Fibonacci).

Son nom est à l'origine du mot *algorithme* et le titre de l'un de ses ouvrages – livre sur le calcul par la restauration (*al-jabr*) et la comparaison (*al-muqâbala*) – à l'origine du mot *algèbre*.

Vidéo d'Ahmed Djebbar (voyages en mathématiques) https://www.voyage-mathematique.com/exposition/al-kwârizmî/

Timbre émis dans l'ex-Union Soviétique, en 1983, en l'honneur d'al-Khwārizmī.

Textes / lecture :

Al-Khwārizmī estimait que les problèmes mathématiques complexes pouvaient être résolus en étant décomposés en une succession d'étapes : c'est l'algorithmique sans ordinateur.

Chez al-Khwārizmī, les problèmes se ramènent à l'un des six procédés suivants :

- Types simples : type 1 : $x^2 = x$
  type 2 : $x^2 = \mathrm{q}$
  type 3 : $x = \mathrm{q}$
- Types composés : type 4 : $x^2 + \mathrm{p}x = \mathrm{q}$
  type 5 : $x^2 + \mathrm{q} = \mathrm{p}x$
  type 6 : $x^2 = \mathrm{q} + \mathrm{p}x$

Nous allons nous intéresser aux équations de type 4, 5 et 6, sachant que :

- ✧ Les nombres utilisés – coefficient et solution – ne sont que des nombres positifs (entiers et rationnels).
- ✧ Aucune équation n'aura des nombres irrationnels comme coefficient de l'équation (chez al-Khwārizmī), contrairement à quelques équations chez Fibonacci. Mais, on aura des nombres irrationnels comme solution d'équation (mais peu).
- ✧ Chez al-Khwārizmī, aucune équation n'aura 0 comme second membre : 0 n'est pas un nombre !!!
- ✧ Évidemment, pas de nombres décimaux … (ici, problème de l'anachronisme de Scratch avec l'affichage de nombres décimaux ou des valeurs approchées, alors que la calculatrice travaille sous forme de valeur exacte : écriture fractionnaire ou racine carrée).
- ✧ Il n'y a pas de symboles algébriques avant le 12^{e} siècle (en Andalus), donc pas d'équations formelles chez al-Khwārizmī, mais des mathématiques rhétoriques.
- ✧ Les premiers symboles algébriques apparaissent dans un texte latin : fin 13^{e} / début 14^{e} siècle (voir livre M. Moyon 2017).

Nous allons dans un premier temps, passer du texte rhétorique d'al-Khwārizmī à la transcription moderne (calcul littéral), puis dans un second temps, passer à l'algorithmique et à la programmation sous Scratch.

Résoudre des équations du second degré avec al-Khwârizmî :

Voici un extrait du *Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* [Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison] d'al-Khwārizmī (IX^{e} siècle) qui propose la résolution des équations composées du second degré (À partir de la traduction française réalisée par Roshdi Rashed, 2007, p. 96 – 106) :

> *J'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'al-jabr wa-l-muqābala, selon trois modes qui sont : les racines, les carrés, et le nombre simple, qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un carré. La* ***racine****, parmi ces modes, est toute chose multipliée par elle-même, à partir de l'unité, les nombres qui sont au-dessus d'elle, et les fractions qui sont au-dessous d'elle. Le* ***carré*** *est ce qu'on obtient lorsqu'on multiplie la racine par elle-même. Le* ***nombre simple*** *est un nombre qu'on exprime sans qu'il soit rapporté ni à une racine, ni à un carré.*

Voici la discussion des trois modes du nombre dans le *Liber restauracionis* (Livre de la restauration), adaptation latine du 13^{e} siècle de l'algèbre d'al-Khwārizmī. (d'après M. Moyon 2017) :

> *Quant au nombre qui est nécessaire pour notre calcul, il est divisé en trois [modes] : la racine du nombre, le carré ou le bien de la racine et le nombre simple associé ni avec le carré ni avec la racine. Quant à la racine, c'est le nombre qui, multiplié par lui-même, produit l'autre. Quant au bien ou le carré de la racine, c'est le nombre qui est produit à partir de ladite racine multipliée par elle-même. Le nombre simple est ce qui n'est produit par le moyen d'aucun bien ou d'aucune racine.*

Qu'est-ce qu'une racine ? un carré ? et un nombre simple ?

Une racine se dit *shay'* en arabe et sera représentée par un *shin* (première lettre du mot) qui donnera « *x* » (dû à la transcription phonétique de « sh » en langue romane de l'époque, encore aujourd'hui en portugais).

Donc, aujourd'hui,

une racine se traduit par l'inconnue $\boldsymbol{x}$,
un carré par $\boldsymbol{x^2}$,
un nombre simple correspond au terme constant.

Synonymes : dans certaines traductions on pourra trouver « bien » à la place de « carré », « chose » à la place de « racine » et « drachme » à la place de « nombre simple ».
Attention, dans la résolution de problèmes, « bien » est aussi, selon son étymologie, une simple « somme d'argent ».

Éléments de bibliographie :

Ahmed Djebbar (2005) *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*. Paris, Vuibert.

Marc Moyon (2017) La restauration et la comparaison, ou l'art de résoudre des équations quadratiques dans l'Europe latine, *Revue d'histoire des mathématiques*, 23, 233-299.

Roshdi Rashed (2007) *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris, Blanchard.

Algorithmique et histoire des mathématiques – Activité –

Équations de type 4 : Les carrés plus les racines égaux à un nombre :

Les carrés plus les racines égaux à un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis: un carré plus dix racines sont égaux à trente-neuf dirhams, c'est-à-dire que si on ajoute à un carré quelconque [une quantité] égale à dix racines, le tout sera trente-neuf.

Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; il vient, dans ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même ; on a vingt-cinq ; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura soixante-quatre ; tu prends la racine qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du carré que tu veux, et le carré est neuf.

1) Si on note x^2 « les carrés » et x « les racines », écris l'expression littérale qui correspond à l'exemple proposé.

   ....

   ....

2) Écris les calculs correspondants aux 5 étapes données dans le procédé pour résoudre l'équation obtenue.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Vérifie la solution trouvée.
   Tu obtiens un algorithme de résolution pour cette équation.

Vers la généralisation …

3) Et s'il avait dit « *un carré plus sept racines sont égaux à deux-cent-vingt-huit dirhams* » ?

   a) Écris l'expression littérale qui correspond à cette situation.

   ....

   ....

   b) Quelles seraient les 5 étapes données dans le procédé précédent pour résoudre l'équation obtenue ?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Vérifie la solution trouvée.

4) On veut écrire un algorithme permettant de résoudre les équations du type 4 « $x^2 + px = q$ » où p désigne le nombre de racines et q le nombre de dirhams.

   a) Reprends les 5 étapes du procédé précédent en remplaçant le nombre de racines (10) par p et le nombre de dirhams (39) par q.

....

....

....

....

....

   b) En utilisant une variable qui désignera chaque résultat intermédiaire que l'on appellera s et une autre qui désignera le résultat final que l'on appellera r, écris sous forme d'algorithme les 5 étapes obtenues à la question précédente.

....

....

....

....

....

Remarque : on retrouve les strophes générales du *Liber restauracionis* :

Si quelqu'un donne des drachmes égales au bien avec des choses, Carre la moitié des choses. Ajoute le carré aux drachmes. De la racine, soustrais alors la moitié des choses. Et le reste montrera la racine du bien cherché.	*Cum rebus censum si quis dragmis dabit equm Res quadra medias quedratis adice dragmas Radici quorum medias res excipe demum Et residuum quesiti census radicem ostendet.*

Traduction :
Si quelqu'un donne des drachmes égales au bien avec des choses,
Prends le carré de la moitié des choses. Ajoute ce carré aux drachmes.
De la racine du résultat précédent, soustrais alors la moitié des choses.
Et le résultat de la différence montrera la racine du bien cherché.

Programmation avec Scratch :

   a) De combien de variables a-t-on besoin ? Lesquelles ?

....

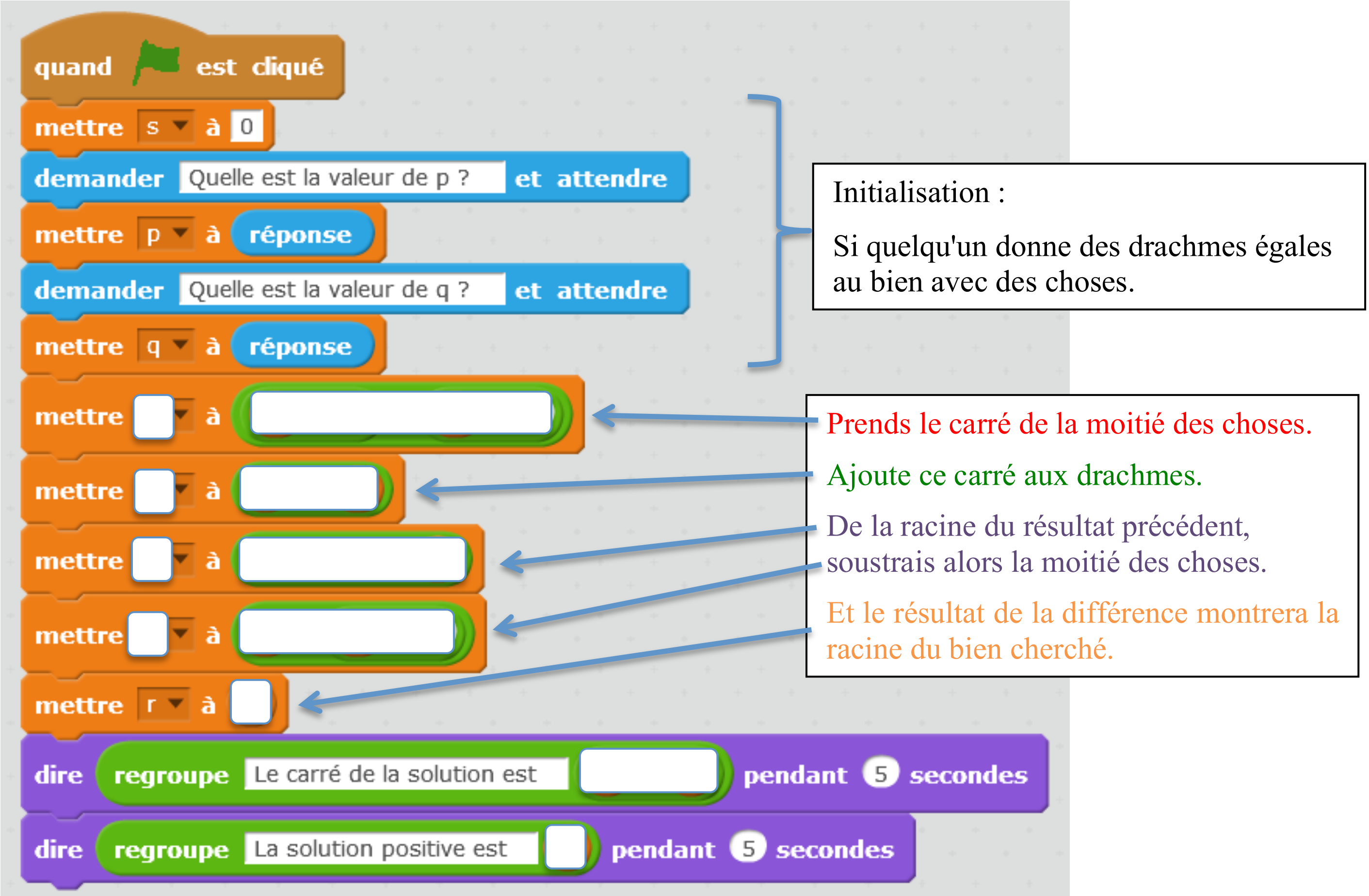
....

....

....

....

   b) Complète le programme suivant.



c) Écris ce programme dans Scratch, puis teste les équations des questions 1 et 3.

Équations de type 5 : Les carrés et le nombre égaux à des racines :

Les carrés et le nombre égaux à des racines, c'est par exemple lorsque tu dis : un carré et vingt et un dirhams sont égaux à dix racines, c'est-à-dire que, si tu ajoutes à un carré quelconque vingt et un dirhams, ce que tu obtiens sera égal à dix racines de ce carré.

Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; on aura cinq ; multiplie-le par lui-même, on aura vingt-cinq, dont tu retranches vingt et un, ce qu'on a dit être avec le carré ; il reste quatre ; prends sa racine, qui est deux ; retranche-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du carré que tu veux. Et le carré est neuf. Si tu veux, ajoute la racine à la moitié du nombre des racines; on aura sept, qui est la racine du carré cherché, et le carré est quarante-neuf. Si tu rencontres un problème qui te mène à cette sorte, vérifie son exactitude, soit en ajoutant, sinon en retranchant nécessairement. Ce procédé se fait à la fois en ajoutant et en retranchant, ce qui ne se fait dans aucune des trois sortes, dans lesquelles on a besoin de partager en deux moitiés le nombre des racines.
Sache que, si tu partages le nombre des racines dans cette sorte en deux moitiés, et que tu multiplies [une moitié] par elle-même de sorte que le produit soit moins que les dirhams qui sont avec les carrés, le problème devient alors impossible; et si le résultat est égal aux dirhams eux-mêmes, la racine du carré est alors égale à la moitié du nombre des racines exactement, sans excédent ni diminution.

Type 5
Si quelqu'un don | A faire | es à des drachmes avec le bien,
Carre la moitié d | é abaisse les drachmes.
Ajoute ou enlève | la moitié des choses.
Et le sortant montrera la racine du bien recherché.

Repartir du texte – même fil qu'avec le type 4.

Initialisation
$p \leftarrow$nb racines/nb de choses
$q \leftarrow$nb de dirhams

$s \leftarrow \frac{p}{2} \times \frac{p}{2}$

Si s < q alors
afficher « Pas de solution »

Si s = q alors
r ← s
afficher r

Si s > q alors
$s \leftarrow s - q$
$s \leftarrow \sqrt{s}$
$r_1 \leftarrow \frac{p}{2} - s$
$r_2 \leftarrow \frac{p}{2} + s$
Afficher r_1 et r_2.

Si quelqu'un donne des choses égales à des drachmes avec le bien,
Carre la moitié des choses. Du carré abaisse les drachmes.
Ajoute ou enlève le côté du reste à la moitié des choses.
Et le sortant montrera la racine du bien recherché.

On peut écrire cela car les « si » s'excluent mutuellement et on a tous les cas possibles.

Algorithmique et histoire des mathématiques – Activité –

Équations de type 6 : Les racines plus le nombre égaux aux carrés :

Les racines plus le nombre égaux aux carrés, c'est par exemple lorsque tu dis : trois racines et quatre en nombre sont égaux à un carré.

Procédé : partage le nombre des racines en deux moitiés, on a un plus un demi ; multiplie-le par lui-même, on a deux plus un quart ; ajoute-le à quatre, on a six plus un quart ; prends sa racine qui est deux plus un demi, ajoute-la à la moitié du nombre des racines, qui est un plus un demi, on a quatre, qui est la racine du carré, et le carré est seize.

En t'aidant de l'Activité 1 (équations de type 4), réponds aux question suivantes :

1) Si on note x^2 « les carrés » et x « les racines », écris l'expression littérale qui correspond à l'exemple proposé.

   ....

   ....

2) Écris les calculs correspondants aux 5 étapes données dans le procédé pour résoudre l'équation obtenue.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Vérifie la solution trouvée.

3) On veut écrire un algorithme permettant de résoudre les équations du type 6 « px + q = x^2 » où p désigne le nombre de racines et q le nombre de dirhams.

   Écris sous forme d'algorithme les 5 étapes données dans cette strophe.

   Si l'on cherche le bien égal à des choses et des drachmes,
   Carre la moitié des choses. Au carré ajoute les drachmes.
   Additionne la racine de ceci et la moitié des racines.
   Et la somme montrera la racine du bien recherché.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

<u>Programmation avec Scratch</u> :

Écris ce programme sous Scratch et teste-le.