$$A=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}\ ;\ B=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+..}}}}}}$$

Fractions

Continues

Samuel ADABIA , Animateur IREM de Limoges
Lycée Notre Dame de la Providence 19200 Ussel

A y réfléchir de près , partout où des hommes et des femmes se sont réunis pour parler de mathématiques, ils ont pris: crayon, stylo, calculatrice scientifique, calculatrice programmable , ordinateur.
Ils ont cherché, décortiqué, trouvé des solutions, élaboré des méthodes. Ils ont aussi très souvent réfuté la solution qu'ils viennent de trouver, et cherché à nouveau .
Mais au fait, pourquoi? Est-ce par simple curiosité? Est-ce pour l'amour de la perfection?

Leur seule motivation ne serait-elle pas de rendre compréhensible la théorie, et de permettre à autrui de mieux la posséder?

C'est cet esprit qui nous a animés lorsque j'ai proposé , à mes collègues:
Chantal FOUREST, Gérard PORNIN, Élisabeth ALOZY , Ghislaine SAGE
Monique JOURDAIN, du groupe ERR << Itinéraires de Découverte>> , de travailler sur les FRACTIONS CONTINUES.
On dit aussi fractions continuées . C'est cette dernière appellation que nous utiliserons par la suite.

Cette activité, riche de thèmes que l'on peut utiliser sur plusieurs niveaux (entre la classe de cinquième de collège et les classes terminales du lycée d'enseignement général ou technologique), met en jeu l'observation puis la conjecture.

Certains vont regretter le manque de démonstration de ces conjectures. Ce n'est pas le but visé.
Mon objectif était avant tout, de proposer une activité qui regroupe les deux parties principales des programmes du Collège et du Lycée à savoir : le numérique et le géométrique.

L'activité comporte huit parties:
Des fiches insérées dans chaque partie devraient permettre d'aborder avec aisance la notion essentielle: les fractions continuées.

Je pense qu'un cours de musique non précédé d'un peu d'histoire n'est pas un véritable cours.
C'est aussi vrai pour les mathématiques où l'on ne peut pas toujours dissocier l'histoire des mathématiques de la théorie ou tout simplement de l' enseignement des mathématiques.
Aussi ai – je jugé utile, avec le consentement de Monique JOURDAIN avec qui j'ai animé les différents ateliers et stages, d'insérer de l'histoire des mathématiques dans les propos.
La première partie est consacrée à l'histoire des mathématiques.

Nous parlerons de l'apport de EUCLIDE et de LEGENDRE aux fractions continuées.
On apprendra que LAGRANGE a beaucoup utilisé les fractions continues afin d'obtenir des approximations de nombres algébriques (voir valeurs approchées).

Il serait intéressant de savoir quand les fractions continuées ont été utilisées pour la première fois. Mes recherches ne m'ont pas permis de répondre avec exactitude à cette question; elles sont toujours en cours.

Les parties 2 et 3 nous amènent progressivement et numériquement vers la notion de fraction continue
De petits exercices d'application doivent permettre une meilleure compréhension.

Les parties 4 à 8 vont permettre:
- de réinvestir de nombreuses notions surtout de géométrie du collège
  somme des angles d'un triangle, triangle isocèle, angles alternes-internes, angles correspondants caractérisation des droites parallèles, propriété d'un parallélogramme, parallélogrammes particuliers : Carré, rectangles, propriété de Thalès,la recherche de pgcd
- et de Lycée
  Homothétie, rotation, triangles semblables, théorème de Thalès.

-d ' utiliser l'algorithme d'Euclide une notion très importante de l'arithmétique.
-d' utiliser un logiciel de construction géométrique: Géoplanw; Géogébra ou un grapheur
-d'utiliser un tableur ou Excel
-De faire de la programmation calculatrice (à partir de la classe de Seconde uniquement)

Les élèves n'étant pas des spécialistes et ne faisant pas que des mathématiques réinvestir de temps en temps n'est pas une mauvaise chose.

Depuis plusieurs années l'enseignement des mathématiques a fait une place importante à l'utilisation des calculatrices programmables à partir du lycée. Nous en avons tenu compte et avons proposé un algorithme puis un programme de recherche, de fractions continuées associées à un réel donné, sur la T.I. 92 et sur Excel.

Ce programme de recherche peut facilement être adapté sur les CASIO, Visual Basic 6, et autres langages de programmation comme le Pascal, Ada, le C, le C++.
Nous espérons que vous trouverez ici matières à réveiller chez vos élèves, la démarche scientifique, l'envie de chercher, l'envie de faire des mathématiques.
Mes vifs remerciements à M NECER, Directeur de l'IREM de Limoges pour tout sans oublier Martine pour ses précieux conseils et services rendus, sa disponibilité.

Cordialement,

Samuel Adabia, animateur à l'I.R.E.M de Limoges

Première Partie : *Histoire des Mathématiques*

Ces quelques notions d'histoire nous ont semblé suffisantes mais le lecteur pourra toujours aller plus loin et nous faire part de ces découvertes.

Fiche Question n°1

En mathématiques vous avez entendu parler de la géométrie. Connaissez-vous d'autres domaines abordés par les mathématiques?

Fiche Question n° 2

Citez le nom de quelques grands mathématiciens. Citez quelques-uns de leurs travaux
(on peut dire aussi leurs œuvres)

Fiche Question n° 3

Citez les différents types de nombres que vous connaissez.

Comment note-t-on leur ensemble? (uniquement à partir de la classe de seconde)

Fiche Question n° 4.

Je vous dis: << effectuer la division de 17 par 5 >> . Ma question vous paraît-elle précise?
Connaissez-vous d'autres types de divisions de nombres?

Fiche Question n° 5

Qu'est-ce qu'un polygone régulier? Citer quelques polygones réguliers.

... de la vie d'Euclide

De quelle origine est le mathématicien Euclide ?

Le mathématicien Euclide (IIIe siècle av. J.-C.) est un mathématicien grec. Il est connu en tant qu ' auteur du plus célèbre ouvrage de l'histoire des mathématiques: **les Éléments** dits les éléments d'Euclide.

Euclide se distingue également en **théorie des nombres**, démontrant notamment que l'ensemble des **nombres premiers** (tout entier naturel supérieur ou égal à 2 ne possédant que deux (2) diviseurs 1 et lui même) **est infini**.

Il serait aussi le premier à pratiquer la division avec reste, appelée aujourd'hui division euclidienne dont nous allons parler par la suite.

Une vie mystérieuse:
Ses nombreux écrits didactiques indiquent qu'il enseigne les mathématiques, mais ses maîtres demeurent inconnus.

Il semblerait qu ' Apollonios de Perga ait longuement étudié avec les disciples d'Euclide à Alexandrie, ce qui laisse à penser qu'Euclide aurait lui-même enseigné dans cette ville d'Égypte hellénisée.

Par ailleurs, si l'on se fie aux dires du philosophe Proclus de Lycie, qui commente le premier livre des Éléments au Ve siècle de notre ère, l'existence d'Euclide serait légèrement antérieure à Archimède et à Ératosthène.

À l'aide de ces maigres indices, on peut proposer une reconstitution plausible mais non prouvée : comme bien d'autres savants, Euclide pourrait avoir été invité à Alexandrie par Ptolémée Ier, lors de l'édification de la célèbre bibliothèque d'Alexandrie.

En quelque sorte, il apparaîtrait comme le fondateur de l'école mathématique d'Alexandrie, préparant ainsi la voie aux travaux d'Archimède.

Le terme **«élément» désigne les résultats fondamentaux acquis en mathématiques, po**uvant correspondre à des solutions effectives de problèmes, généralement géométriques, ou à des théorèmes intervenant ensuite dans d'autres démonstrations plus complexes.

Plutôt que de dresser une simple liste de résultats impliquant un apprentissage fastidieux, Euclide préfère structurer ses propositions en sous-ensembles ayant leur finalité propre.

Par exemple, le livre premier des *Éléments* s'ouvre par la construction d'un triangle équilatéral et s'achève sur le **théorème de Pythagore**.

Dans les livres suivants, les résultats simples de géométrie plane sont présentés, **puis appliqués à la construction des polygones réguliers, notamment le pentagone et le pentadécagone.**

De la même manière, l'exposé de géométrie dans l'espace se termine par la construction des cinq **polyèdres réguliers inscriptibles dans une sphère. Peu d'objets mathém**atiques sont introduits de manière formelle dans les ***Éléments,* excepté le nombre entier et la figure, plane ou s**olide, décrite par ses caractéristiques (sommets, côtés, faces, a**ngles.)**

De nombreux mathématiciens ont travaillé sur les fractions continuées. En voici quelques uns:

Rafaëla Bombelli (vers 1530) a travaillé sur la fraction continue associée à racine carrée de 13; de même que
Pietro Cataldi (1548-1626) a mené des travaux sur la racine carrée de 18.
John Wallis (1616 – 1703) dans son ouvrage Arithmética Infinitoruim en 1655 a donné une valeur à 4/pi sous la forme :

$$\frac{\pi}{2} = 2 \times \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2i+1)^2} \right)$$

C'est cette valeur que Lord William Brouncker (1620-1684) a utilisé pour obtenir le développement en fraction continue de $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

John Wallis a repris les travaux sur les fractions continues qu'il a généralisés.

Christian Huygens (1629-1695) a travaillé sur l'approximation des fractions continues.
Léonard Euler (1707-1783).
et d'autres comme Johan heinrich Lambert (1728-1777) et Joseph Louis Lagrange y ont aussi travaillé

Par ailleurs Euler a donné l'écriture sous forme de fractions continuées de << e-1>> puis a montré que e et e^2 sont des irrationnels.

Deuxième Partie : Les Irrationnels

Définition 1 :

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux nombres entiers naturels ou relatifs, le b étant non nul.
Comme exemple citons : 2 car $2 = \frac{2}{1}$; -5 car $-5 = \frac{-5}{1}$; $\frac{7}{4}$.

Définition 2:

Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel. (Au niveau où l'on se situe cette définition me paraît suffisante. Les nombres complexes, ou abdiques (voir conférence de M. NECER à Tulle n'interviennent pas ici)

Par exemple on admettra que $\sqrt{2}$; π , e sont des nombres irrationnels.

Un thème d'étude proposé dans << Point math 2nde, édition avril 2000 >> intitulé des nombres et des figures au paragraphe E page 370 et 374 me paraît très intéressant.

Troisième Partie:

Fiche Question n° 6 :

Soit (E) l'équation 2x+3=0. Parmi les nombres suivants indiquer celui qui est solution. En existe-t-il d'autre(s)? -1; 3 ; -1,5 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{-3}{2}$.

Fiche Question n°7

Soit (E1) l'équation ax^2+bx+c =0. Soit x_0 un nombre. Exprimer le fait que x_0 est solution de (E1). (que signifie x_0 est solution de (E1)) . La réponse doit être exprimée en toute lettre.

Fiche Question n° 8 (à partir de la classe de 3ème)

Soit $A=x^2-4x+3$ *Indiquer parmi les nombres ci après ceux qui sont solutions de l'équation* $A=0.;-1;\ 2;\ 1;\ 3;\ 4;\ -3\ ;-4$

$$Soit\ \ A = x^2 - 4x + 3\ \ Montrer\ que\ x_0 = 2 + \sqrt{2}\ \ est\ \ solution\ \ de\ l'\ équation\ \ A = 1$$

Fiche Question n° 9

$$On\ considère\ \ A = x^2 - x - 1\ \ et\ on\ se\ \ propose\ de\ trouver\ \ la\ solution\ \ positive\ de\ \ l'\ èquation\ \ A = 0.$$

Réponse:

0 n'est pas solution de l'équation A=0. Sinon en remplaçant x par 0 dans A on obtiendrait 0. Or ici on obtient -1 qui est différent de 0. (On introduit sans l'expliciter le raisonnement par l'absurde)

Donc comme x est différent de zéro et que A=0 on peut écrire que $x^2 - x - 1 = 0\ \ puis\ que\ \ x^2 = x + 1$ (cette façon de procéder n'est nullement conventionnelle mais est juste).

Et en suite on peut remarquer que $x = \frac{x+1}{x}$ puis que $x = 1 + \frac{1}{x}$ et en remplaçant x par << sa valeur >> dans l'expression de droite on obtient :

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$$

puis que

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}$$

et ainsi de suite nous pouvons remplacer le << x>> de l'expression de droite par << la valeur de x >> .

Nous obtenons une fraction à étages qui est solution de l'équation (E1).

Reste à montrer que cette solution est positive et qu'elle est la seule et dès lors nous parlerons de la solution positive de l'équation (E1)

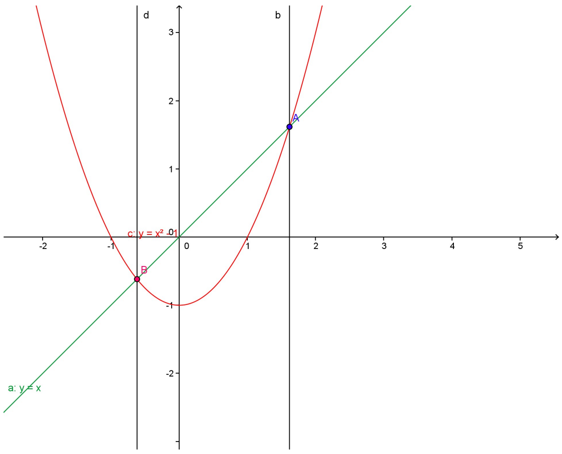
Nous avons vu que x ne peut être nul donc positive doit être entendu au sens strict.

On sait que $x = x^2 - 1$ (E1')

On admettra alors que les solutions de l' équation (E1') sont aussi solutions du système suivant

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

Et les T.I.C.E nous permettent d'avoir le graphique(construction avec geogebra) suivant :



Il est alors évident du moins visuellement qu'il y a bien deux solutions l'une négative et l'autre positive. Ce graphique permet de constater que la solution **positive est strictement supérieure à 1,5.**

Remarque importante : Les différentes formes de x font constater que la solution positive de l'équation(E1) peut s'écrire sous la

$x = 1 + a$, où a est une fraction à << étages>>.

Par définition ,

on appelle fraction continue ou fraction continuée toute expression de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots}}}}$$

où les $a_{i,\, i=0,\dots,n}$ sont des entiers naturels non nuls.

Ainsi le x_0 , solution de l'équation (E1), est bien une fraction continuée avec les

$$a_{i,\, i=0,\dots,n-1} = 1 \; et \; a_n = x$$

<u>Exercice:</u> Donner un exemple de fraction continuée

<u>Fiche Question n° 10</u> :

Déterminer graphiquement (on peut aussi utiliser une calculatrice graphique ou bien un logiciel grapheur)les solutions de l'équation *f(x)=g(x)* où $f(x)=x^2$ et $g(x)=3x+1$

Montrer que la solution positive est une fraction continuée à préciser.

<u>Fiche Question n° 11</u> :
Soit a un nombre non nul. Donner la définition de l'inverse de ce nombre. Donner deux exemples.

<u>Fiche Question n° 12</u> :
Écrire les deux nombres suivants $\frac{17}{7}$ et $\frac{77}{36}$ sous la forme d'une fraction à étages. Ces fractions à étages sont elles des fractions continues ? Si oui sont elles finies ou non.

Conclusion :

A travers ces différents exercices nous pouvons dire (à ce niveau) qu'il y a deux types de nombres (les rationnels et les irrationnels) et deux sortes de fractions continues (celles dont l'écriture est finie et celles dont l'écriture n'est pas finie).

Peut-on associer d'une manière ou d'une autre ces deux paires de notions? En plus clair en observant l'écriture d'une fraction continue serions nous capables de dire si le nombre est un rationnel ou bien un irrationnel ou encore mieux ni l'un ni l'autre?

Soit x un nombre; pour savoir s'il est rationnel ou irrationnel l'une des méthodes couramment utilisée est d'écrire son développement décimal.
Si ce développement décimal est limité ou périodique à partir d'un certain rang alors ce nombre est rationnel

soit les nombres $A=\frac{10}{36}$ *et* $B=\frac{10}{54}$ on a le développement décimal

pour A 0,27777777777777777777777777777777777777777777777

et pour B 0,1851 1851 1851 1851 1851 1851 1851 1851 1851 1851 1851

Dans le cas contraire , le nombre en question n'est pas rationnel il est donc irrationnel.

$$\textit{Considérons les deux nombres } a=\sqrt{2} \textit{ et } b=\frac{13}{11}$$

Nous savons que a est un irrationnel et que b est un rationnel. On se propose de les écrire si cela est possible sous la forme d'une fraction continuée et après observation de conjecturer.

$$\frac{13}{11}=\frac{11+2}{11}=1+\frac{2}{11}=1+\frac{1}{\frac{11}{2}}=1+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}$$

Le nombre b est écrite sous la forme d'une fraction continuée et cette fraction est finie.
Ici nous allons vraiment <<tordre le cou>> aux idées établies par exemple il faut jamais laisser un radical au dénominateur
Une vieille technique << ajouter retrancher>> permet de remarquer que

$$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1 \; et\; que\; \sqrt{2}-1=(\sqrt{2}-1)\frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$$

(On pourra profiter cette écriture pour re activer la notion de Conjugués)

ainsi nous avons ,après avoir effectué le numérateur

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=¿$$

puis on recommence en remplaçant $\sqrt{2}$ par sa valeur et ainsi de suite et en effectuant un minimum de calcul nous obtenons la fraction continuée associée au nombre a

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}}}}}}}$$

Conclusion : La fraction continuée associée au nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est infinie.

Fiche Question n° 13:

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 2.

1) construire à la règle et au compas le nombre $\sqrt{p}$

2) Écrire $\sqrt{p}$ sous la forme d'une fraction continue

Division Euclidienne dans IN

Remarque :

Dans les programmes actuels de collège, IN l'ensemble des entiers naturels n'est plus étudié. Il l'est par contre à partir de la classe de seconde. Mais souvent nous avons évoqué en << usant d'artifices >> les entiers naturels dans les classes de collèges.

Fiche Question n° 14:

Parmi les divisions suivantes indiquer celle qui traduit la division euclidienne de 39 par 4. Puis expliquer pourquoi.

39	4	39	4	39	4
3	9	7	8	0	9,75

Objectif abordé facilement le pgcd.

Définition:

Étant donnés deux entiers naturels a et b avec b>0 , effectuer la division euclidienne de a par b c'est déterminer deux entiers naturels q et r tels que $a = b \times q + r \quad avec \ 0 \leqslant r \leqslant b$

Fiche Question n° 15: Effectuer la division euclidienne 24 par 9.
Utilisation de la calculatrice:

En collège		
Chez Casio	Int	
Chez T.I.	Existe sur la T.I. 40	24 ⊢ 9 Enter et on obtient 2 6
		Q r

En Lycée		
Chez Casio	Int:	
Chez T.I.	mod (a,b) reste int(a/b) quotient	2 6

		Q r

Le nouveau programme de Seconde (à partir de septembre 2009) insiste beaucoup sur l'utilisation d'une calculatrice programmable

Un algorithme* de recherche du quotient q et du reste r dans la division euclidienne de a par b.

Soit a et b deux entiers naturels avec b > 0 Nous savons et nous l'admettons qu'il existe un couple unique d'entiers q et r tels que . $a=q\times b+r \quad avec \quad 0\leqslant r<b$

$$Si \quad a<b \quad alors \quad a=0\times b+a \quad ce\ qui\ donne\ un\ couple\ unique\ avec\ q=0\ et\ r=a$$

$$Si\ a>b \quad a=q\times b+r \quad et\ donc \quad r=a-q\times b$$

Problème comment obtenir q et r ?

Notons q(a,b) le quotient de a par b et r(a,b) le reste de la division de a par b.

$$Si\ a<b \quad alors \quad q(a,b)=0\ et \quad r(a,b)=a$$

$$Si \quad a>b \quad alors \quad q(a,b)=q(a-b,b)+1 \quad et \quad r(a,b)=r(a-b,b)$$

Fiche Question n° 16:

Soit a=15 et b=7. Déterminons le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b.

Réponse:

q(15,7)=q(15-7,7)+1=q(8,7)+1=1+1=2.

r(15,7)=r(15-7,7)=r(8,7)=1.

Fiche Question n° 17:

Déterminer avec la méthode ci-dessus le reste et le quotient dans la division euclidienne de a par b.
a=13 ; b=5

Fiche Question n° 18:
Déterminer avec la méthode ci-dessus le reste et le quotient dans la division euclidienne de
135 par 105

Fiche Question n° 19 : Trouver le pgcd de 135 et 105.

Nous avons trouvé comme quotients successifs lors de la recherche du pgcd de 135 et 105 les chiffres

1 3 2 . A quoi peuvent -ils servir ?

Dans la recherche du pgcd de deux nombres a et b il est utile de disposer les opérations comme dans le tableau ci-dessus

Quotients successifs	**1**	**3**	**2**
a=135	**b=105**	**30**	**15**
Restes 30	**15**	**0**	

En formant la fraction $\frac{a}{b}$ et en utilisant les quotients successifs obtenus lors de la recherche du pgcd de a et b ,je peux écrire que

$$\frac{a}{b}=q1+\frac{1}{q2+\frac{1}{q3+\dots}}$$

où les $q_{i,i=1,\dots,n}$ *sont les quotients successifs dans l'ordre*

Avec notre exemple Fiche Question n° 20 on a : $\frac{135}{105}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}$

Cette méthode nous permet de développer en fraction continue un nombre a donné. En plus clair étant donné un nombre a on peut <<en général >> l'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ puis on cherche le pgcd de a et b et l'on <<récupère>> les quotients pour écrire $\frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction continue.

Fiche Question n° 20: Écrire le développement en fraction continue de $\frac{4505}{1054}$

On commence par chercher le pgcd de 4505 et 1054.

Première méthode :

$$4505 = 4 \times 1054 + 289 \quad \textit{puis que} \quad 1054 = 3 \times 289 + 187$$
$$\textit{que} \quad 289 = 1 \times 187 + 102 \quad \textit{et} \; 187 = 1 \times 102 + 85$$

et pour finir

$$102 = 1 \times 85 + 17 \quad \textit{et} \quad 85 = 5 \times 17 + 0$$

Deuxième méthode :

Quotients	**4**	**3**	**1**	**1**	**1**	**5**
4505	**1054**	**289**	**187**	**102**	**85**	**17**
Restes	**289**	**187**	**102**	**85**	**17**	**0**

et nous l'avons compris le pgcd de 4505 et 1054 est 17. Mais ce qui nous intéresse ici ce sont les quotients successifs et l'ordre dans lequel ils ont été obtenus : 4 3 1 1 1 5 et on peut affirmer avec certitude que le développement en fraction continuée de $\frac{4505}{1054}$ est $4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}$

On peut aussi écrire le développement en fraction continuée de $\frac{4505}{1054}$ en écrivant que

$$\frac{4505}{1054} = 4 + \frac{289}{1054} \quad \textit{puis que} \quad \frac{289}{1054} = \frac{1}{\frac{1054}{289}}$$

ensuite que

$$\frac{1054}{289} = 3 + \frac{187}{289}\,; \quad \frac{289}{187} = 1 + \frac{102}{187}$$

$$\frac{187}{102} = 1 + \frac{85}{102} \quad ; \frac{102}{85} = 1 + \frac{17}{85}$$

$$\frac{85}{17} = 5$$

puis en remontant on obtient bien

$$\frac{4505}{1054} = 4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}$$

Fiche Question n° 21: Écrire la fraction continuée associée à :

$$A=\frac{225}{157} \quad B=\frac{252}{157} \quad C=\frac{944}{423} \quad D=\frac{230}{81}$$

Étant donné un réel comment trouvez son développement en fraction continue?

Prenons le célèbre nombre pi. Bien sûr nous connaissons des valeurs approchées de pi soit 3,141592654 associons une fraction continue à ce nombre que l'on considèrera comme la valeur de pi

$$3{,}141592654=\frac{3141592654}{1000000000}$$

cherchons le pgcd de 3141592654 et 1000000000
et donc pi =

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{291+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{75+\ldots}}}}}}$$

La valeur de l'euro (monnaie de l'union européenne depuis 2002) est : 1 €= 6,55957 FF
De la même manière que pour pi associons le nombre décimal $\frac{655957}{100000}$ et cherchons le développement en fraction continue associée à ce nombre. On a

$$1\,€=6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+..}}}}}}}}}}$$

Un constat : Lorsque les deux nombres deviennent importants les calculs sont fastidieux et risquent de décourager bon nombre de personnes. Et c'est là que la calculatrice programmable peut intervenir ou bien tout programme. Je me permets de donner ce conseil : Avant de programmer dans n'importe quel language (pascal, Ada, C , C++ ,...) il est indispensable de passer par l'algorithmique(c'est à dire de bien écrire les différentes étapes envisager les différents cas)

Voici un programme que j'ai écrit sur la TI 92 adaptable sur toute machine.

Fractions continues et approximations

Fiche Question n° 21:

Soit les fractions $A=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}$ $B1=\dfrac{1}{2-\dfrac{3}{4}}$ $B2=\dfrac{1}{2-\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{6}}}$ $B=\dfrac{1}{2-\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{6-\dfrac{7}{8}}}}$

Sans effectuer les calculs ordonner B1 ,B2 et B.
Calculer A,B1,B2 et B. Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.
Donner l'écriture scientifique de B.

Fiche Question n° 22 : Calculer (résultats sous forme de fractions irréductibles) puis interpréter les résultats:

$$A=6+\frac{1}{1} \quad B=6+\frac{1}{1+\frac{1}{1}} \quad C=6+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

$$D=6+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}}$$

Les nombres A ,B,C et D sont extraits de la fraction continue associée à la valeur de 1 euros. Les calculs ont donné :

$$A=\frac{7}{1}\ ;\ B=\frac{13}{2}\ ;\ C=\frac{46}{7}\ ;\ D=\frac{20}{3}$$

ces résultats peuvent être interprétés comme suit :

rang	**Résultat du Calcul**	**Valeur approchée**	**Valeur réelle**	**erreur**
1	$A=\frac{7}{1}$	1 euro équivaut à environ 7 FF	**1€=6,55957 FF**	**0,4404300000**
2	$B=\frac{13}{2}$	2 euros équivalent à 13 FF	**2€=13,11914 FF**	**0,1191400000**
3	$C=\frac{20}{3}$	3 euros équivalent à 20 FF	**3€=19,67871 FF**	**0,3212900000**

4	$D = \frac{46}{7}$	7 euros équivalent à 46 FF	**7€=45,91699 FF**	**0,0830100000**

On peut poursuivre le raisonnement et observer que les valeurs de rang impair fournissent des valeurs approchées par excès alors que celles de rang pair donnent des valeurs approchées par défaut.

Cette conjecture que nous allons essayer de démontrer en utilisant des suites.

Du point de vue géométrique

Quatrième Partie : Étude du rapport $\frac{AB}{BC}$ de deux longueurs AB et BC (AB > BC)

Objectif : **Écrire la fraction continue finie ou non associée à** $\frac{AB}{BC}$

Fiche Question 15 Qu'est-ce qu'un rectangle?

Fiche Question 16
Quelle est la nature du triangle formé par deux côtés consécutifs d' un rectangle et une diagonale *?

Fiche question n°17
Calculer la mesure de la longueur des diagonales de ce rectangle. (Réponse Rédigée.)

Construire ce rectangle à la règle et au compas.

Fiche n°18 Indiquer les propriétés d'un carré.

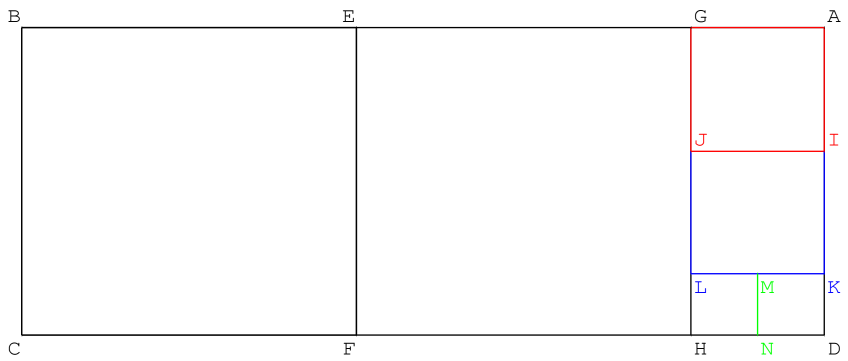
A Cas du rectangle

Soit un rectangle de longueur 12 cm et de largeur 5 cm.

1) Découpez ce rectangle en autant de carrés qu'il est possible.
(On pourra chercher combien le plus grand segment contient le plus petit?)

2) Combien obtient-on de carrés ?

Réponse :



Il y a 2 carrés de cotés 5 cm
2 carrés de côtés 2 cm.
et 2 carrés de cotés 1 cm

Le segment [AB] contient 2 fois le segment [AD] et il reste un bout de longueur non nulle.

$$\frac{12}{5}=2 f \frac{2}{5}$$

Le segment [AD] contient 2 fois le segment [AI]et il reste un bout de longueur non nulle

$$\frac{5}{2}=2 f \frac{1}{2}$$

On peut donc remarquer que

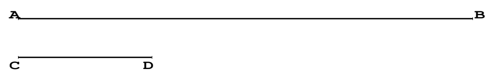
$$\frac{12}{5}=2 f \frac{1}{\frac{5}{2}}=2 f \frac{1}{2 f \frac{1}{2}}$$

Le segment [LK] contient exactement 2 fois le segment [LM].

On peut donc écrire que $\frac{5}{2}=2 f \frac{1}{2}$

$$\frac{12}{5}=2 f \frac{1}{\frac{5}{2}}=2 f \frac{1}{2 f \frac{1}{1 f 1}}$$

Remarque la fraction 12/5 est écrite sous la forme d'une fraction continue finie.



B- cas de deux segments

Cas n°1
Soit [AB] et [CD] deux segments de longueur AB= 17 cm et CD= 5 cm .

1)Combien de fois le segment [AB] contient-il exactement le segment [CD] ? Soit a1 ce nombre.

Réponse

Le segment [AB] contient exactement 3 fois le segment [CD] et il reste << un morceau>>

2) Combien de fois le segment [CD] contient-il exactement le segment [GB] ?

On peut donc écrire que $\frac{17}{5}=3 f \frac{2}{5}$

$$Ainsi \quad \frac{17}{5}=3 f \frac{2}{5}=3 f \frac{1}{\frac{5}{2}}=3 f \frac{1}{2 f \frac{1}{2}}$$

Réponse:
Le segment [CD] contient exactement 2 fois le segment [GB] et il reste << un bout>>

<u>Cas n° 2:</u> Ici on donne deux segments [AB] et [BC] dont on ne donne pas les mesures. Prendre AC la diagonale d'un carré de coté BC

Soit les deux segments ci-contre reprendre les questions du cas n°1 ci-dessus.

Que pouvez-vous dire des fractions continues obtenues dans ces deux cas ?

Que pouvez- vous dire du nombre AC/BC dans chaque cas ?

Réponse :

Des deux rela

$S_1=a_1\times S_2 f S_3$

Nous po

$\frac{S_1}{\ }=\frac{a_1\times S_2 f S_3}{\ }=a$

Cas général :

Rappel : Il était question d'écrire la fraction à étages ou continue associée à AB/CD.

Considérons deux segments [AB] et [CD] de longueurs respectives AB , CD.

Combien de fois le segment [AB] contient-il exactement le segment [CD] ? a_1

On pose $S_1 = AB$ *et* $S_2 = CD$*. Nous avons* $S_3 = S_1 \quad a_1 \times S_2$

Combien de fois le segment [CD] contient il exactement le segment de longueur S_3

$S_4 = S_2 \quad a_2 \times S_3$ *et ainsi de suite*

Remarque :

En réalité nous venons d'appliquer l'algorithme d'Euclide . D'où l'histoire des mathématiques du début de propos. Nous avons retenu les quotients soit les ai

	a1	a2	a3	…	…	an-1	
S1	S2	S3	S4			Sn-1	
S3	S4	S5			Sn		

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{S_{n+1}}{S_n}}}}} \quad \text{tant que } S_{n+1} \neq 0 .$$

Lorsque S_{n+1} n'est jamais égal à 0

on dit que la fraction ( ) est une fraction continue

Par convention on la note [a1; a2, a3, a4, a5,…] (1).

On appellera ORDRE d'une fraction le nombre de ai obtenus lors de sa décomposition. (cette définition reste à travailler puis à homologuer ! Elle me paraît pratique et permet de fournir un programme simple des que l'on a (1)).

<u>Remarque</u> : Le nombre entier de parts est toujours suivi d'un << ;>>

Cette notation serait une notation américaine et donc qu'il en existe une française présentée comme suit :

Méthode Pratique :

Soit A une fraction on écrit que $A = A_1 = a_1 + ?_1$,

a_1 entier et $0 \le ?_1 < 1$.

Si $?_1 \neq 0$ poser $A_2 = \frac{1}{?_1}$ alors $A_2 > 1$ et $A_2 = a_2 + ?_2$

et ainsi de suite tant que $?_i \neq 0$.

$$A = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{\dots}}}}}$$

On obtient

Remarque : Si a/b (a/b fraction irréductible) est rationnel alors l'algorithme d'Euclide se termine au bout d' au plus b opérations.

Cinquième partie:

A partir de deux segments de mesures différentes et par comparaison retrouver leurs mesures.

Soit deux segments [AB] et [CD] de mesures respectives AB et CD.

Le but de l'activité est de retrouver la mesure de chaque segment puis de vérifier en mesurant.

1)Ecrire sous forme de fraction continue ou continuée le nombre AB/CD. **
2)A l'aide de votre calculatrice retrouver la fraction a/b (AB/CD)
3) Retrouver la mesure de AB puis celle de CD. .
4)Vérifier en mesurant les deux segments [AB] [CD].(Une erreur au dixième est acceptée !)

Dans les deux séries que vous venez d'étudier indiquer si le nombre AB/CD est rationnel ou non .

–

Sixième Partie: **Etude du rapport << diagonale/côté>> d' un pentagone régulier**

1) Construire un pentagone régulier de côtés AB, BC,CD,DE,EA.

> **Il est recommandé de laisser un temps de recherche aux élèves et surtout sans consignes particulières.**

Réinvestissement après quelques minutes laissées aux élèves pour faire le pentagone.

a)Qui a déjà entendu parler d'un pentagone ? (les élèves lèvent juste la main sans dire ce que c'est)
b)Qu'est-ce qu'un pentagone ? (on fera préciser les réponses.)
c)Comment construit-on un pentagone ? (il y a plusieurs façons !)

Première façon :

Fiche n°
Une autre façon de construire un pentagone régulier en réinvestissant la symétrie axiale à partir de la classe de cinquième.

1) Tracer deux droites d1 et d2 sécantes en O et formant un angle de 36°. Sur la droite d1 prendre un point A. Construire le cercle de centre O et de rayon OA.
2) Construire le point B symétrique de A par la symétrie axiale d'axe d2.
3) Pourquoi B est-il sur le cercle ?
4) Quelle est la nature du triangle OAB ?
5) Construire le point E symétrique de B par la symétrie axiale d'axe d1.
6) Construire le point C symétrique de E par la symétrie axiale d'axe d2.
7) Construire le point D symétrique de C par la symétrie axiale d'axe d1.
8) Construire le point F symétrique de D par la symétrie axiale d'axe d2. Que remarque-t-on ? Si l'on continue ainsi que se passera-t-il ?

Construire la figure ABCDE. Quelle est sa nature ? Justifier la réponse.

Deuxième Méthode :

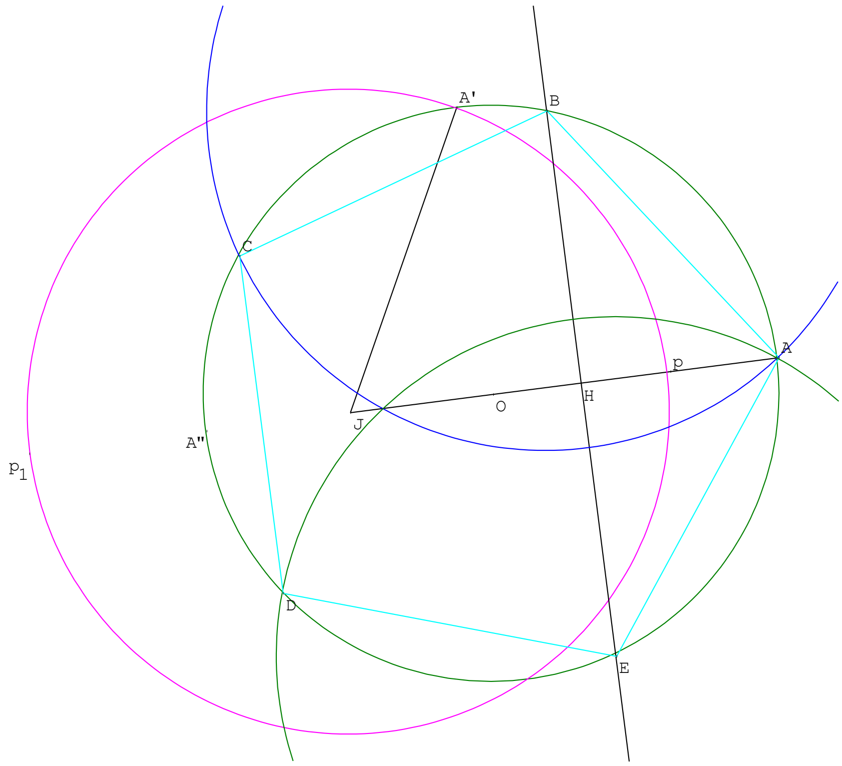
> **En cinquième l'utilisation du rapporteur est un bon exercice . Et les élèves n'ont pas beaucoup d'occasion de mettre en pratique cette utilisation. Dans un premier temps certain feront un tour complet mais << il en restera encore ! >>**

1)Tracer un cercle de centre O et de rayon 5 cm par exemple.
2)Tracer un rayon de cercle on peut l'appeler OA.
3)Placer sur ce cercle les points B C D et E tels que AOB =BOC=COD=DOE=EOA=72°.
4)Construire le pentagone ABCDE.

Troisième Méthode:

Ces trois méthodes peuvent faire l'objet de séances de TICE. On pourra utiliser un logiciel de construction géométrique comme Cabri ou GéoplanW.

Voici ce que l'on peut obtenir avec le logiciel de géométrie : Géoplanw



Fiche n° 11
Écrire le nombre 180 sous la forme d'un produit de deux nombres.

Fiche question n°12:
montrer que chaque diagonale est parallèle au côté qui ne lui est pas adjacent. (Faire chercher un axe de symétrie ?)

Fiche Question n°13

On peut aussi faire montrer que le quadrilatère EAFD est un parallélogramme.

ABCDE est un pentagone régulier.
Les droites (AB) et (CD) se coupent en un point O. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en F.

Que représente $\frac{AD}{BC}$ *? En déduire que* $\frac{S_1}{S_2} = 1 f \cfrac{1}{1 f \cfrac{1}{1 f \cfrac{1}{\dots}}}$

$\frac{S_1}{S_2}$ *est il rationnel ? Posons* $? = \frac{AC}{EB} = \frac{AD}{BC}$.

Montrer que $? = 1 f \frac{1}{?}$ *puis que* $? = \frac{1 f \sqrt{5}}{2}$.

FC BC

de centre O qui transforme le point b en A. Quelle est l'image de F ? de C?

Septième Partie : Avec un carré

Construire un carré ABCD << direct>> (à la règle non graduée et au compas)

Le demi-cercle de centre A et de rayon AD et passant par le point D coupe [CA) en E [AC] et F.

On pose $S_1 = CF$; $S_2 = CD$; $S_3 =$ CE .

Etudier $\frac{CF}{CD}$

Montrer que $S_1 = 2 \times S_2 f S_3$.

Calculer les a_i $1 d a_i d n$. Quel est le réel approché ?

Huitième Partie : avec un triangle équilatéral.

Construire un triangle équilatéral ABC. E est un point à l'intérieur de du triangle ABC.
D est un point de [CB] tel que DF=DB=DC et (CE)//(DH)//(BF).

$$\textit{Quelle est la valeur du rapport } \frac{AF}{AB} \ ?$$

$$\textit{On pose } S_1 = AF; \quad S_2 = AB; \quad S_3 = AE; \quad S_4 = AG$$

$$\textit{Montrer que } S_1 = S_2 f \ S_3 \, et S_2 = 2 \times S_3 f \ S_4$$

3

¿

¿

¿

¿

¿

Montrer que $\frac{AE}{AG} = \frac{AF}{AB}$ *puis déterminerlesa" rSub* { size 8{ *i* }} 1 <= i <= n { } # ital *Montrerquecesquotientstendentvers" sqrt* ¿

¿

¿

¿

¿