satisfaire à cette condition : les questions suivantes sont propres à le faire connoître.

Question première. *On demande en combien de manières on peut payer 542 livres, en donnant des pièces de 17 liv. & recevant en échange des pièces de 11 livres.*

Représentons par x le nombre des pièces de 17 liv., & par y celui des pièces de 11 liv.; en donnant x pièces de 17 liv. on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pièces de 11 liv. on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x - 11y$; & puisqu'on veut payer 542 liv. on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de y, c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coëfficient, & nous aurons $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation; mais comme la question exige que x & y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x - 542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x - 3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier; on aura $\frac{6x - 3}{11} = u$, & par conséquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u + 3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; il faut donc que $\frac{5u + 3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier ; on aura

$\frac{5u+3}{6} = t$, & par conséquent $5u + 3 = 6t$ & $u = \frac{6t-3}{5} = t + \frac{t-3}{5}$; il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura $\frac{t-3}{5} = s$, & par conséquent $t = 5s + 3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y : puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$; en mettant pour t sa valeur $5s + 3$, on aura $u = \frac{30s + 18 - 3}{5} = 6s + 3$: & puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x = \frac{66s + 33 + 3}{6} = 11s + 6$: enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x - 542}{11}$, en substituant pour x sa valeur, on aura $y = \frac{187s + 102 - 542}{11} = 17s - 40$; ainsi les valeurs correspondantes de x & de y sont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3; en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire, plus grand que 2.

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini : ainsi posant successivement $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, &c., on aura les valeurs correspondantes de x & de y comme il suit :

$$\begin{array}{llll} x = 39 & \ldots & y = 11 \\ = 50 & & = 28 \\ = 61 & & = 45 \\ = 72 & & = 62 \\ = 83, \text{ \&c.} & & = 79 \end{array}$$

Dont chacune est telle qu'en donnant le nombre de pièces de 17 liv. désigné par x, & recevant le nombre correspondant de pièces de 11 liv. désigné par y, on paiera 542 livres.

Question seconde. *Faire 741 liv. en 41 pièces de trois espèces ; savoir, de 24 liv., de 19 liv. & de 10 livres.*

Soient x, y & z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces ; puisqu'on veut en tout 41 pièces, on aura, 1°. $x + y + z = 41$.

2°. Chaque pièce de la première espèce valant 24 liv., le nombre x de pièces vaudra x fois 24 liv. ou $24x$; par la même raison y pièces de la seconde espèce vaudront $19y$, & z pièces de la troisiéme espèce vaudront $10z$; ainsi les valeurs réunies des trois nombres de pièces différentes, monteront à $24x + 19y + 10z$; & comme elles doivent monter à 741 livres, on aura $24x + 19y + 10z = 741$.

Je prends, dans chacune de ces équations, la valeur d'une même inconnue, peu importe laquelle ; de x, par exemple, & j'ai $x = 41 - y - z$, & $x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; j'égale ces deux valeurs, & j'ai $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$, ou chassant le dénominateur, $984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z$; transposant & réduisant, on a $243 = 5y + 14z$.

Je prends maintenant la valeur de y qui a le plus petit coëfficient, & j'ai $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$, or y & z devant être des nombres entiers, il faut que $\frac{3 - 4z}{5}$ soit un nombre entier: soit donc t ce nombre entier; on aura $\frac{3 - 4z}{5} = t$, ou $3 - 4z = 5t$; donc $z = \frac{3 - 5t}{4} = - t + \frac{3 - t}{4}$; il faut donc que $\frac{3 - t}{4}$ soit un nombre entier: soit u ce nombre; on aura $\frac{3 - t}{4} = u$, ou $3 - t = 4u$, & par conséquent $t = 3 - 4u$.

Remontons maintenant aux valeurs de y, z & x.

Puisqu'on vient de trouver $z = \frac{3 - 5t}{4}$, on aura en mettant pour t sa valeur, $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; & puisqu'on a trouvé $y = \frac{243 - 14z}{5}$; en mettant pour z, sa valeur, on aura $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Enfin, puisqu'on a trouvé $x = 41 - y - z$, on aura $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$. Ensorte que les valeurs correspondantes de x, y & z, sont $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$, & $z = 5u - 3$, dans lesquelles on peut mettre pour u, tel nombre entier qu'on voudra, pourvu qu'il en résulte des nombres positifs pour

x, y & z: or cette condition emporte ces trois autres. 1°. Que $9u$ soit plus grand que 13; ou que u soit plus grand que $\frac{13}{9}$ ou $1\frac{4}{9}$. 2°. Que 57 soit plus grand que $14u$, ou que u soit plus petit que $\frac{57}{14}$; c'est-à-dire, plus petit que $4\frac{1}{14}$. 3°. Enfin que $5u$ soit plus grand que 3, ou u plus grand que $\frac{3}{5}$, ce qui ne peut manquer d'arriver, dès qu'on observera la première condition : ainsi le nombre des solutions est donc très-limité, & se réduit à trois que l'on trouve, en donnant à u pour valeurs les nombres 2, 3 & 4, qui sont les seuls que l'état de la question admette. On ne peut donc faire 741 liv. en 41 pièces des trois espèces proposées, qu'en prenant les nombres de pièces marquées ci-dessous, & qu'on trouve, en mettant pour u, les nombres 2, 3 & 4, successivement dans chacune des valeurs de x, y & z.

x		y		z
5	....	29	....	7
14	....	15	....	12
23	....	1	....	17

Dans le cours des divisions que l'on fait pour réduire la valeur de l'indéterminée à un nombre entier, rien n'oblige à prendre le quotient plutôt au-dessous de sa véritable valeur, qu'au-dessus. Il est même quelquefois plus expéditif de le prendre de cette dernière manière.

Par exemple, si j'avois l'équation $19y = 52x + 139$, au lieu d'en conclure $y = 2x + 7 + \frac{14x + 6}{19}$ en prenant $2x$ pour valeur du quotient de $52x$ divisé par 19, en nombres entiers, je conclurois $y = 3x + 7 \frac{-5x + 6}{19}$ en prenant plutôt $3x$ pour quotient, parce que ce quotient est plus approchant, & que l'excédent $5x$ dont je tiens compte en lui donnant le ſigne $-$, a un coëfficient plus petit, ce qui ne peut manquer d'abréger le calcul. Je fais enſuite $\frac{-5x+6}{19} = u$; & j'en conclus $x = \frac{6-19u}{5}$, & par la même raiſon, $x = 1 - 4u + \frac{1+u}{5}$. Faiſant $\frac{1+u}{5} = t$, j'ai enfin $u = 5t - 1$; ce qui achève la ſolution plus promptement que ſi j'avois pris chaque quotient au-deſſous de ſa véritable valeur. Si on remonte, comme ci-deſſus, aux valeurs de x & de y, on trouvera $x = 5 - 19t$, & $y = 21 - 52t$, qui en donnant à t pour valeurs, tous les nombres négatifs depuis zéro, donneront toutes les ſolutions poſitives de l'équation.

Des Équations du ſecond degré à une ſeule inconnue.

94. On appelle *Équations du ſecond degré*, celles dans leſquelles la plus haute puiſſance de l'inconnue, eſt cette même inconnue multipliée par elle-même, ou élevée à ſon quarré. Ainſi l'équation $5x^2 = 125$, eſt une équation du ſecond degré, parce que dans le terme, $5x^2$ la quantité x eſt multipliée par elle-même.

95. Lorſque l'équation ne renferme d'autre puiſſance de l'inconnue, que le quarré, elle eſt toujours facile à réſoudre : il ſuffit de dégager le quarré de l'inconnue, de tout ce qui peut le multiplier, ou le diviſer, ou des quantités qui peuvent ſe trouver