L'identité de Bezout et l'algorithme d'Euclide.

Nous présentons ici deux méthodes de résolution de l'équation

$$(E) : 17x - 11y = 542$$

1 Le texte original de Bézout (1766)

Extrait du *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*. Par M. Bézout, de l'Académie des Sciences, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Élèves et des Aspirans au Corps de l'Artillerie, & Censeur de Livres.

Troisième Partie contenant l'Algèbre et l'Application de cette Science à l'Arithmétique et la Géométrie.

Première Section, dans laquelle on donne les principes du Calcul des Quantités algébriques.

Des problêmes indéterminés. Question première. *On demande en combien de manières on peut payer 542 livres, en donnant des pièces de 17 liv. & en recevant en échange des pièces de 11 livres.*

Représentons par x le nombre des pièces de 17 liv. & par y celui des pièces de 11 liv. ; en donnant x pièces de 17 liv. on payera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pièces de 11 liv. on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x-11y$; & puisqu'on veut payer 542 liv. on aura $17x-11y = 542$. Tirons la valeur de y, c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coefficient, & nous aurons $y = \frac{17x-542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera surement à l'équation ; mais comme la question exige que x et y soit des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x-542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \frac{6x-3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x-3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier ; on aura $\frac{6x-3}{11} = u$, & par conséquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u+3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \frac{5u+3}{6}$; il faut donc que $\frac{5u+3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier ; on aura $\frac{5u+3}{6} = t$, & par conséquent $5u + 3 = 6t$ & $u = \frac{6t-3}{5} = t + \frac{t-3}{5}$; il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura $\frac{t-3}{5} = s$, & par conséquent $t = 5s + 3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y : puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$; en mettant pour t la valeur $5s + 3$, on aura $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s + 3$: & puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s + 6$: enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x-542}{11}$, en substituant pour x sa valeur, on aura $y = \frac{187s+102-542}{11} = 17s - 40$; ainsi les valeurs correspondantes de x & de y sont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra ; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3 ; en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire, plus grand que 2.

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini ; ainsi posant successivement $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, &c, on aura les valeurs correspondantes de x & de y comme il suit :

$x = 39$...	$y = 11$
$= 50$	$= 28$
$= 61$	$= 45$
$= 72$	$= 62$
$= 83$,&c.	$= 79$

Dont chacune est telle qu'en donnant le nombre de pièces de 17 liv. désigné par x, & recevant le nombre correspondant de pièces de 11 liv. désigné par y, on payera 542 livres.

2 Le méthode de Bézout (1766)

En résumé

Descente

L'équation à résoudre dans $\mathbb{N}^2$ est

$$(E) : 17x - 11y = 542$$

En prenant pour x une valeur entière quelconque, on n'obtient pas forcément pour y une valeur entière à cause du dénominateur 11 dans l'égalité $y = \frac{17x-542}{11}$.

La méthode de Bézout consiste à écrire successivement :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{17x-542}{11} = x - 49 + \frac{6x-3}{11} \\
&= x - 49 + u \quad \text{avec} \quad u = \frac{6x-3}{11} \\
x &= \frac{11u+3}{6} = u + \frac{5u+3}{6} \\
&= u + t \quad \text{avec} \quad t = \frac{5u+3}{6} \\
u &= \frac{6t-3}{5} = t + \frac{t-3}{5} \\
&= t + s \quad \text{avec} \quad s = \frac{t-3}{5} \\
t &= 5s + 3
\end{aligned}$$

Les nombres y et x sont entiers si et seulement si x et u sont entiers.

Les nombres x et u sont entiers si et seulement si u et t sont entiers.

Les nombres u et t sont entiers si et seulement si t et s sont entiers.

L'absence de dénominateur dans la dernière égalité implique que t et s sont entiers si et seulement si s est entier.

Donc y et x sont entiers si et seulement si s est entier.

Remontée

Bézout obtient successivement :

$$t = 5s + 3$$

$$u = \frac{6t-3}{5} = \frac{30s+18-3}{5} = 6s+3$$

$$x = \frac{11u+3}{6} = \frac{66s+33+3}{6} = 11s+6$$

$$y = \frac{17x-542}{11} = \frac{187s+102-542}{11} = 17s-40$$

On souhaite x et y positif, donc $11s + 6 \geqslant 0$ et $17s - 40 \geqslant 0$, c'est-à-dire $s \geqslant \frac{40}{17} > 2$.

On obtient donc une infinité de solutions pour x et y en prenant pour s des valeurs entières supérieures ou égales à 3 :

s	3	4	5	6	7
x	39	50	61	72	83
y	11	28	45	62	79

Applications

1. En utilisant la méthode de Bézout, résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$5x - 22y = 7$$

2. En utilisant la méthode de Bézout, résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$93x - 34y = 123$$

On pourra noter $x_0 = y$, $x_1 = x$ puis x_2, x_3... les variables successives.

3 Résolution en Terminale S (2009)

On souhaite résoudre (E) : $17x - 11y = 542$ dans $\mathbb{N}^2$. On cherche d'abord une solution particulière de

$$17x - 11y = 1$$

en remontant l'algorithme d'Euclide pour le PGCD de 17 et 11 :

Descente

$$\begin{aligned} \underline{17} &= 1 \times \underline{11} + \underline{6} \\ \underline{11} &= 1 \times \underline{6} + \underline{5} \\ \underline{6} &= 1 \times \underline{5} + \underline{1} \end{aligned}$$

Remontée

$$\begin{aligned} \underline{1} &= \underline{6} - \underline{5} \\ &= \underline{6} - (\underline{11} - 1 \times \underline{6}) = 2 \times \underline{6} - \underline{11} \\ &= 2 \times (\underline{17} - 1 \times \underline{11}) - \underline{11} = 2 \times \underline{17} - 3 \times \underline{11} \end{aligned}$$

Une solution particulière de $17x - 11y = 1$ est donc $(2; 3)$.
On en déduit une solution particulière de (E) :

$$(x_0; y_0) = (542 \times 2; 542 \times 3) = (1084; 1626)$$

Le couple $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si

$$17(x - x_0) = 11(y - y_0)$$

Les entiers 17 et 11 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 11 divise $x - x_0$.

Il existe donc un entier k tel que $x - x_0 = 11k$ et par conséquent $y - y_0 = 17k$.
On obtient donc

$$\begin{cases} x = x_0 + 11k = 1084 + 11k \\ y = y_0 + 17k = 1626 + 17k \end{cases} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

On souhaite que $(x; y) \in N^2$ donc on a les contraintes

$$\begin{cases} 1084 + 11k \geqslant 0 \\ 1626 + 17k \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant -\frac{1084}{11} \approx -98{,}5 \\ k \geqslant -\frac{1626}{17} \approx -95{,}6 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} x = 1084 + 11k \\ y = 1626 + 17k \end{cases} \quad \text{avec} \quad k \in \{-95; -94; \cdots\}$$

ce qui donne

k	-95	-94	-93	-92	-91
x	39	50	61	72	83
y	11	28	45	62	79

4 Analyse de la méthode de Bézout

La comparaison des deux méthodes précédentes permet de reconnaître l'algorithme d'Euclide dans la méthode de Bézout.

Partant de l'équation

$$a_0x_1 - a_1x_0 = c_1 \ ,$$

avec a_0 et a_1 premiers entre eux, Bézout obtient :

$$x_0 = \frac{a_0x_1 - c_1}{a_1} = a_2'x_1 - c_2' + \frac{a_2x_1 - c_2}{a_1}$$

où a_2 et c_2 (respectivement a_2' et c_2') sont les restes (respectivement les quotients) de la division de a_0 et c_1 par a_1.

En posant

$$x_2 = \frac{a_2x_1 - c_2}{a_1}$$

on obtient

$$x_1 = \frac{a_1x_2 + c_2}{a_2} = a_3'x_2 - c_3' + \frac{a_3x_2 - c_3}{a_2}$$

où a_2 et c_2 sont les restes de la division de a_0 et c_2 par a_2.

On itère le procédé en construisant 3 suites :

- La suite des entiers (a_n) définie par la donnée de a_0 et a_1, et par a_{n+2} est le reste de la division de a_n par a_{n+1}.
  La suite des entiers (a_n) est strictement décroissante. Son dernier terme est $a_{k+1} = 0$ pour un certain entier k et on a $a_k = 1$ car a_0 et a_1 sont premiers entre eux.
- La suite des entiers $(c_n)_{1\leqslant n\leqslant k+1}$ définie par la donnée de c_1 et par c_{n+1} est le reste de la division de c_n par a_n.
- La suite des inconnues $(x_n)_{1\leqslant n\leqslant k}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}x_n + (-1)^n c_{n+1}}{a_n}$$

Par construction, pour tout entier naturel $n \leqslant k-1$, x_n et x_{n+1} sont entiers si et seulement si x_{n+1} et x_{n+2} sont entiers.

La dernière inconnue x_k est définie par

$$x_k = \frac{a_kx_{k-1} + (-1)^{k-1}c_k}{a_{k-1}}$$

On a $a_k = 1$ donc

$$x_{k-1} = a_{k-1}x_k - (-1)^{k-1}c_k$$

Pour que x_{k-1} et x_k soient entiers, il faut et il suffit que x_k soit entier.