

L'IREM de Limoges (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et les jeux EFCÉ présentent :

Le théorème d'al-Kâshî

Soit ABC un triangle et soit α une mesure (en radians) de l'angle au sommet A . Alors

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2AB \cdot AC \cos(\alpha)$$

Ce résultat contient le **théorème de Pythagore** puisque $\cos(\alpha)$ est nul exactement quand l'angle au sommet A est un angle droit. On en déduit donc l'équivalence :

$$ABC \text{ est rectangle en } A \text{ si et seulement si } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

On peut prouver le théorème d'al-Kâshî à partir de celui de Pythagore et des relations trigonométriques dans le triangle rectangle. On le fait ici dans le cas où l'angle au sommet A est **aigu**, c'est-à-dire de mesure inférieure ou égale à celle de l'angle droit. Supposons que le pied H de la hauteur issue de B appartient au segment $[AC]$ (sinon c'est le cas pour celui de la hauteur issue de C et il suffit d'échanger B et C). Les triangles AHB et BHC sont rectangles en H donc

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad \text{et} \quad BC^2 = BH^2 + CH^2$$

si bien que

$$AB^2 - BC^2 = AH^2 - CH^2 = (AH - CH)(AH + CH) = (AH - CH) AC$$

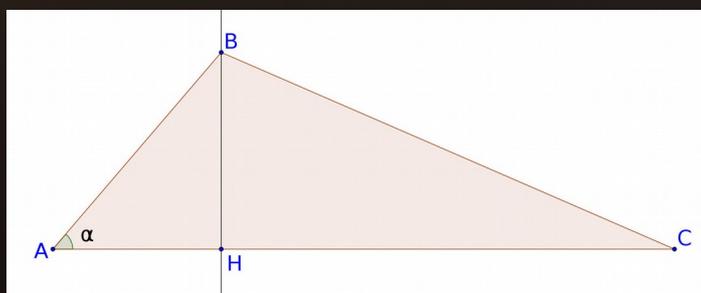
Or

$$AH = \cos(\alpha) AB \quad \text{et} \quad AH - CH = AH - (AC - AH) = 2AH - AC$$

donc

$$AB^2 - BC^2 = (2\cos(\alpha) AB - AC) AC$$

et le résultat suit.



Un peu d'histoire...



Jamshîd al-Kâshî est un grand **savant iranien né vers 1380 et mort en 1429**. Comme de nombreux savants des pays d'Islam, il doit son nom à sa ville natale : **Kâshân**, ville d'Iran située entre Téhéran et Ispahan. De nombreux écrits d'al-Kâshî sont parvenus jusqu'à nous, notamment deux lettres qu'il avait adressées à son père. Ainsi, nous sommes relativement bien renseignés sur sa vie et ses travaux.

Dans sa ville natale et dans plusieurs foyers scientifiques de la Perse, il étudie **les mathématiques, l'astronomie et la médecine**. À **Samarkand** où il s'installe vers 1420, il vit sous la protection du prince **Ulugh Beg**, grand promoteur des sciences. Le savant occupe une place très importante au sein du tout **nouvel observatoire** que le prince fait construire pour son usage personnel et celui des nombreux savants qui vivent à sa cour. Grâce à cela, al-Kâshî effectue de nombreuses observations et des calculs astronomiques de première importance ; il construit de **nouvelles tables astronomiques très précises**.



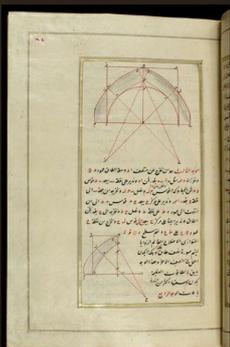
En plus de la **généralisation du théorème de Pythagore**, al-Kâshî est connu pour plusieurs résultats mathématiques importants comme :

- des **tables trigonométriques** avec des valeurs approchées de *sinus* ;
- le calcul du rapport de la circonférence du cercle à son rayon pour obtenir une **valeur approchée de 2π** avec la plus importante précision de l'époque :

$$2\pi \approx 6,2831853071795865$$

elle ne sera pas améliorée avant le 16^e siècle !

- la description de **méthodes de calculs d'aires et de volumes** comme ceux de différents dômes, coupoles et « stalactites » ou *muqarnas* ;
- l'utilisation de **fractions décimales**.



Ses livres, notamment le *Miftâh al-hisâb* [Clé de l'arithmétique], l'un des plus importants, répondent aux besoins d'un **très large public**, en particulier les chercheurs de Samarkand étudiant l'astronomie, les mathématiques (arithmétique, algèbre et géométrie), l'architecture, la comptabilité ou le commerce.

Marc Moyon, IREM de Limoges