AVANT-PROPOS

Telle est l'analyse sommaire de ce Livre, qui s'adresse à tous ceux qui aiment la géométrie, cette science si belle et si parfaite que les programmes tiennent aujourd'hui trop dédaigneusement à l'écart. On y reviendra sans nul doute, la fixité des idées n'étant pas la qualité dominante dans notre pays ; en tout cas, toute tentative pour y ramener les esprits est de bon aloi et doit être hautement encouragée.

Eugène Rouché, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1890.

Les instruments ne sont que des théories matérialisées.

Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, 1934.

Cet ouvrage met en scène, en dix chapitres, des instruments qui ont été inventés dans l'histoire pour résoudre des problèmes. Comment mesurer la hauteur d'une tour ? Comment mesurer la largeur d'une rivière ? Comment construire un carré de surface donnée ? Comment construire un pentagone régulier ? Comment cartographier ? Comment protéger une forteresse ? Pour résoudre tous ces problèmes pratiques, esthétiques ou théoriques et bien d'autres, il faut ruser. Cette ruse élaborée tout au long des siècles s'appelle « les mathématiques » et les solutions apportées ne sont pas tant des applications des mathématiques que des prémisses à leur construction.

Cet ouvrage s'intéresse aux constructions mathématiques selon deux sens qui se confortent l'un l'autre. Le lecteur y rencontrera des constructions géométriques, au sens le plus habituel du terme, celui de figures effectuées avec la règle et le compas. Mais il y trouvera aussi des constructions mathématiques, c'est-à-dire des élaborations de savoirs rationnels. Car, au-delà de la présentation d'instruments concrets, nous nous attachons à interroger leurs conceptions, à montrer qu'ils sont le fruit de raisonnements, que ce sont des « théorèmes en acte ». Il en est ainsi pour l'équerre articulée d'Oronce Fine, qui réalise un théorème de similitude des triangles. Quant au couteau de cordonnier de Claude Bergery pour la trisection d'un angle, il s'appuie sur un simple « cas d'égalité de triangles ». De la sorte, il apparaît que, souvent, plus l'instrument est facile d'usage, plus les savoirs sous-jacents sont nombreux. Nous pouvons dire que celui qui tient en main un instrument détient une connaissance mathématique plus ou moins élaborée. De plus, le geste exact pour utiliser l'instrument témoigne d'emblée de cette connaissance.

Dans leur version scolaire habituelle, les mathématiques sont souvent déversées en une succession de connaissances suivies de quelques applications. Dans leur version historicisée, elles sont le produit de raisonnements élaborés pour résoudre des problèmes. De ce point de vue, l'invention et l'usage des instruments sont des façons de « mettre la main à la pâte ». Devant une situation problématique, comme une de celles que nous indiquons au début de cet avant-propos, l'œil regarde et la main dessine les éléments que le regard a retenus. Nous ne pouvons pas parler ici d'une simple observation, puisque cette opération conjuguée du regard et du geste élabore déjà un tri et une séquence parmi les informations, donc suppose un savoir présent. Nous pouvons reprendre à notre compte ce qu'écrit Gaston Bachelard dans le *Nouvel esprit scientifique* à propos de l'observation scientifique d'un phénomène, qui sera pour nous l'observation mathématique d'une situation :

> *Déjà l'observation a besoin d'un* corps *de précautions qui conduisent à réfléchir avant de regarder, qui réforment du moins la première vision, de sorte que ce n'est jamais la première observation qui est la bonne. L'observation scientifique est toujours une observation polémique ; elle confirme ou infirme une thèse antérieure, un schéma préalable, un plan d'observation ; elle montre en démontrant ; elle hiérarchise les apparences ; elle transcende l'immédiat ; elle reconstruit le réel après avoir reconstruit ses schémas. Naturellement, dès qu'on passe de l'observation à l'expérimentation, le caractère polémique de la connaissance devient plus net encore. Alors il faut que le phénomène soit trié, filtré, épuré, coulé dans le moule des instruments, produit sur le plan des instruments. Or les instruments ne sont que des théories matérialisées.*

Cette conception de l'observation consacre le schéma, pour nous la figure géométrique, comme une pièce déterminante des constructions mathématiques. La figure géométrique est celle que l'on dessine avec des instruments, mais elle est d'abord l'instrument et le témoin de la connaissance élaborée dans une observation.

Cet ouvrage a aussi été pensé comme une « défense et une illustration » de la géométrie, alors que cette discipline est aujourd'hui peu à peu délaissée dans l'enseignement. Au moment où les portes semblent se fermer définitivement, puisque les futurs enseignants ne connaissent plus la géométrie élémentaire, cet ouvrage voudrait contribuer à lui ouvrir une nouvelle porte, celle des gestes mathématiques qui « comprennent », au deux sens du verbe, des instruments. C'était aussi le souhait du mathématicien Eugène Rouché en 1890 dans sa note de lecture qui saluait la parution de l'*Essai sur la géométrie de la règle et de* *l'équerre* de Gaston Gohierre de Longchamps. Aux divers instruments sont associées des géométries. La règle et le compas sont les instruments de la géométrie d'Euclide, celle des cas d'égalité et de similitude des figures. Tandis que la géométrie à la règle et à l'équerre de Gohierre de Longchamps est celle des transversales, qui a été initiée par Lazare Carnot et a été développée au long du XIX^e^ siècle. Toute la seconde partie de l'*Essai* est consacrée à des problèmes d'arpentage, surtout des problèmes de points, de droites et de figures inaccessibles. Deux chapitres de notre ouvrage reprennent des constructions de cet *Essai*.

Notre approche des instruments comme moyen de résolution de problèmes et comme producteur de constructions mathématiques conduit naturellement à mettre en avant les raisonnements qui sont en jeu dans leur conception et dans leur usage. Avec les mathématiciens de différentes périodes, nous calculons la complexité des constructions ou nous examinons des constructions approchées. Dans ce dernier cadre, ce sont alors d'autres mathématiques, celles de l'à peu près, qui sont requises. Cet ouvrage pourrait donc aussi être considéré comme une initiation à certaines mathématiques, parfois peu connues, mais toujours passionnantes.

Platon regrettait l'utilisation du terme « géométrie », c'est-à-dire « mesure de la terre », parce que, selon lui, cette science est toute contemplation. Dans la même veine, le texte des *Éléments* d'Euclide ne mentionne ni règle ni compas, mais il considère des droites et des cercles. Les *Éléments* présentent une « théorie ». Pourtant, des traces de la pratique géométrique à l'œuvre derrière le texte sont présentes, dans l'énoncé des trois premiers postulats, qui demandent des moyens de mener une droite et un cercle, ou dans la première proposition, qui demande de construire un triangle équilatéral. Dans l'ouvrage euclidien, les propositions sont des « théorèmes » ou des « problèmes », pour lesquels les figures recherchées sont obtenues par intersections de droites et de cercles. Selon que nous mettons l'accent sur les uns ou sur les autres, l'ouvrage euclidien peut être lu de deux façons. Il peut être vu comme l'exposition d'une théorie de figures, déduites à partir de deux figures simples et parfaites, c'est-à-dire la droite et le cercle. Il peut aussi être considéré comme un traité de constructions, dont l'exactitude s'appuierait sur une théorie. Les trois premiers livres verraient alors leur aboutissement avec la construction des polygones réguliers du Livre IV.

Notre ouvrage commence avec les constructions élémentaires, tout en faisant varier les instruments. Il commence avec la règle et le compas en suivant les traces d'Euclide, puis il continue avec la règle et l'équerre, dans les pas de Gohierre de Longchamps. Il se poursuit avec des raffinements, qui sont peut-être à rechercher dans des commodités pratiques, mais qui sont sûrement le point de départ de développements théoriques : les constructions avec seulement la règle de François-Joseph Servois et les constructions avec seulement le compas de Lorenzo Mascheroni. Chez Euclide, les constructions élémentaires sont démontrées pour la plupart avec les théorèmes des deux premiers livres d'Euclide. Tandis que les raisonnements de Servois utilisent les théorèmes de Ménélaüs et de Céva. D'autres compas ou équerres sont évoqués, témoins de siècles de pratiques du dessin.

Le second chapitre s'intéresse à des problèmes pratiques, ceux d'agrandir et de réduire des figures, de cartographier et enfin de mesurer des distances inaccessibles. Les trois premiers problèmes sont inhérents à la schématisation d'une situation. À en croire certains commentateurs grecs, les problèmes de distances inaccessibles sont liés aux premières géométries grecques : le problème de trouver la distance d'un bateau en mer pour la géométrie des Ioniens et le problème de la hauteur d'une pyramide pour la géométrie de Thalès. Ce chapitre se nourrit des instruments de géométrie pratique du XV^{e} siècle inventés pour résoudre des problèmes de distances inaccessibles. Comme le compas de proportion de Galilée et le pantographe de Scheiner, tous ces instruments matérialisent les savoirs de la géométrie des similitudes.

Le troisième chapitre approfondit la relation entre instruments et savoirs, puisqu'il associe des instruments à diverses époques et cultures, qui sont toutes confrontées à un même problème, celui de quarrer une figure. Quarrer une figure signifie construire un carré, ou le côté d'un carré, remplissant certaines conditions, par exemple construire un carré dont l'aire est celle d'une figure donnée, comme dans la quadrature du cercle. Dans l'Inde, au IV^{e} siècle avant J.-C., il est fait usage de cordes et de piquets, alors que Dürer à la Renaissance prend la règle et le compas. À Bagdad vers l'an mille, Abûl l'-Wafâ' s'inspire des pratiques des artisans pour construire des carrés par découpages de figures données. Dans la même veine, mais dans un contexte différent, au début du XX^{e} siècle, Henri Ernest Dudeney construit un carré articulé par découpage.

Avec les deux chapitres suivants, arrivent deux grands problèmes que les géomètres grecs ont tenté de résoudre à la règle et au compas, mais en vain. Le problème de la duplication du cube, c'est-à-dire de construire un cube, ou le côté d'un cube, dont le volume soit double de celui d'un cube donné, a donné lieu à de nombreuses inventions instrumentales et théoriques dans l'Antiquité, et en particulier à l'invention de courbes, comme la cissoïde, et aussi sans doute des coniques. Un autre problème hérité de la géométrie grecque est la trisection d'un angle. Plusieurs instruments ont été inventés pour remplacer la règle et le compas, mais la trisection a surtout donné lieu à l'introduction de courbes, comme la conchoïde et le limaçon, et de mécanismes, comme le compas trisecteur de Descartes et le système articulé de Laisant.

De ces deux problèmes, un troisième a surgi, celui de construire les courbes introduites par les géomètres. Une construction de points de la courbe à la règle et au compas n'est pas satisfaisante, car il faut joindre à peu près ces points. Aussi, des constructions continues des courbes ont vite été recherchées, en particulier par René Descartes et Isaac Newton au XVII^{e} siècle. Ce sont au début des mécanismes divers, aux contours peu définis, avant que ne soit élaborée au XIX^e^ siècle la théorie des systèmes articulés. La trisection a donné aussi lieu à des constructions qui l'approchent, depuis la Renaissance et jusqu'au début du XX^e^ siècle. Ce problème n'a rien perdu de son charme aujourd'hui auprès d'amateurs de mathématiques.

Les deux chapitres suivants continuent avec les problèmes de construction légués par les géomètres grecs, ceux de polygones réguliers. Les figures du pentagone régulier (cinq côtés égaux) et de l'heptagone régulier (sept côtés égaux) ont été beaucoup explorées, sans doute en raison des emblèmes qu'elles représentent. Le pentagone étoilé était un symbole des Pythagoriciens au VI^e^ siècle av. J.-C., et une construction à la règle et au compas du pentagone régulier se trouve dans le livre IV des *Éléments* d'Euclide. Aujourd'hui, les figures du pentagone et de l'heptagone continuent d'inspirer les architectes, ainsi que les publicistes qui les prennent comme logos de marques d'eau minérale ou de bière.

Nous trouvons dans ces deux chapitres le souci de résoudre des problèmes différents avec le même type d'instruments ou de moyens. Ainsi, dès le XI^e^ siècle, Omar Khayyâm résout divers problèmes de constructions géométriques par des intersections de coniques, en particulier des constructions de polygones réguliers, en étendant la puissante algèbre initiée par Al-Khwârizmî deux siècles plus tôt. La figure de l'heptagone régulier, c'est-à-dire d'un polygone régulier avec sept côtés égaux, a connu des constructions d'une grande diversité. Un amateur du XVII^e^ siècle, le Prévost Comiers invente un compas servant aussi bien à la construction d'un heptagone, qu'à la duplication du cube et à la trisection d'un angle. Les constructions de polygones, inscrits et circonscrits à un cercle, sont nombreuses depuis celle de l'astronome grec Ptolémée jusqu'aux mathématiques récentes. Celles du géomètre persan du X^e^ siècle, Abû l-Wafâ', sont remarquables par leurs démarches systématiques.

Avec les constructions des fortifications et autres places fortes, nous revenons sur des problèmes pratiques. Pour bien protéger, elles doivent remplir certaines conditions, les « maximes de la fortification », qui varient selon les pays et avec le temps. Les instruments de dessin des ingénieurs du XVII^e^ siècle sont la règle et le compas. Dans son ouvrage de 1666, l'ingénieur du Roy en Italie, Jean Brioys, explique comment fortifier des places à formes polygonales régulières, depuis le carré jusqu'au dodécagone, et en dessiner les contours, compliqués mais réguliers. Mais il faut aussi construire en tenant compte de la portée des armes, et pour cela calculer les dimensions de l'édifice. C'est le but de *L'Arithmétique et la Géométrie de l'Officier* de Guillaume Leblond, au siècle suivant. La fortification demande également de faire des tracés sur le terrain, ce qui nécessite des instruments, comme le carré géométrique, le trigomètre ou le graphomètre, dont le principe repose souvent sur la similitude de figures.

Les problèmes de construction de cercles qui se touchent, abordés dans le chapitre suivant, occupent une grande période de l'histoire des mathématiques. Elle commence dans la géométrie grecque avec un ouvrage perdu d'Apollonius, présenté par Pappus dans la *Collection mathématique*. Le problème réputé alors le plus difficile fut résolu par François Viète, il s'agit de tracer un cercle tangent à trois cercles donnés. Bien d'autres solutions seront données à ce problème, chacune étant témoin de nouvelles approches ou de nouveaux savoirs. Une idée germe avec les problèmes de contact et leurs solutions, celle de comparer des constructions en calculant leur simplicité. Les constructions graphiques de cercles et de droites qui se touchent étaient très présentes dans les manuels de l'enseignement secondaire aux XIX^{e} et XX^{e} siècles, aussi bien pour leur intérêt théorique que pratique, avec les tracés de moulures ou les dessins d'engrenages.

Les constructions et les instruments géométriques des chapitres précédents ont aussi servi au calcul numérique. Cet ouvrage se termine avec cet important aspect qui manifeste le lien entre nombres et figures, entre arithmétique et géométrie. En effet, la mesure d'un segment, qui répond à la solution d'un problème de construction, peut fournir *a posteriori* une valeur numérique approchée de cette solution. Ainsi, la construction géométrique devient à proprement parler une technique de calcul numérique. La systématisation de cette idée a conduit, entre les mains des ingénieurs du XIX^{e} siècle, à la création d'une discipline à part entière, appelée « calcul graphique », avec ses développements théoriques spécifiques, ses applications, ses traités et ses enseignements. Ce dernier chapitre examine quelques-unes des constructions géométriques emblématiques qui ont été couramment pratiquées par les calculateurs graphiques jusque vers les années 1970.

Cet ouvrage a été conçu et élaboré dans le cadre de la Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques ». Il s'adresse à toutes les personnes intéressées par les sciences et les techniques : étudiant, enseignant, formateur, ingénieur, amateur, tous désireux de comprendre les ressorts de l'invention mathématique par une approche historique de cette discipline. L'équipe était composée d'Évelyne Barbin, Dominique Bénard, Anne Boyé, Jean-Pierre Friedelmeyer, Jean-Paul Guichard, Patrick Guyot, Frédéric Métin, Guillaume Moussard, Marc Moyon, Dominique Tournès et Marc Troudet.

Évelyne Barbin
IREM des Pays de la Loire