

Histoires et digressions autour de la numération.

Parlons d'*histoires de la numération* puisque chaque civilisation a sa propre histoire des nombres. En retraçant (succinctement) ces histoires, nous voulons simplement attirer l'attention sur la démarche nécessaire à la mise en place d'un système de numération. Ce n'est que du bricolage et pourtant au fil des siècles naît un système de numération unique au monde et commun à toutes les civilisations (ou presque).

1 Aux origines

Il y a environ 5000 ans naissent **chiffres et lettres** : les mots et les nombres utilisés aujourd'hui ont une bien longue histoire.

Peut-on donner la définition du mot **chiffre** ? un nombre compris entre 0 et 9 mais alors qu'est-ce qu'un nombre ?

Dans le langage courant le mot chiffre n'est pas seulement un symbole, il peut désigner un grand nombre comme le chiffre d'une entreprise.

Le mot chiffre provient du latin cifra (zéro) mais le zéro est le plus récent des chiffres alors....

Dans notre contexte un **chiffre** sera un signe, un symbole désignant une **quantité**.

1.1 Chiffres et Symboles : une abstraction nécessaire

Il y a plus de 30 000 ans, l'homme a commencé à compter avec des cailloux. Ainsi pour se souvenir du nombre de bisons tués au cours d'une chasse l'homme disait : " j'en ai tué autant que de cailloux. "

On eût l'idée plus tard de remplacer les cailloux par des entailles sur un os (ou autre support). Le premier chiffre de notre histoire fut donc un caillou, un trait ou un noeud sur une corde ou encore un doigt. Assez longtemps l'homme n'eut que le chiffre "un", l'unité, pour compter. Un nombre était alors une succession de trait ou de noeud mis côte à côte :

||||| représente alors le chiffre sept.

On ne dit pas sept mais |; |; |; |; |; |; |.

Un seul symbole ne suffit pas longtemps. Et, par paresse sans doute, (compter les bisons d'un grand troupeau ou savoir combien il y avait de bisons en tout alors qu'il y avait plusieurs troupeaux devenait laborieux) on améliore ce système : on utilise un caillou plus gros pour parler de dix bisons ou encore un trait oblique \ pour dix traits verticaux.... Pour représenter cent un bisons, onze signes ou cailloux suffisent (un net progrès par rapport au cent un cailloux du départ). On met alors en place la notion de **regroupement**.

Puis de groupement en groupement, on utilise encore d'autres signes : dix traits obliques (= 100 traits verticaux) = "+" par exemple.

Lorsque débute le commerce on obtient des conversions de la forme : si un mouton vaut + || poules alors \ | moutons valent + || + || + || + || + || + || + || + || + || + || poule ou encore + + + + + + + + + + \ \ || poules. Il est alors intéressant que + + + + + + + + + + soit représenté par o par exemple. On obtient que \ | moutons valent o + \ \ || (en ordonnant les chiffres).

Exercice : Pour vérifier les calculs ci-dessus, traduire cette conversion avec la numération actuelle.

Ce type de regroupement se heurte aussi à des problèmes de langage : il faut fabriquer des mots pour désigner les nouveaux groupements. L'homme utilise alors un principe de répétition (dans lequel l'addition est sous-jacente) utilisé encore de nos jours par les Pigmées d'Afrique qui nomment les premiers chiffres de la manière suivante : 1 se dit *a*, 2 se dit *oa*, 3 se dit *ua*, 4 se dit *oaoa*, 5 se dit *oaua*, 6 se dit *uaua*. Naissent alors des systèmes hybrides mêlant les deux techniques : répétition et regroupement. On obtient ainsi des **systèmes de numération de type additif**, puisque la valeur du tout s'obtient en ajoutant les valeurs des chiffres qui composent le nombre.

Question : Est-ce vrai avec notre système actuel ?

Exercice : Créez un système de numération additif sans répétition, pour représenter les nombres de 1 à 99999. Combien de chiffres sont nécessaires ? Quelle "taille" de regroupement choisir ? Pourquoi ? Faites quelques additions ? Comment vous y prenez-vous ? quelles sont les limites de votre système ?

Un exemple particulier : les Romains

Les Etrusques (peuple d'étrurie : région située entre le Tibre et l'Arno) inventèrent un système de numération repris ensuite par les romains : Imaginez-vous une seconde dans la peau d'un berger étrusque qui compte ses moutons. Quatre moutons, quatre entailles parallèles dans votre bâton de berger ; cinq moutons, et pour voir d'un coup d'oeil qu'il y a bien cinq, quatre entailles parallèles et une cinquième à laquelle vous ajoutez un signe distinctif ; six, sept, huit et neuf moutons et autant d'entailles parallèles qui se suivent ; pour dix moutons un autre signe s'impose (comme pour cinq) et vous obtenez sur votre bâton :

I I I I V I I I I X I I I I V I I I I X pour 20 moutons. Notez qu'il ne s'agit pas tout à fait de la même démarche que celle qui consistait à **remplacer** un groupement de chiffre par un signe.

Vous abrégerez un peu l'écriture par souci d'économie quatre deviendra IV et six qui est :

I I I I V I s'écrira VI et vous utilisez alors deux principes :

le principe **d'addition** (tout chiffre à droite d'un chiffre supérieur s'ajoute), et le principe de **soustraction** (tout chiffre à gauche d'un chiffre supérieur se retranche).

Exercice : **En tant que berger étrusque** comment ajoutez-vous : XV avec XII puis XV avec XV puis XIV avec XV puis VIII avec IX, puis V avec IX....

Pourrait-on définir un ensemble fini de règles à appliquer pour faire des additions de nombres romains, dont la somme serait inférieure à cinquante (L en chiffre romain) ?

Que ce soient les Sumériens, les Egyptiens, les Grecs, les Romains, dans toutes les civilisations de l'âge des métaux, 5000 ans avant notre ère, l'unité et des groupes d'unités sont représentés. Pour additionner, il suffit, à quelques exceptions près (les Romains par exemple) de faire la somme des signes et de remplacer dix mêmes chiffres par le chiffre de "poids" juste supérieur. Les Egyptiens savaient également multiplier par dix et diviser par dix. Essayons de voir comment, en faisant l'exercice suivant :

Exercice : Le système additif des Egyptiens était le suivant (les symboles choisis ici ne sont pas ceux d'origine) :

\mathcal{I} pour un ; \cup pour une dizaine ; \otimes pour une centaine ; \oplus pour un millier.

Représentez le nombre cent vingt-trois et multipliez le par dix, puis divisez le par dix. Que

remarquez-vous ? Quelle règle pouvait bien utiliser les Egyptiens ?

Pour multiplier par un autre nombre que dix, les Egyptiens procédaient à l'aide des doubles :
Considérons par exemple : dix-neuf multiplié par quatre-vingt un. Leur méthode peut se traduire de la manière suivante :

(1)	19
2	38
4	76
8	156
(16)	312
32	624
(64)	1248

Sachant que $81 = 64 + 16 + 1$, on a $19 \times 81 = 19 \times 64 + 19 \times 16 + 19 = 1248 + 312 + 19 = 1579$.
En fait on a écrit le plus grand des deux nombres comme somme de puissances de 2 et utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Pour multiplier par un multiple de dix, ils combinaient les deux méthodes.

Les Egyptiens utilisaient donc, sans le savoir, la base 10 et la base 2 et même la division euclidienne.

Exercice : Expliquez cette dernière phrase.

L'utilisation de la base dix s'explique par la présence de nos dix doigts. Les hommes ont vite compté avec leurs doigts. En Europe on lève le pouce pour 1, le pouce et le majeur pour 2 etc ; en Afrique du nord on lève d'abord le petit doigt puis les autres doigt, en Asie on présente la main ouverte et pour compter on replie les doigts de l'auriculaire au pouce....

L'utilisation de la base deux est simple : c'est facile de prendre un double....

Mais d'autres bases ont été très vite utilisé avec les systèmes additifs.

1.2 Bases

Question : Quels critères pour le choix d'une base ?

Aujourd'hui quel vous semble être un bon critère ? Pourquoi.

Dans un bon système de numération il est important de simplifier le concept de division. Plus une base comportera de diviseur plus ce sera facile. Le nombre dix ne possède que deux diviseurs : il est facile de concevoir un cinquième (deux) et un demi (cinq). Si l'on considère la base douze elle a 2, 3, 4, et 6 comme diviseurs, il est donc facile de considéré la moitié, le quart, le tiers et le sixième : les oeufs et les huitres se comptent encore par douzaine.

Les Sumériens employèrent cette base dans les mesures du temps. L'année vaut douze mois, il y a douze signes du zodiaque....

C'est en passant par la base douze que l'on a utilisé la base soixante pour la mesure du temps, des arcs et des angles. Il existe un processus de calcul à l'aide des mains et des phalanges pour compter en base douze encore utiliser aujourd'hui en Inde et au Proche-Orient.

Exercice : Vous partez de Paris à 9h 51 min 35 secondes, et le trajet à duré 3h 19min 35 secondes. A quelle heure être vous arrivez ? Posez l'addition nécessaire à la réponse sans utiliser le système décimal.

Les habitants de la Mésopotamie savaient très bien faire de telles additions car leur système de numération était en base 60.

2 Position

2.1 Vers les systèmes de position

Mais tous ces systèmes sont limités en nombre de nombres à représenter et l'écriture des nombres n'est pas unique, contrairement à un langage, par exemple : en Égyptien $\cup \mathcal{I} \cup \oplus$ et $\mathcal{I} \oplus \cup \cup$ correspondent au même nombre et la lecture est plus facile si l'on regroupe des signes identiques ensembles. Alors pourquoi ne pas réfléchir à la notion de position ?

Vers le deuxième millénaire avant J.C les Babyloniens (en base soixante) utilisaient encore les cannes d'argile des Mésopotamiens mais ils les avaient apointées pour dessiner des formes plus cunéiformes et ils essayèrent d'utiliser le moins de signes possibles : ils n'en utilisaient qu'un pour désigner un, soixante ou trois mille six cents.

Exercice : En utilisant la même démarche que pour les systèmes additifs déjà vu, et sachant que un, soixante et trois mille six cent s'écrivaient ∇ et dix s'écrivait \triangleleft , écrivez soixante douze et trois mille six cent douze en Babylonien. Quelle ambiguïté notez-vous ? Pourrait-on l'éviter ?

Pour mettre en place un vrai système de position il a d'abord fallu choisir un symbole différent pour chaque nombre entre un et neuf (pour un système en base dix), regardons comment comptaient les Chinois. même si les chiffres deux et trois sont une juxtaposition du chiffre 1 (deux fois pour représenter deux, trois fois pour représenter trois), ils ne n'écrivaient pas trois fois le chiffre dix pour obtenir trente mais il écrivaient leur chiffre trois et leur chiffre dix côte à côte.

Cette écriture déjà plus pratique en suggère une autre : à force d'écrire (pour rien) le signe des dizaines, centaines et unités on finit par ne plus les écrire. Et on peut alors faire le lien avec le boulier..... Et sur le boulier (même si les Chinois écrivent de haut en bas) les unités correspondent à la barre la plus à droite, les dizaines à celle à sa gauche et ainsi de suite.

Question : Que vous manquent-il pour transcrire les nombres du boulier à la feuille de papier ?

2.2 Le zéro

Ce fut d'abord un signe marquant l'absence d'une puissance de dix (en base dix). On s'aperçoit ensuite que le zéro intervient vraiment en tant qu'opérande dans les opérations, il devient alors un chiffre à part entière.

C'est à partir de l'Orient et en utilisant les chiffres venant de l'Inde (ou la numération de position avec zéro est apparu au cours du cinquième siècle), que les arabes propagèrent, entre le dixième et le quatorzième siècle ce type de système dit de **position** en intégrant le zéro, pour arriver aux chiffres que nous utilisons aujourd'hui. En ce qui concerne la lecture des nombres, les unités sont placées le plus à gauche : pour les arabes qui lisent de la gauche vers la droite, la lecture des nombres est naturelle : 675 se lit cinq unités, sept dizaines et six centaines. Dans notre mode de lecture, il faut avoir écrit un nombre en entier et compter le nombre de chiffre qu'il contient pour pouvoir le lire. Pour faciliter notre lecture des nombres nous avons alors pris l'habitude de grouper les chiffres trois par trois.

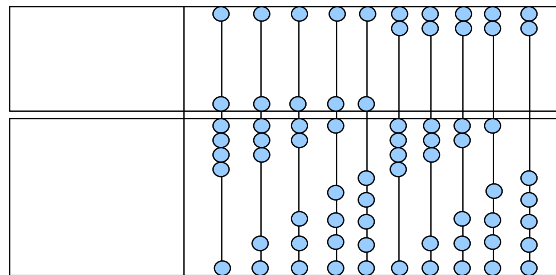
3 Les opérations : abaquages ou algorithmes ?

Pendant une longue période, les opérations se font à l'aide d'abaques, souvent composés de jetons et de cases, comme nous allons le voir.

Les abaquages ont permis de faire du calcul de manière accessible et le nombre de personnes qui savent utiliser ces abaquages augmentent. Le clergé en est un fervent utilisateur. Au moyen âge les abaquages sont à leur apogée, et il sera difficile aux algorithmes de répandre les méthodes de calcul telle que nous les connaissons aujourd'hui. Pendant plusieurs siècles, abaquistes et l'aloristes furent en compétition et ce n'est qu'à la fin du quatorzième que les algorithmes triomphent. Dans les administrations françaises, il y eut même un décret interdisant l'usage des abaquages.

Le boulier

Un boulier est un objet contenant des tiges parallèles composées chacune deux parties une partie haute contenant deux boules à faire glisser et une partie base en contenant cinq. La tige la plus à droite correspond aux unités, celle à sa gauche les dizaines et ainsi de suite. On a par exemple le nombre 9876543210 sur le boulier représenté comme suit :

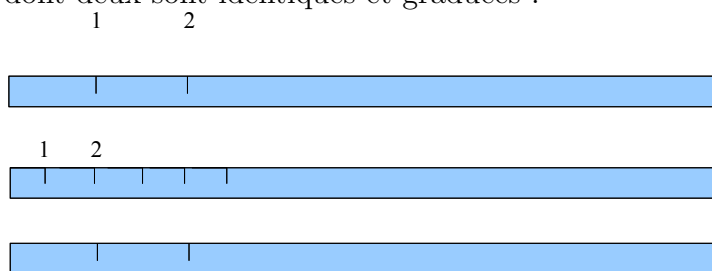


Question A quoi correspondent les deux parties sur chaque tige ?

Exercice On considère sur le boulier le nombre 345 on veut lui ajouter 67. Peut-on commencer par les centaines, puis les dizaines puis les unités ?

Le monogramme

On dispose de trois réglettes dont deux sont identiques et graduées :

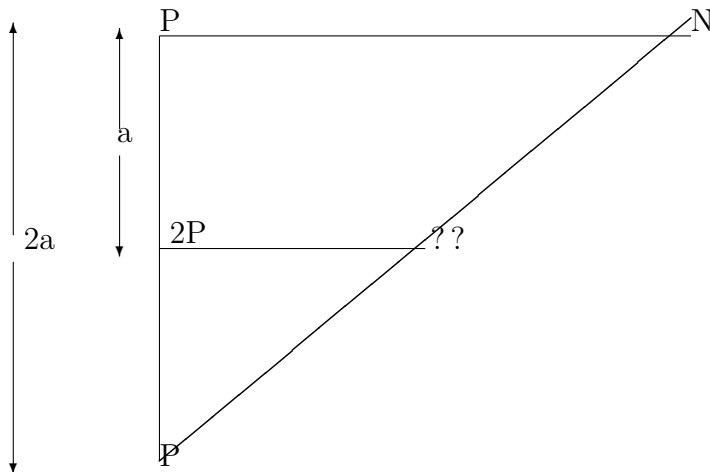


On gradue la réglette centrale : une unité de cette réglette vaut la moitié de l'unité choisie sur les deux autres réglettes. On aligne les réglettes comme dans le dessin précédent.

Exercice Si l'on joint la graduation N de la réglette du haut à la graduation P de la réglette du bas par une droite, l'intersection de cette droite avec la réglette du milieu est la graduation $N + P$.

Pour démontrer cela on peut utiliser le théorème de Thalès, en prenant une unité de mesure

commune à toutes les réglettes et en s'inspirant du dessin ci-dessous :



On peut aussi choisir un repère et utiliser les équations de droites pour démontrer ce résultat.

L'abaque de Lucas

Conçu par le mathématicien Lucas (1842-1891), cet abaque s'organise de la manière suivante : il s'agit d'un support divisé en case et dans chaque case une tige verticale permet d'enfiler des jetons percés. Les cases sont organisées comme un tableau à double entrée la ligne correspondant à un chiffre entre 0 et 9 et la colonne représente les unités, dizaine, centaine, unité de mille, ..., jusqu'au million. On a donc un support qui peut se représenter par le tableau suivant :

Million	Centaine de mille	Dizaine de mille	Unité de mille	Centaine	Dizaine	Unité	
							9
							8
							7
							6
							5
							4
							3
							2
							1
							0

le nombre 946 se représent alors par :

Million	Centaine de mille	Dizaine de mille	Unité de mille	Centaine	Dizaine	Unité	
				*			9
							8
							7
						*	6
							5
					*		4
							3
							2
							1
*	*	*	*				0

Pour ajouter un nombre à un autre, on écrit sur l'abaque le plus grand des deux nombres et on s'autorise les déplacements des jetons suivants :

Un jeton reste sur sa colonne et son déplacement se fait de bas en haut : l'on arrive en haut d'une colonne on repart du bas de cette même colonne (case 0).

Si au cours du déplacement d'un jeton on passe par la case 0 de sa colonne, on déplace d'une case vers le haut le jeton de la colonne juste à gauche.

Par exemple pour ajouter 97 à 946, on commence par les unités. On déplace le jeton situé sur la colonne des unités vers le haut de trois cases, jusqu'à la case 9, et on poursuit le comptage en positionnant le jeton sur ligne 0 (quatrième case parcourue) et en le déplaçant d'encore trois cases vers le haut ; comme le jeton est passé sur la ligne 0 lors du comptage on déplace d'une case vers le haut le jeton de la colonne des dizaines (on obtient $946 + 7 = 953$). On s'occupe ensuite de la colonne des dizaines et on déplace son jeton jusqu'en ligne 4 et comme on est passé par la case 0 on déplace d'une case vers le haut le jeton en colonne des centaines, qui passe sur la case 0 et donc on déplace d'une case vers le haut le jeton de la colonne des unités de mille.

On a décomposé l'addition de la manière suivante : $946 + 7 = 953$; $953 + 90 = 1043$.

Question A quoi sert la ligne des 0 puisqu'à ajouter 0 ne fait rien ?

Exercice Décrire sur un exemple le processus de la soustraction.

4 En guise de conclusion : aujourd'hui et demain

Pour les ordinateurs, se développent aujourd'hui des représentations des nombres en précision illimitée et des algorithmes pour manipuler ces nombres. L'arithmétique modulaire et l'écriture dans différentes bases des nombres a permis une telle avancée. La technologie évoluant encore aujourd'hui, l'idée de la représentation des nombres sera toujours d'actualité.

5 Quelques références

Ces références sont disponibles à la bibliothèque de l'IREM.

“**Les Nombres, Leur Histoire**” , Claude Boucher Collection les mathématiques Aujourd'hui ; Librairies des écoles de Montréal, 1965.

bf “Histoire des mathématiques” J.P Collette, Vuibert 1973.

“**Le Monde des Chiffres**” , André et Jean-Christophe Deledicq 1997, Aux Couleurs du monde Cirfonflexe.

“Histoire Universelle des Chiffres” , G.Ifrah, Robert LAffon, 1994.

“Petites histoires sur l’histoire d’une grande invention : la numération”, A.Ménissier,
Revue “rééducation Orthophonique” septembre1999.

Sites internet : www.recreomath.qc.ca; www.math93.com