

Critères de divisibilité

Equipe de Recherche et de Réflexion
Arithmétique au Lycée

Année 2007-2008

Module - Divisibilité par 97

1 Calcul du reste de la division euclidienne d'un nombre par 97

Cette partie a pour objectif de calculer le reste de la division euclidienne d'un nombre par 97 avec une calculatrice simple. Elle peut être généralisée à la division par d'autres nombres. Deux cas se présentent :

- Le nombre est assez petit pour être tapé en une seule fois sur la calculatrice :
Il suffit de taper la division $n/97$; d'identifier le quotient entier q et de taper $n - 97 \times q$.
Exemple : Prenons $n = 123456$:

$$123456/97 \approx 1272,742 \text{ ainsi } q = 1272 \text{ et le reste est } r = 123456 - 97 \times 1272 = 72$$

Exercice 1 Donner le reste de la division par 97 des nombres suivants :

n	$n/97 \approx$	q	r
654321			
13579			

- Le nombre est trop grand :

Méthode : Découper le nombre en blocs de chiffres, en commençant par la droite, dont la taille est acceptée par votre calculatrice ; faire le travail sur chaque bloc et sommer les restes obtenus en tenant compte du décalage dû aux puissances de 10.

Exemple : Considérons des blocs de 8 chiffres et le nombre $n = 12345678901234567890$:

$$\begin{aligned}
 12345678901234567890 &\rightarrow 1234|56789012|34567890 \\
 &\rightarrow \underbrace{34567890}_{r=0} + \underbrace{56789012}_{r=71} \times \underbrace{10^8}_{r=81} + \underbrace{1234}_{r=70} \times \underbrace{(10^8)^2}_{r=81^2} \\
 &\rightarrow 0 + 71 \times 81 + 70 \times 81^2 \\
 &\rightarrow 465021 \\
 &\rightarrow r = 3
 \end{aligned}$$

Le reste de la division de n par 97 est 3.

Exercice 2 En détaillant les étapes, donner le reste de la division euclidienne par 97 de $n = 13579246801357924680$.

2 Critère de divisibilité par 97 - Algorithme

Notre but est toujours de déterminer le reste de la division euclidienne d'un nombre par 97 ; nous allons mettre en évidence un critère de divisibilité qui permettra de déterminer ce reste par de *simples* calculs mentaux.

Idée : Remarquons simplement que $100 = 97 + 3$

Méthode : Découper le nombre en blocs de deux chiffres en commençant par la droite ; remplacer le décalage dû à 100 par 3 et sommer les termes en tenant compte du décalage dû aux puissances de 100.

Exemple : Considérons des blocs de 2 chiffres et le nombre $n = 1234567890$:

$$\begin{aligned}
 1234567890 &\rightarrow 12|34|56|78|90 \\
 &\rightarrow 90 + 78 \times 100 + 56 \times 100^2 + 34 \times 100^3 + 12 \times 100^4 \\
 &\rightarrow 90 + 78 \times 3 + 56 \times 3^2 + 34 \times 3^3 + 12 \times 3^4 \\
 &\rightarrow 27|18 \\
 &\rightarrow 18 + 27 \times 3 \\
 &\rightarrow 99 \\
 &\rightarrow 2
 \end{aligned}$$

Le reste de la division de n par 97 est 2.

Exercice 3 Tester votre habileté à appliquer cette méthode en déterminant le reste de la division euclidienne par 97 de $n = 13243546576879809$.

3 Applications dans la vie de tous les jours

Exercice 4 Les contraventions pour excès de vitesse possèdent un numéro d'avis comportant deux nombres : le numéro de la contravention et un nombre de deux chiffres appelé *clé*. Ce dernier, en lien avec les codes détecteur d'erreurs, est le reste de la division par 97 du numéro de la contravention.

1. Vérifier que le numéro d'avis suivant est valide : 3333 3357 446041 clé 45.
2. Retrouver la clé associée au numéro de la convention suivant : 3333 3184 754442.

Exercice 5 A votre naissance, l'administration française vous a donné un numéro de sécurité sociale (dit n° INSEE ou Numér d'Inscription au Registre). Ce numéro possède une clé, en lien avec les codes détecteur d'erreurs, qui est le reste de la division du numéro par 97.

Exemple : Voici un exemple d'une fille née le 3 novembre 1992, douzième naissance du mois à Limoges ; son numéro INSEE est :

2	92	11	87	085	012	31
sexe 1 ou 2	année	mois	département	commune	numéro d'ordre	clé
					(dans le mois)	

1. Vérifier que ce numéro est valide. Et le votre, testez le !
2. Retrouver la clé associée au numéro de sécurité sociale suivants :
 - a) à Tulle, 2 93 02 19 272 012
 - b) à Limoges, 1 95 11 87 085 051
 - c) à Guéret, 1 94 08 23 096 001
3. Donner le numéro de sécurité sociale, avec sa clé, de "julien" premier né de l'année 1998 sur la commune de Saint Junien (code 154).

Remarque : On trouve sur internet le code des communes dans leur département respectif, voici quelques exemples :

Département	Commune	Code
Corrèze	Brives	031
Corrèze	Tulle	272
Corrèze	Ussel	275
Corrèze	Uzerche	276
Creuse	Chenerailles	061
Creuse	Felletin	079
Creuse	Guéret	096
Creuse	La Souterraine	176
Haute vienne	Aixe-Sur-Vienne	001
Haute vienne	Ambazac	002
Haute vienne	Bellac	011
Haute vienne	Limoges	085
Haute vienne	Saint Yriex La Perche	187

Proposition de solutions

Solution 1

n	$n/97 \approx$	q	r
654321	6745.6	6745	56
13579	139.99	139	96

Solution 2

$$\begin{aligned}n &= 13579246801357924680 \rightarrow 1357|92468013|57924680 \\ &\rightarrow \underbrace{57924680}_{r=63} + \underbrace{92468013}_{r=47} \times \underbrace{10^8}_{r=81} + \underbrace{1357}_{r=96} \times \underbrace{(10^8)^2}_{r=81^2} \\ &\rightarrow 63 + 47 \times 81 + 96 \times 81^2 \\ &\rightarrow 633726 \\ &\rightarrow r = 25\end{aligned}$$

Le reste de la division de n par 97 est 25.

Solution 3

$$\begin{aligned}13243546576879809 &\rightarrow 1|32|43|54|65|76|87|98|09 \\ &\rightarrow 9 + 98 \times 100 + 87 \times 100^2 + 76 \times 100^3 + 65 \times 100^4 + 54 \times 100^5 \\ &\quad + 43 \times 100^6 + 32 \times 100^7 + 1 \times 100^8 \\ &\rightarrow 9 + 98 \times 3 + 87 \times 3^2 + 76 \times 3^3 + 65 \times 3^4 + 54 \times 3^5 + 43 \times 3^6 \\ &\quad + 32 \times 3^7 + 1 \times 3^8 \\ &\rightarrow 12|94|17 \\ &\rightarrow 17 + 94 \times 3 + 12 \times 9 \\ &\rightarrow 4|07 \\ &\rightarrow 7 + 4 \times 3 \\ &\rightarrow 19\end{aligned}$$

Le reste de la division de n par 97 est 19.

Solution 4

1. Il suffit de montrer que le reste de la division de 33333357446041 par 97 est 45.
2. On calcule le reste de la division de 33333184754442 par 97, on obtient 68. La clé est 68.

Solution 5

1. On vérifie que le reste de la division de 2921187085012 par 97 est 31.
2. Il suffit de calculer le reste de la division par 97 des numéros INSEE :
 - a) à Tulle, 2 93 02 19 272 012 : la clé est 21
 - b) à Limoges, 1 95 11 87 085 051 : la clé est 70
 - c) à Guéret, 1 94 08 23 096 001 : la clé est 76
3. Le numéro INSEE de Julien est 1 98 01 87 154 001 de clé 69.